

# Aniquilación de rayos $\gamma$ en el sistema binario Cygnus X-1

Alumna: *María Victoria del Valle*

Director: *Dr. Gustavo E. Romero*

Codirector: *Dra. Mariana D. Orellana*

*Tesis de Licenciatura en Astronomía*

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

Paseo del Bosque S/N, (1900) La Plata, Argentina

Marzo de 2009



# Agradecimientos

A mi director Gustavo Romero y a mi codirectora Mariana Orellana por su dedicación, su compromiso y por todo lo que me han enseñado y aconsejado.

A la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas y a la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata por su excelencia educativa.

A mis compañeros que siempre han sido generosos prestándome apuntes y compartiendo experiencias de examen, espero haberlos ayudado también.

En lo personal, a mis padres, que siempre me apoyaron incondicionalmente. A mi familia y hermanos.

A Julián que me ayudo en todo, desde el comienzo.



# Índice

<b>1. Microcuásares</b>	<b>9</b>
1.1. Historia . . . . .	9
1.2. ¿Qué es un microcuásar? . . . . .	10
1.2.1. Distribución espacial . . . . .	12
1.2.2. Características generales . . . . .	13
1.2.3. Estados espectrales . . . . .	13
1.3. Jets . . . . .	15
1.3.1. El material del jet . . . . .	16
1.3.2. Interacciones en el jet . . . . .	16
1.4. Emisión . . . . .	18
<b>2. Cygnus X-1</b>	<b>21</b>
2.1. Características . . . . .	21
2.2. Detección en muy alta energía . . . . .	25
<b>3. Aniquilación <math>\gamma</math>-<math>\gamma</math></b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Aniquilación $\gamma$ - $\gamma$ por creación de pares en un campo de radiación . . . . .	30
3.3. Absorción $\gamma$ - $\gamma$ en un microcuásar de gran masa . . . . .	31
<b>4. El caso de Cygnus X-1</b>	<b>37</b>
4.1. Parámetros . . . . .	37
4.2. Resultados del cálculo de la opacidad . . . . .	38
4.3. Análisis de la energética . . . . .	42
4.3.1. Cálculo del índice espectral emitido . . . . .	42
4.3.2. Cálculo de la luminosidad emitida . . . . .	44

4.4. Análisis de la variación con la inclinación . . . . .	45
<b>5. Discusión</b>	<b>49</b>
<b>6. Conclusión</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>
<b>A. Sección eficaz <math>\gamma</math>-<math>\gamma</math></b>	<b>59</b>
<b>B. Método de cuadratura de Gauss</b>	<b>63</b>

# Introducción

En el año 2007 se publicaron los resultados de la observación a muy altas energías (mayores a 100 GeV) del sistema binario de rayos X Cygnus X-1. Las mismas fueron realizadas con el telescopio Cherenkov atmosférico MAGIC (Albert et al., 2007). No se detectó emisión persistente, pero sí se registró un destello o *flare*, que también fue observado por los satélites de rayos X INTEGRAL, Swift/BAT y RXTE/ASM. La detección en el rango de energías de Tera electron-Volt (TeV) constituye la primera evidencia de emisión gamma de muy altas energías producida en el entorno de un agujero negro de masa estelar en nuestra Galaxia. A su vez, es la confirmación de la producción de rayos gamma de tales energías en un sistema binario con acreción; en otras binarias de rayos  $\gamma$  la acreción no es un escenario totalmente aceptado.

Un hecho inesperado es que el exceso de emisión en el rango de energías de TeVs se detectó cuando la fase orbital del sistema tomaba un valor de 0,91, siendo 1 el momento en el cual el objeto compacto se encuentra por detrás de la estrella compañera respecto de la línea de la visual (conjunción superior). En esa configuración se espera que la emisión  $\gamma$  sea fuertemente atenuada por la absorción que ofrece el intenso campo radiativo de la estrella.

Aún sin una explicación detallada para el origen de este *flare*, se debe considerar que la emisión tiene que ser producida en una región alejada del objeto compacto, tal que los efectos de absorción no supriman la emisión. Esto plantea el problema teórico de determinar en que sitio del sistema binario pudieron producirse los rayos  $\gamma$ . El objetivo de este trabajo consiste en determinar dónde podría localizarse la ventana transparente a los rayos  $\gamma$  que permite que esta emisión alcance al observador.

La reciente detección de emisión de altas energías por primera vez en un objeto de este tipo es muy relevante. Se trata de un sistema extensamente estudiado <sup>1</sup>, y plantea desafíos teóricos que hacen de especial importancia su estudio. Uno de ellos es determinar dónde y cómo operan los mecanismos de la emisión de altas energías en esta clase de objetos. Parece factible que la emisión se haya originado lejos del objeto compacto (por el momento orbital en que se produjo la detección). El primer paso para evaluar esta hipótesis es determinar dónde estaría situada la región emisora en función de la absorción que se produce en el sistema.

La absorción variable puede proveer diagnósticos útiles para la determinación de la localización y naturaleza de la emisión  $\gamma$ . En tal sentido, en el presente trabajo se complementará el estudio de la opacidad con una discusión sobre la energética involucrada en el evento.

---

<sup>1</sup>Cygnus X-1 es el principal candidato a agujero negro estelar en la galaxia y una posible rélica de un antiguo colapsar (Mirabel et al., 2003)



# Capítulo 1

## Microquásares

### 1.1. Historia

La primera evidencia de un jet en astrofísica se remonta a 1918, y se debe al descubrimiento hecho por Curtis del jet óptico emanando del núcleo de la galaxia elíptica M87 en el cúmulo de Virgo (Curtis, 1918). Entendemos por jet al material colimado de plasma ionizado y partículas relativistas que está siendo eyectado con un ángulo de apertura menor o igual a 15 grados (Bridle & Perley, 1984). Sólo muy recientemente se descubrió que los jets también podrían producirse a escalas menores en sistemas binarios estelares. La detección hecha por Margon et al. (1979) de grandes y periódicos corrimientos Doppler en las líneas ópticas de SS433 (sistema binario eclipsante de la constelación del Águila) resultaron en la propuesta de un modelo cinemático (Fabian & Rees, 1979; Milgrom, 1979) que consistía de dos jets de materia colimada precesante con una velocidad de  $\sim 0,26c$ . Observaciones en radio mostraron la presencia de jets salientes, confirmando completamente el modelo cinemático. (Spencer, 1979; Gilmore & Seaquist, 1980; Gilmore et al., 1981).

Desde el descubrimiento de Scorpius X-1 (binaria de rayos X localizada en la constelación de Escorpio) en radio (Ables, 1969), se sabe que algunas binarias de rayos X son fuertes fuentes variables de emisión no térmica. Se sospechaba de la eyección de nubes emisoras de radiación sincrotrón por ese entonces, pero la verdadera confirmación de los jets en radio recién llegó con la observación de SS433.

En los últimos años se ha descubierto que eyecciones colimadas pueden producirse en muchos entornos estelares cuando un disco de acreción está presente. Se sabe que jets emanan de objetos tan diversos como estrellas muy jóvenes, núcleos de nebulosas planetarias, y enanas blancas acretantes que aparecen como fuentes de rayos X muy suaves (*supersoft*). Estos tipos de jet estelar tienen velocidades no relativistas y su emisión asociada es predominantemente térmica. En todos los tipos de fuentes de jets se cree que un disco de acreción está presente.

Jets con velocidades que pueden ser consideradas relativistas  $v \geq 0,1c$ , son observados en binarias de rayos X que contienen un objeto compacto: una estrella de neutrones o un agujero negro.

## 1.2. ¿Qué es un microcuásar?

Observaciones en los dos extremos del espectro electromagnético, en el dominio de los rayos X duros por un lado (Sunayaev et al., 1991; Paul et al., 1991), y en el dominio de las ondas de radio por el otro, revelaron la existencia de nuevas fuentes estelares de jets relativistas conocidas como microcuasares (Mirabel et al., 1992; Mirabel & Rodríguez, 1998; Mirabel & Rodríguez, 1999). Éstos son objetos compactos de masa estelar en nuestra galaxia que presentan, a escala reducida, muchos de los fenómenos vistos en quásares.

Parece extraño que los jets relativistas se hayan descubierto antes en los núcleos de galaxias y quásares distantes, y que durante más de una década SS433 haya sido el único objeto conocido de su clase en nuestra galaxia (Margon, 1984). La razón es que los discos en el entorno de agujeros negros supermasivos emiten fuertemente en el óptico y en el ultra violeta. De hecho, cuanto más masivo sea el agujero negro, más frío es el disco de acreción que lo rodea. Mientras los discos de acreción en AGNs (núcleos galácticos activos) emiten fuertemente en el óptico y en el ultravioleta con líneas anchas de emisión distintivas, los agujeros negros y estrellas de neutrones binarios usualmente son identificados por primera vez mediante su emisión en rayos X. Entre estas fuentes en SS433 inusualmente se dan sus líneas ópticas anchas de emisión y su brillo en el visible. Hubo que esperar entonces que la astronomía de rayos X se desarrollara para poder descubrir nuevas fuentes estelares de jets relativistas.

Los microquásares combinan dos aspectos relevantes de la astrofísica relativista: agujeros negros acretantes (de origen estelar) identificados por la producción de rayos X duros de los discos de acreción que los rodean, y jets de partículas relativistas que son observados a través de su emisión sincrotrón.

Los microquásares son entonces sistemas binarios formados por una estrella y un objeto compacto (agujero negro o estrella de neutrones). Si la estrella es de la secuencia principal de baja masa, estamos ante un microquásar de baja masa; si la estrella, en cambio, es de tipo temprano de gran masa, estamos ante un microquásar de gran masa.

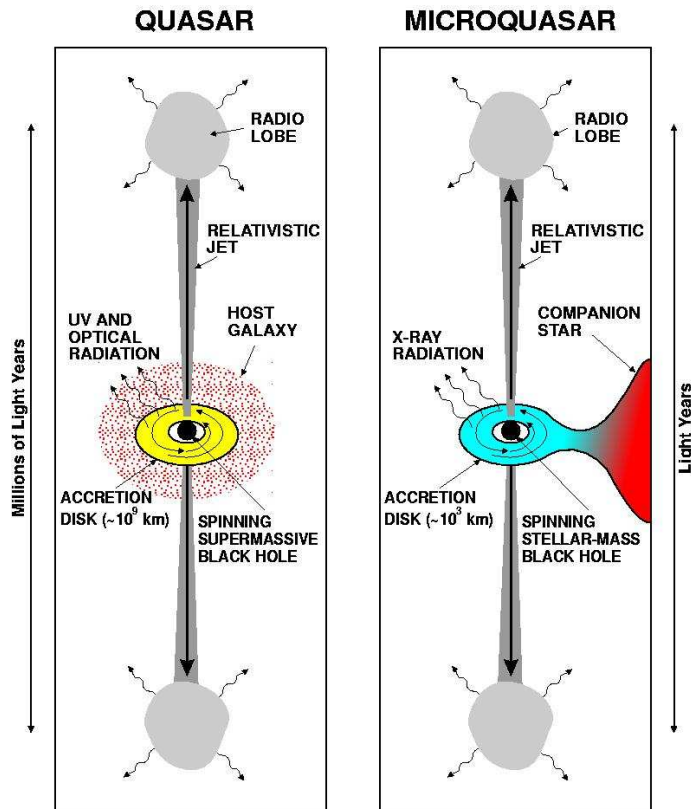


Figura 1.1: Similitudes, a diferentes escalas, entre un quásar y un microquásar (Mirabel & Rodríguez 1998)

### 1.2.1. Distribución espacial

Actualmente cerca de 250 binarias de rayos X se conocen en nuestra galaxia, posiblemente representando una población subyacente de más de 1000 objetos. La Figura 1.2 presenta la distribución espacial de binarias de rayos X conocidas. Estas se pueden separar en dos poblaciones: las binarias de rayos X de baja masa que se cree son más viejas y están concentradas cerca del bulbo de la galaxia, y las binarias de rayos X más jóvenes, concentradas en los brazos espirales.

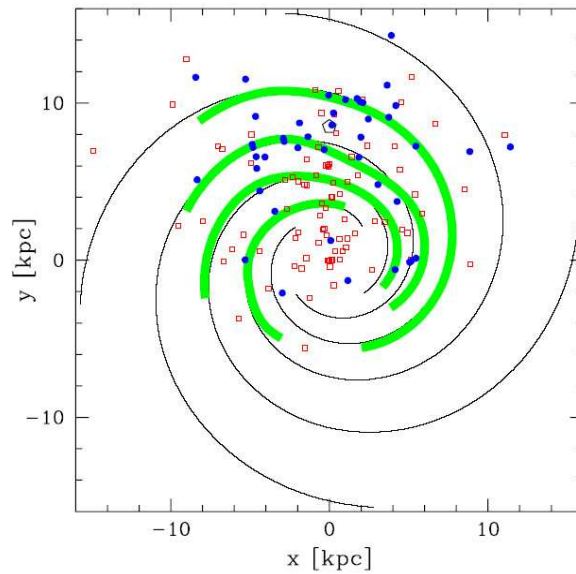


Figura 1.2: Distribución de las binarias de rayos X en nuestra galaxia (Grimm et al.,2002)

Basados en la definición de microquásar, cerca del 15% de las binarias de rayos X de nuestra galaxia definitivamente caen en esta clase. La Figura 1.3 presenta la distribución espacial de microquásares en nuestra galaxia. Actualmente se conocen cerca de 16 microquásares. Sin embargo, se cree que la producción de jets es común en el 70% de las binarias de rayos X (Fender & Maccarone, 2004). En este caso es apropiado considerar a los microquásares como un fenómeno asociado con las binarias de rayos X, antes que considerarlos como una subclase de objetos inusuales.

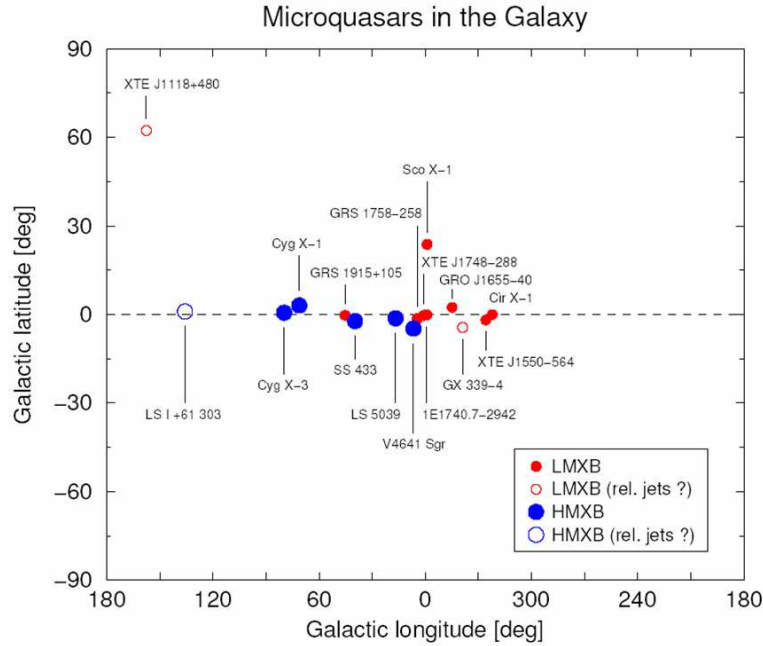


Figura 1.3: Distribución de microquásares en nuestra galaxia (Ribó, 2002)

### 1.2.2. Características generales

Los ingredientes básicos de un microquásar son: el objeto compacto, la estrella donante, el disco de acreción, los jets que usualmente son relativistas o medianamente relativistas y una región de plasma caliente llamada corona que rodea al objeto compacto.

Si la estrella compañera es de tipo espectral temprano (tipo O, B y WR, a veces supergigantes), estrella caliente, la acreción procede mediante la captura del material proveniente de los fuertes vientos estelares. En general las binarias de baja masa, y algunos otros sistemas cercanos, transfieren masa a sus compañeros mediante el derrame de material a través del lóbulo de Roche que desborda.

### 1.2.3. Estados espectrales

Los microquásares presentan distintos estados espectrales en rayos X. Los dos estados básicos son: el estado *high/soft* y el estado *low/hard*.

El estado *high/soft* esta dominado térmicamente. La distribución espectral de energía tiene

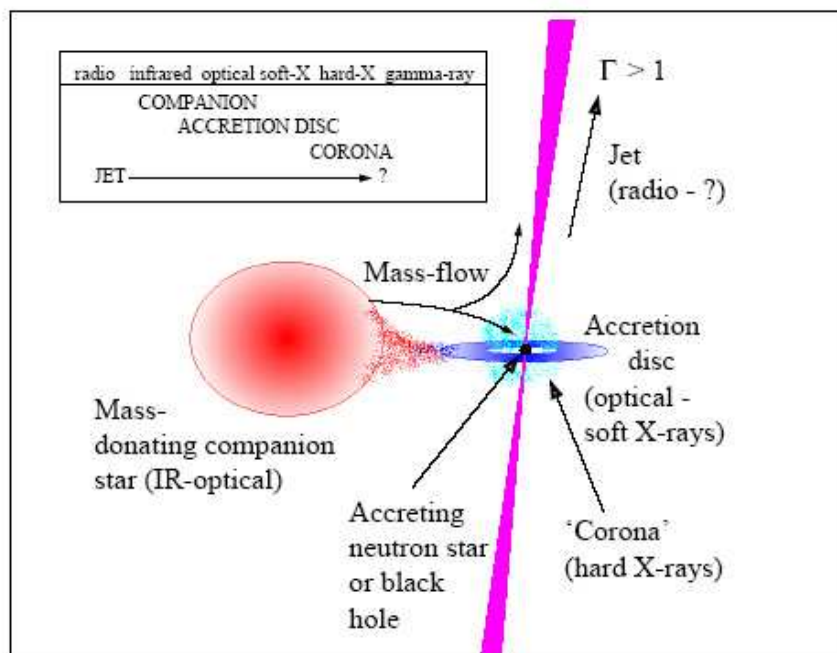


Figura 1.4: Componentes físicos de un microcuásar y sus rangos característicos de emisión (Fender & Maccarone, 2004)

un pico a energías del orden de 1 keV. En este estado, además se observa una contribución débil en forma de ley de potencia con un espectro muy blando (pendiente pronunciada), es decir que si  $n_{\text{ph}} \propto E^{-\Gamma}$ , entonces  $\Gamma > 2$ . Esta componente se cree originada en la corona. En este estado no se observan jets y la emisión en rayos X está dominado por el disco de acreción que se extiende hasta la última órbita estable.

El estado *low/hard* está dominado por la emisión no térmica. Este estado está caracterizado por una distribución espectral de energías en la cual la componente térmica está disminuida y corrida hacia energías más bajas. Hay ahora una fuerte contribución en forma de ley de potencia con un espectro mucho más duro, es decir  $\Gamma < 1.6$  que llega a energías del orden de los 150 keV. Esta emisión es usualmente interpretada como la comptonización de rayos X blandos en la corona (Ichimaru, 1977), aunque se ha sugerido que pueden producirse en el jet a través de interacciones externas Compton inverso (Georganopoulos et al., 2002) o a través del mecanismo sincrotrón (Markoff et al. 2001, 2003).

En el estado *low/hard* se observa un jet que emite radiación sincrotrón hasta bajas frecuen-

cias de radio. El papel de la corona es ahora más importante y el disco de acreción en esta configuración parece estar truncado a cierta distancia del objeto compacto.

Los microcuásares permanecen la mayor parte del tiempo en el estado *low/hard*. El cambio al estado *high/soft* suele ser rápido y va acompañado de la eyección de componentes o plasmones relativistas.

Estrellas de neutrones binarias presentan un comportamiento similar, también con eyecciones relativistas, pero con luminosidades en radio más bajas.

Algunos microcuásares parecen eludir tales estados espectrales y presentan jets persistentes en radio y bajas luminosidades en rayos X todo el tiempo. Los jets son cortos y de potencia moderada. En estos casos se sospecha que el objeto compacto del sistema es una estrella de neutrones (e.g. Sco X-1, Cin X-1).

### 1.3. Jets

El mecanismo de formación de los jets no está claramente establecido. Es muy probable que los campos magnéticos asociados al disco de acreción jueguen un papel importante en el lanzamiento y colimación del plasma relativista. El fluido puede comenzar como un plasma térmico que se mueve a velocidades relativistas macroscópicas. Las ondas de choque generadas por colisiones supersónicas de plasma pueden transformar la energía cinética macroscópica en energía de las partículas, que al tornarse relativistas se enfrían por radiación sincrotrón e interacción Compton inverso.

Los jets parecen estar autoabsorbidos debido a que su espectro en radio suele ser chato o invertido: con un índice espectral  $\alpha \geq 0$  donde la relación entre densidad de flujo y frecuencia está dada por  $S_\nu \propto \nu^\alpha$ .

### 1.3.1. El material del jet

El material del cual está conformado el jet de los microquásares es una de las cuestiones abiertas más importantes que concierne a éstos objetos.

Se sabe a ciencia cierta que están presentes en el jet leptones relativistas con distribuciones tipo ley de potencia, ya que se los puede detectar a través de su emisión sincrotrón en radio. El jet puede estar conformado de pares electrón-positrón o puede ser un plasma relativista de protones y electrones. Otra posibilidad es un plasma constituido por un fluido frío de electrones y protones, donde las partículas tengan una distribución térmica, más un contenido relativista, acelerado localmente por shocks (Bosch-Ramon, Romero & Paredes, 2006). En este tipo de jets el grueso del momento es llevado por el plasma frío, que adicionalmente confina a la componente relativista.

Las perturbaciones observadas en el medio interestelar en el entorno de algunos microquásares sugieren la presencia de bariones en los jets (e.g. Gallo et al., 2005). Como parece haber una clara correlación entre la acreción y la eyección de materia en los microquásares, es natural suponer que el contenido de los jets no difiere en su naturaleza del contenido de la materia acreta. Estas consideraciones hacen muy probable la presencia de protones relativistas en los jets, de modo que sus rastros radiativos no pueden ser ignorados en un análisis serio de los procesos de emisión en estas fuentes. Líneas ópticas, en infrarojo (IR) y rayos X en el sistema SS433 han permitido inferir la presencia de iones en su jet (Margon, 1984).

### 1.3.2. Interacciones en el jet

Cuando el jet relativista pasa a través del medio que rodea a una estrella caliente, los fotones ultravioletas dominantes interactúan con las partículas relativistas del fluido produciendo emisión de alta energía. La interacción del viento estelar con el jet forma una capa límite donde es probable la formación de shocks, aunque se espera un cierto grado de mezcla de los fluidos. Las interacciones del jet con los fotones de la estrella pueden separarse en dos grupos según sean de naturaleza leptónica o hadrónica, ambos tipos de reacciones ocurrirán pero uno dominará la emisión de alta energía sobre el otro, dependiendo de las condiciones específicas.



- Interacciones leptónicas: Los fotones de baja energía sufrirán dispersión Compton inverso con los electrones y positrones presentes en el jet ganando energía. Los fotones de baja energía tienen un origen diverso: fotones ultravioletas provenientes de la estrella, fotones X del disco de acreción y de la corona de plasma caliente que rodea al objeto compacto, o fotones no térmicos producidos en el mismo jet mediante el mecanismo sincrotrón. En la Figura 1.5 se ven los campos externos de fotones a los que está expuesto el jet. Efectos de opacidad sobre la propagación de rayos  $\gamma$  debido a la presencia de los campos de fotones locales pueden resultar en la generación de cascadas Compton Inverso (Bednarek, 1997; Orellana et al. 2007). Los leptones relativistas pueden interactuar con protones fríos y núcleos del viento estelar, produciendo emisión de alta energía a través de radiación de frenado (Bremsstrahlung) relativista.
- Interacciones hadrónicas: La reacción principal que sufrirá un protón en un microcuásar de gran masa es la colisión inelástica con otro protón ( $pp$ ), los canales de la interacción son:  $pp \rightarrow p+p+\xi^0\pi^0$  y  $pp \rightarrow p+p+\xi^\pm(\pi^++\pi^-)$  con  $\xi$  la multiplicidad de los piones. Los piones neutros decaen en rayos  $\gamma$  a través de  $\pi^0 \rightarrow \gamma+\gamma$ , mientras que los piones cargados producen neutrinos, electrones y positrones:  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm\nu_\mu\bar{\nu}_\mu \rightarrow e^\pm\nu_e\bar{\nu}_e$ . El espectro en rayos  $\gamma$  sigue a la distribución del espectro de la población de los protones relativistas.

Existe evidencia de que el viento estelar no es siempre homogéneo y tiene estructura, por ejemplo en forma de grumos (*clumps*), un hecho que daría lugar a emisión  $\gamma$  variable en escalas de tiempo cortas (Romero et al., 2007; Owocki et al, 2009). Si se detectara esta variabilidad podría usarse para inferir la estructura del viento. El jet actuaría como una especie de farol que ilumina el viento en rayos  $\gamma$  hacia el observador.

Los jets pueden propagarse a través del medio interestelar produciendo regiones de emisión internas al frenarse, similares a los observados en fuentes extragalácticas. Las partículas re-aceleradas en la terminación del jet pueden difundirse en el medio interestelar, interactuando con material difuso, produciendo fuentes extendidas de alta energía (Bosch-Ramon et al., 2005).

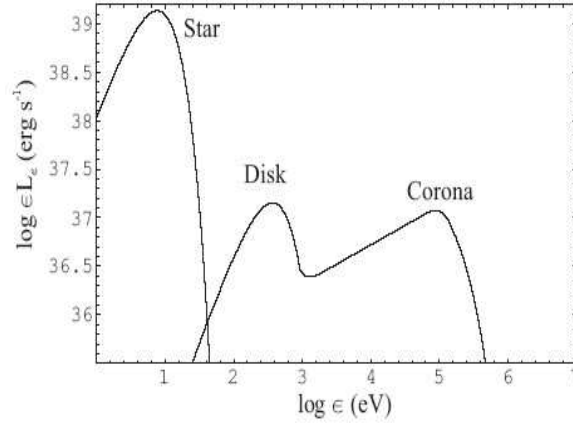


Figura 1.5: Potencia típica de los campos de fotones externos a los que está expuesto el jet para el caso de Cygnus X-1 (Romero et al., 2002)

## 1.4. Emisión

La estrella donante puede producir radiación desde el infrarrojo al ultravioleta. El disco de acreción produce rayos X blandos ( $\sim \text{keV}$ ), mientras que la corona es responsable de los rayos X duros ( $\sim 100 \text{ keV}$ ) que muy probablemente sean el producto de la comptonización de los fotones del disco (e.g. Poutanen, 1998; McClintock & Remillard, 2004). La emisión del jet va desde la longitud de onda de radio a los rayos  $\gamma$  en algunos casos. Así, los microquásares pueden emitir a lo largo de todo el espectro electromagnético. Su distribución espectral es compleja ya que es el resultado de la suma de diferentes procesos radiativos que ocurren a diferentes escalas espaciales.

Estos sistemas emiten en rayos X como resultado de procesos de acreción de la materia de la estrella compañera. Muchos escenarios se han propuesto para explicar esta emisión en rayos X, dependiendo de la naturaleza del objeto compacto, su campo magnético, en el caso de una estrella de neutrones, y la geometría del flujo acretante. La materia acretada es acelerada a velocidades relativistas, transformando energía potencial provista por el intenso campo gravitatorio del objeto compacto en energía cinética (ver por ejemplo Frank, King & Raine, 2002). Suponiendo que esta energía cinética es radiada finalmente, la luminosidad de acreción puede calcularse. Se encuentra que este mecanismo provee una fuente muy eficiente de energía, más eficiente que la correspondiente a reacciones nucleares.

En estos sistemas hay una correlación universal entre las luminosidades en radio y en rayos X de la forma:  $L_{\text{radio}} \propto L_{\text{X}}^b$  con  $b \sim 0.7$ .

El mecanismo más eficiente conocido para la producción de emisión intensa en radio en fuentes astronómicas es el mecanismo sincrotrón, en el cual la interacción de electrones relativistas con campos magnéticos da lugar a emisión linealmente polarizada. La emisión en radio observada puede explicarse asumiendo una población no-térmica de electrones relativistas, usualmente con una distribución de energía tipo ley de potencia, interactuando con campos electromagnéticos.

Los microcuásares tienen todos los elementos para producir rayos  $\gamma$ : chorros salientes de partículas relativistas, campos fuertes de fotones que pueden actuar como blanco para electrones y positrones energéticos, y también densos campos de materia en forma de vientos estelares que puede interactuar con hadrones relativistas para producir piones neutros, rayos  $\gamma$ , y neutrinos mediante el decaimiento de piones cargados (ver Romero 2005, y 2008 para revisiones recientes).

Hasta el momento sólo hay cuatro binarias de rayos X detectadas en energías del orden del TeV. Tres de ellas, PSR B1259-63, LS I +61 303 y LS 5039, han sido detectadas en varios puntos de sus órbitas y muestran una emisión variable. En PSR B1259-63 se cree que la emisión de altas energías se produce por la interacción del viento relativista proveniente de un pulsar joven no acretante con el viento de la estrella compañera. Este escenario se vé confirmado por la detección de las pulsaciones en radio. En los casos de LS 5039 y LS I +61 303 la situación no esta muy clara aún (para discusiones al respecto ver Romero et al., 2007; Romero, 2008).

La otra fuente, Cygnus X-1, se ha detectado sólo una vez durante un *flare* y el exceso de emisión se detectó cuando la fase orbital del sistema tomaba un valor de 0,91. Este último sistema, que ha sido el caso de estudio de esta tesis, será descrito en el próximo capítulo.



# Capítulo 2

## Cygnus X-1

### 2.1. Características

Cygnus X-1 es una de las fuentes de rayos X más estudiadas desde su descubrimiento por Bowyer et al. (1965). Es el candidato mejor establecido para contener un agujero negro estelar en la Galaxia y es una de las fuentes de rayos X más luminosas del cielo, radiando un máximo de luminosidad en X de  $10^{37}$  erg s<sup>-1</sup>. Cygnus X-1 es un microcuásar de gran masa, formado por una estrella supergigante y un agujero negro.

El sistema binario se encuentra a una distancia de  $2.2 \pm 0.2$  kpc. El agujero negro de  $21 \pm 8 M_{\odot}$  orbita en torno a una estrella de tipo espectral O9.7 Iab de  $40 \pm 10 M_{\odot}$  (Ziólkowski, 2005). La órbita es circular con un período de 5.6 días. Lamentablemente la inclinación está acotada en el amplio rango entre 25 y 65 grados (Gies & Bolton, 1986).

La fuente de rayos X es mayormente potenciada por la acreción del fuerte viento estelar de la estrella supergigante. De hecho, Cygnus X-1 probablemente represente un estado intermedio entre acreción pura del viento esféricamente simétrico, y acreción a través del lóbulo de Roche.

Observaciones en el óptico indican que el viento parte de una geometría esférica y que existe un viento “focalizado” en la dirección del objeto compacto. La intensa emisión en rayos X se cree producida por el disco de acreción y la corona.

La fuente presenta los típicos estados espectrales en rayos X, *low/hard* y *high/soft* de acuerdo a la tasa de acreción de masa de (Esin et al., 1998). Cygnus X-1 pasa la mayor parte del tiempo en el estado *hard*. Este último está caracterizado por un espectro tipo ley de potencia con índice espectral  $\Gamma \sim 1.6$  (e.g. Gierliński et al., 2001) con un *cutoff* exponencial, más una componente tipo cuerpo negro (Poutanen et al., 1997).

Durante el estado *high/soft* domina la componente tipo cuerpo negro y tiene un índice espectral  $\Gamma \sim 2.8$  (Frontera et al., 2001). El disco se acerca al agujero negro y entonces la mayoría de la energía disipada ocurre a través de sus regiones internas. Debido a que Cygnus X-1 pasa sólo una pequeña fracción de tiempo en el estado *soft*, este estado está relativamente menos estudiado en comparación con el estado *hard*.

Como se ha mencionado antes, la componente tipo cuerpo negro se cree proveniente de un disco de acreción ópticamente grueso, mientras que la componente tipo ley de potencias es producida por la comptonización de fotones del disco en una corona caliente ( $T \sim 10^9 K$ ) ópticamente delgada (Poutanen et al., 1997; Dove et al., 1997). La corona caliente llenará los radios gravitacionales más internos en torno al agujero negro. El disco de acreción penetra sólo marginalmente en esta región coronal.

Durante el estado *low/hard* se coliman jets compactos y aproximadamente estacionarios cuando el radio más interno del disco se cree truncado. Los jets en radio fueron descubiertos en Cygnus X-1 por Stirling et al. (2001) (ver también Fender, 2001). La imagen obtenida fue la primer imagen directa de un jet estacionario en radio de una fuente en el estado *low/hard*. Durante el estado *high/soft* el jet no está presente. Cygnus X-1 manifiesta un jet compacto relativista, de espectro chato y flujo  $S_\nu \sim 15 \text{ mJy}^1$  (un solo jet) con  $v > 0.6c$ . Romero et al. (2002) han sugerido que Cygnus X-1 es un microblazar, donde el eje del jet está ligeramente alineado con la visual. Se volverá a esto más adelante.

Cada algunos años Cygnus X-1 hace una transición del estado *low/hard* al estado *high/soft*, y permanece en este estado durante semanas a meses antes de regresar al estado *low/hard*. Hay muchas teorías acerca de las causas de las transiciones (Chakrabarti & Titarchuk, 1995; Poutanen et al., 1997; Meyer et al., 2000; Wen et al., 2001; Young et al., 2001; Robertson & Leiter,

---

<sup>1</sup>mJy=10<sup>-9</sup>erg cm<sup>-2</sup>Hz<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>

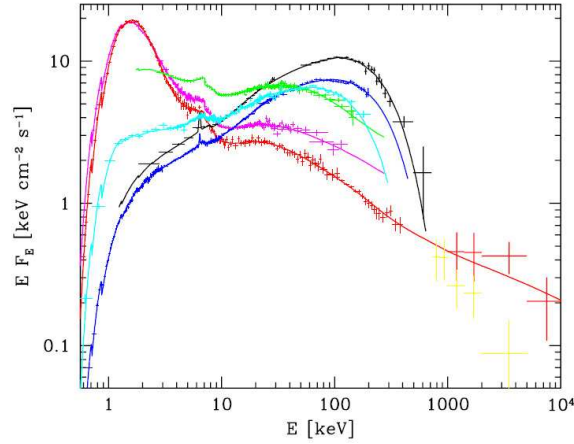


Figura 2.1: Estados espectrales de Cygnus X-1 (Zdziarski et al., 2002)

2002) que generalmente son atribuidas a las condiciones físicas del gas que envuelve al agujero negro. Por ejemplo, Esin et al. (1998) describen las transiciones en términos de un modelo de flujo de acreción dominado por la advección (ADAF) en el cual las transiciones son debidas a cambios en el radio interno del disco kepleriano geoméricamente delgado y ópticamente grueso.

Las transiciones al estado *high/soft* se creen debidas al resultado de un moderado incremento en la tasa de acreción. Sin embargo, no hay evidencia observacional clara disponible para respaldar la demanda de un aumento en la transferencia de masa durante el estado *high/soft*.

Se ha observado un jet transitorio extendido (70 mas) en radio frecuencias (Fender et al., 2006). El jet fue observado mientras el sistema sufría frecuentes cambios de estado en rayos X. El espectro se encontraba en su estado más blando 1.5-12 keV. Se infiere una velocidad  $v \geq 0,3c$  para el jet.

Un anillo de emisión en radio, de  $\sim 1$  millón de UA de diámetro, se observa en las inmediaciones de Cygnus X-1 (Martí et al., 1996). Esta estructura parece marcar el límite con la nebulosa cercana Sh2-101 (Sharpless, 1959). Gallo et al. (2005) interpretaron que en analogía con fuentes de jet extragalácticas, el anillo de Cygnus X-1 puede ser el resultado de un fuerte choque que se desarrolla en el lugar donde el jet colimado impacta con el medio interestelar (ISM). Las partículas del jet alimentan un lóbulo en radio (*radio lobe*) que esta siendo sobre presionado respecto a sus alrededores, por tanto el lóbulo se expande hacia los costados formando

una burbuja esférica de ISM comprimido por el choque, que se observa como un anillo debido a su naturaleza ópticamente delgada.

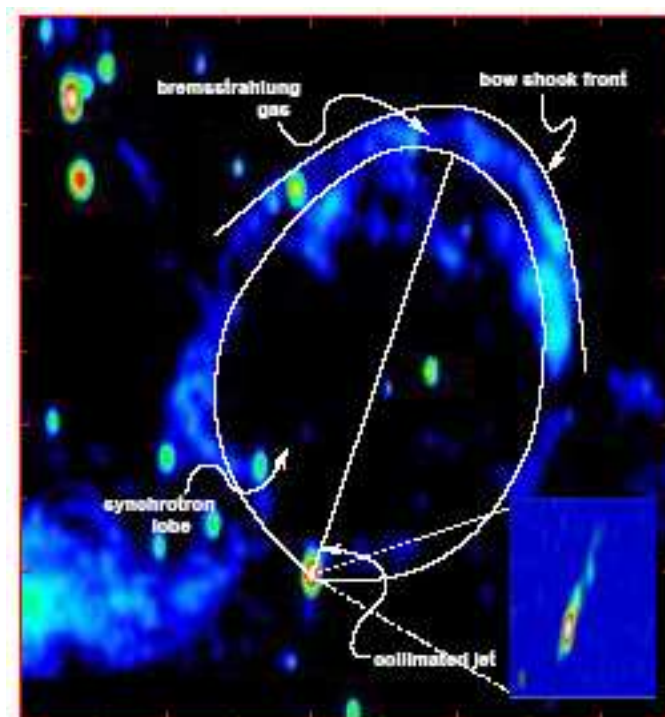


Figura 2.2: Imagen en 1.4 GHz de Gallo et al. (2005). El recuadro muestra una ampliación del jet de Cygnus X-1

Actuando como un calorímetro, el ISM permite una estimación del producto *potencia × edad* del jet que es, en principio, independiente de las incertidumbres asociadas al espectro del jet y su eficiencia radiativa (Burbidge, 1959). Teniendo en cuenta esto se calcula que la potencia cinética total del jet de Cygnus X-1 es  $\sim 9 \times 10^{35} < P_{\text{jet}} < 10^{37} \text{ ergs}^{-1}$  (Gallo et al., 2005). La potencia total llevada por el jet es una fracción significativa  $f \simeq 0.03\text{-}0.5$  de la luminosidad integrada en rayos X.

La falta de una contraparte para el anillo puede explicarse en términos de una densidad de partículas mucho más baja en la dirección opuesta a Cygnus X-1. Tales inhomogeneidades no son inusuales en regiones densas de formación estelar como la asociación Cygnus, respaldando la hipótesis de que el anillo es el resultado de la interacción entre el lóbulo de radio y la cola de la nebulosa HII. Si así fuese, la contraparte del jet estaría viajando sin ser perturbado a mayores distancias, gradualmente expandiéndose y liberando enormes cantidades de energía cinética. La



detección del anillo de Cygnus X-1 parece ser excepcional, hecha posible por su proximidad a la nebulosa III.

Cygnus X-1 es un objeto en permanente estudio, y la comprensión de los fenómenos físicos que tienen lugar en el sistema se encuentran en constante evolución. Aún cuando se trata de un sistema extensamente estudiado, existe una variedad de fenómenos por descubrir y por explicar de esta fuente que no deja de sorprender con cada nueva observación. Ejemplo de esto es su reciente detección en muy altas energías.

## 2.2. Detección en muy alta energía

Albert et al. (2007) reportaron observaciones de Cygnus X-1 en muy alta energía  $E_\gamma > 100$  GeV utilizando el telescopio Cherenkov MAGIC, *Major Atmospheric Gamma Imaging Cherenkov telescope*, entre junio y noviembre de 2006 <sup>2</sup>. No se detectó emisión persistente, sino un *flare* de escala temporal menor a un día. Esta es la primer evidencia experimental de emisión en muy altas energías de un agujero negro de masa estelar, y además de una binaria de rayos X acretante.

El *flare* ocurrió simultáneamente a otro en rayos X duros detectado por los satélites INTEGRAL, Swift/BAT y RXTE/ASM. La Figura 2.3 muestra la correlación entre las curvas de luz de MAGIC, Swift/BAT (de <http://swift.gsfc.nasa.gov/docs/swift/results/transients/>) y RXTE/ASM (de [http://heasarc.gsfc.nasa.gov/xte\\_weather](http://heasarc.gsfc.nasa.gov/xte_weather)). De esta figura puede interpretarse que rayos X duros y blandos se producen en diferentes regiones durante la observación. Más aún, rayos X duros y rayos  $\gamma$  de muy alta energía pudieron haberse producido en regiones ligadas al jet, es decir los rayos X en la base del jet, y los rayos  $\gamma$  en una región de interacción entre el jet y el viento estelar. Estos procesos tienen diferentes escalas de temporales, produciendo un corrimiento en el tiempo entre los máximos en X y en rayos  $\gamma$ . El exceso de emisión en TeV ocurrió cuando la fase tomaba un valor de 0,91, siendo 1 el momento en el cual el objeto compacto se encuentra por detrás de la estrella respecto al observador.

---

<sup>2</sup>El arreglo MAGIC esta ubicado en La Palma, Islas Canarias

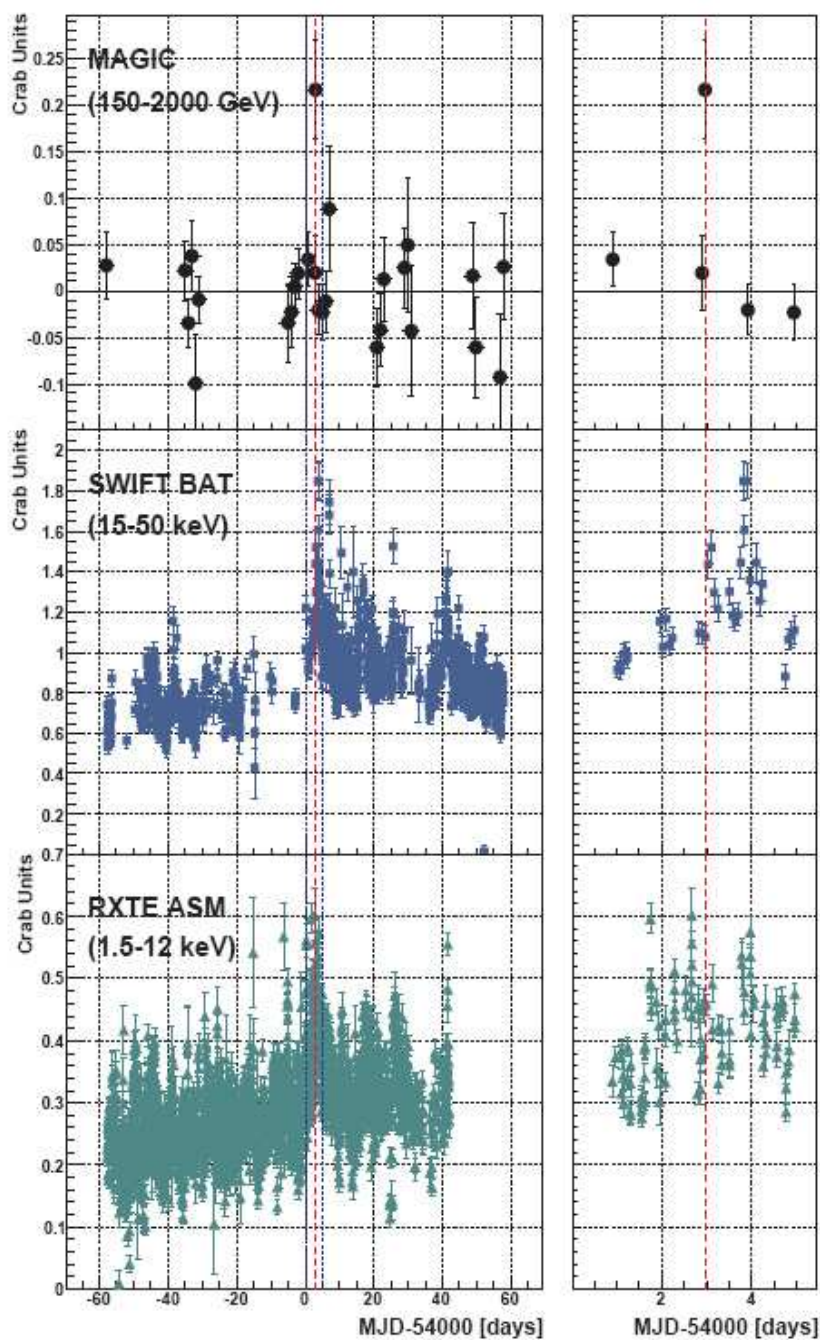


Figura 2.3: Flujos medidos de Cygnus X-1 en función del tiempo. Los paneles izquierdos muestran todo el tiempo utilizado por las observaciones de MAGIC. Las líneas punteadas verticales azules delimitan la región ampliada en los paneles a la derecha. Las líneas punteadas horizontales rojas marcan el tiempo de la señal de MAGIC (Albert et al., 2007)

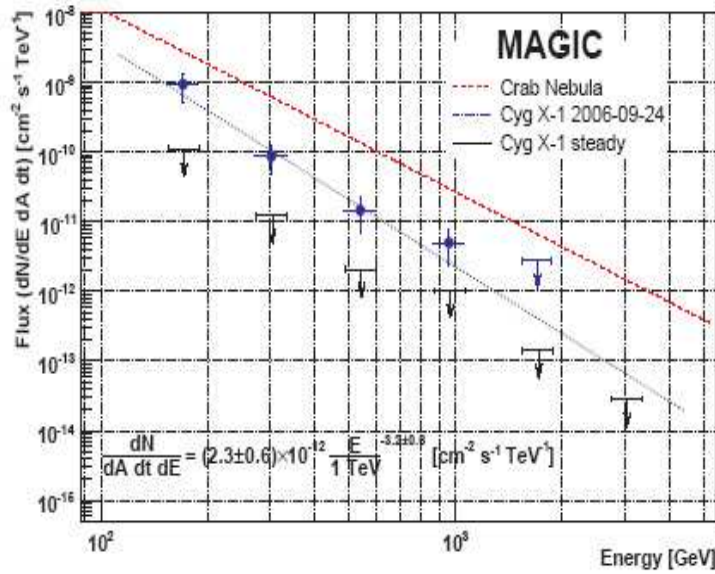


Figura 2.4: Espectro de energía de Cygnus X-1. También se muestra el espectro de la nebulosa del Cangrejo y el mejor ajuste de los datos por una ley de potencia (Albert et al., 2007)

En la Figura 2.4 se observa el espectro de energía que ha sido ajustado por una ley de potencia sin indicios de *cutoff*

$$\frac{dN}{(dA dt dE)} = (2,3 \pm 0,6) \times 10^{-12} \left( \frac{E}{1 \text{ TeV}} \right)^{-3,2 \pm 0,6} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ TeV}^{-1}. \quad (2.1)$$

La ubicación del exceso en rayos  $\gamma$  permite descartar que la emisión se produzca en el choque con el ISM pero carece de resolución suficiente como para discriminar una región del tamaño del sistema binario o menos. En modelos para la emisión “estacionaria” de microcuásares de gran masa lo normal es que la producción de fotones TeV se concentre cerca del objeto compacto, en la base de los jets (e.g. Romero & Vila, 2008).

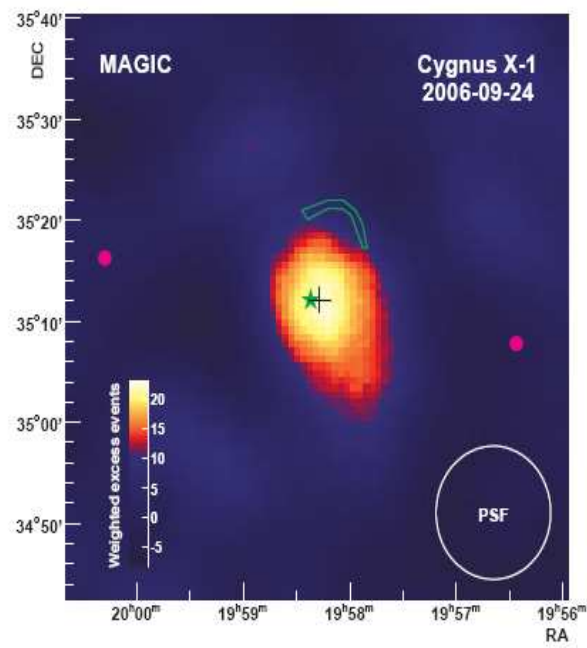


Figura 2.5: Mapa de la región de Cygnus X-1 durante el máximo del destello en rayos  $\gamma$  (Albert et al., 2007).

## Capítulo 3

# Aniquilación $\gamma$ - $\gamma$

### 3.1. Introducción

Los rayos  $\gamma$  creados en una fuente astrofísica pueden ser absorbidos de diversas maneras. Los principales mecanismos de absorción son la creación de pares en el campo Coulombiano de un núcleo, y la creación de pares por aniquilación de fotones. A bajas energías, la radiación  $\gamma$  es absorbida mediante el efecto Compton y a energías muy altas en presencia de campos magnéticos intensos los fotones también pueden ser absorbidos mediante la creación de pares.

Si la intensidad inicial en rayos  $\gamma$  que emite la fuente es

$$I_{\gamma}^0(E_{\gamma}), \quad (3.1)$$

luego de atravesar una dada distancia, suponiendo que no operan otros procesos que generan emisión de fotones con energía  $E_{\gamma}$ , la intensidad resulta

$$I_{\gamma}(E_{\gamma}) = I_{\gamma}^0(E_{\gamma})e^{-\tau(E_{\gamma})}, \quad (3.2)$$

donde  $\tau$  es la profundidad óptica (u opacidad o coeficiente de absorción) del medio.

En un microcuásar de gran masa el campo de radiación de la estrella provee fotones para la producción de pares de partículas mediante la aniquilación con los fotones  $\gamma$ . Por tanto, la creación de pares es naturalmente el mecanismo de absorción más eficaz y dominante en el sistema.

Bajo las condiciones adecuadas los mecanismos de absorción y emisión pueden operar en forma eficiente dando lugar a la producción de cascadas electromagnéticas lo cual puede modificar

considerablemente el espectro original de rayos  $\gamma$  (para un tratamiento detallado ver Orellana, 2007). Electrones con energías del orden del TeV en el campo radiativo estelar conducirían a esta situación. Para que las pérdidas energéticas para electrones de energías del orden del TeV en el régimen de KN sean dominantes, el campo magnético del sistema debe ser menor a un valor crítico  $B_c$ .

### 3.2. Aniquilación $\gamma$ - $\gamma$ por creación de pares en un campo de radiación

Considérese la colisión entre un fotón de muy alta energía (energía  $E_\gamma$ ) y un fotón de energía más baja (energía  $\epsilon$ ):

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-. \quad (3.3)$$

Para que la materialización del par sea posible, las energías deben satisfacer

$$E_\gamma \epsilon > 2(m_e c^2)^2 \quad (3.4)$$

si la colisión es frontal.

La sección eficaz del proceso es

$$\sigma_{\gamma\gamma}(E_\gamma, \epsilon) = \frac{\pi r_e^2}{2} (1 - \beta^2) \left[ 2\beta(\beta^2 - 2) + (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right] \quad (3.5)$$

donde

$$\beta = \left[ 1 - \frac{(m_e c^2)^2}{E_\gamma \epsilon} \right]^{1/2}. \quad (3.6)$$

En el Apéndice A se esboza una demostración de esta fórmula.

La Figura 3.1 muestra la sección eficaz  $\gamma$ - $\gamma$  en función de las energías  $E_\gamma$  y  $\epsilon$ . El denso campo de radiación de la estrella temprana en un sistema binario de rayos X puede absorber la emisión de alta energía a través de la producción de pares (Gould & Scheréder, 1967). Para el rango de temperaturas 20.000-40.000 K la energía de los fotones blanco típicos es de unos pocos eV que se encuentra en el rango de energía para la producción de pares con rayos  $\gamma$  de energías del orden del TeV. El máximo de la sección eficaz ocurre cerca de dicha energía.

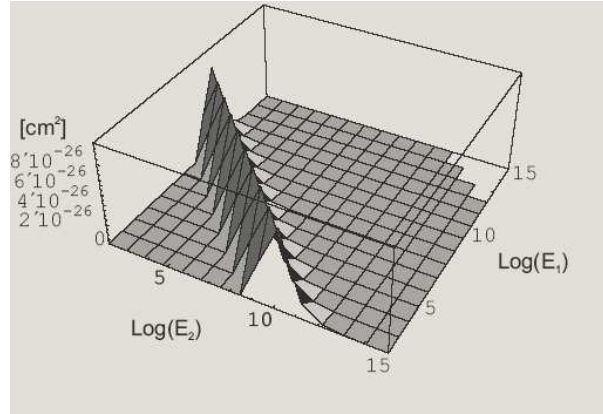


Figura 3.1: Sección eficaz  $\gamma$ - $\gamma$  en función de la energía de los fotones involucrados. Con  $E_1$  y  $E_2$  siendo  $E_\gamma$  y  $\epsilon$  respectivamente.

La opacidad  $\gamma\gamma$ , al ser en rigor una integral de trayectoria, depende fuertemente de la geometría. Depende entonces del camino que recorren los rayos  $\gamma$  en la línea de la visual a través del campo de radiación.

### 3.3. Absorción $\gamma$ - $\gamma$ en un microquásar de gran masa

La absorción de un rayo  $\gamma$  de energía  $E_\gamma$  por un fotón de la estrella de energía  $\epsilon$  ocurre sobre un mínimo de energía dado por

$$E_\gamma \epsilon > \frac{2(m_e c^2)^2}{(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star)}, \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{e}_\gamma$  es un vector unitario en la dirección de propagación del rayo  $\gamma$ ;  $\mathbf{e}_\star$  es el vector unitario en la dirección de propagación del fotón estelar.

La opacidad depende del espectro de los fotones blanco y la dependencia angular tiene un efecto significativo. Por tanto, rayos  $\gamma$  propagándose en dirección paralela a los fotones blanco no son absorbidos y la energía umbral se hace infinita. El decaimiento en la densidad del campo de radiación cuando se integra sobre el camino del fotón también reduce la opacidad total. A lo largo de este camino, el campo de radiación es fuertemente anisotrópico.

La opacidad diferencial vista por un rayo  $\gamma$  localizado en la posición P y viajando en la

dirección  $\mathbf{e}_\gamma$  debida a fotones de energía  $\epsilon$  emitidos en S en la dirección  $\mathbf{e}_\star$  es (ver Figura 3.2):

$$d\tau_{\gamma\gamma} = (1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star) n_\epsilon \sigma_{\gamma\gamma} d\epsilon d\Omega dl, \quad (3.8)$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido de la superficie que emite los fotones,  $n_\epsilon$  es la densidad específica de radiación en  $\text{cm}^{-3}\text{erg}^{-1}\text{sr}^{-1}$ . La sección eficaz  $\gamma\gamma$  depende sólo de  $s$ , definida como (Gould & Schéder, 1967):

$$s = \frac{E_\gamma \epsilon}{2m_e^2 c^4} (1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star), \quad (3.9)$$

y los fotones interactúan sólo si  $s > 1$ . La variable  $s$  puede reescribirse como  $s = \epsilon / \epsilon_{min}$  definiendo

$$\epsilon_{min} = \frac{2(m_e c^2)^2}{(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star) E_\gamma}. \quad (3.10)$$

La estrella masiva domina por completo la distribución espectral del campo radiativo a bajas energías, de modo que cualquier otra fuente de radiación para producción de pares con rayos  $\gamma$  es despreciada. La estrella tiene un radio  $R_\star$  y se asume que tiene una densidad de radiación de cuerpo negro de temperatura  $T_\star$  dada por

$$n_\epsilon = \frac{2\epsilon^2}{h^3 c^3} \frac{1}{(\exp(\epsilon/kT_\star) - 1)} \text{ph cm}^{-3}\text{erg}^{-1}\text{sr}^{-1}. \quad (3.11)$$

Para saber si cascadas electromagnéticas eficientes pueden ocurrir en el sistema es necesario estimar el campo magnético en las inmediaciones del emisor de la radiación  $\gamma$ , es decir el campo magnético estelar. Los campos magnéticos medidos en estrellas masivas arrojan valores mayores a  $B_c$ . Además, aún en los casos más extremos, puede considerarse que  $B > B_c$  (Bosch-Ramon et al., 2008). Por este motivo, al menos como primera aproximación, no se tiene en cuenta el efecto de las cascadas electromagnéticas en un microquásar de gran masa.

Siguiendo el tratamiento dado por Dubus (2006) se orienta el sistema de referencia centrado en la estrella de forma tal que el rayo  $\gamma$  se propague en el plano  $(x, z)$ , su ubicación y dirección están dados por  $\psi$  y  $d$  respectivamente (ver Figura 3.2). En función de los ángulos de la figura

$$(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star) = 1 + \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \cos \phi \sin \theta. \quad (3.12)$$



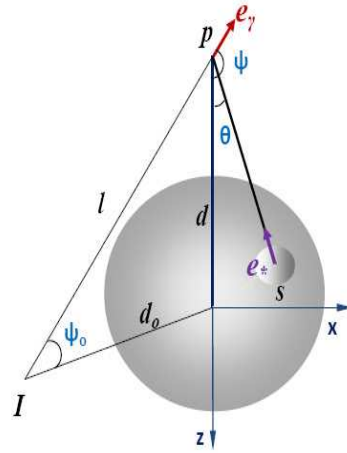


Figura 3.2: Geometría para la absorción de un rayo  $\gamma$  en la posición  $p$  debido a la creación de pares con fotones estelares emitidos en  $S$ . El rayo  $\gamma$  se emite en  $I$  y  $l$  es la longitud del camino que sigue el rayo  $\gamma$  hasta  $p$ .

El ángulo sólido del elemento de superficie de la estrella que emite fotones en la dirección  $\mathbf{e}_*$  es

$$d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta. \quad (3.13)$$

La longitud del camino que recorre el rayo  $\gamma$  desde que fue emitido a una distancia  $d_0$  a un ángulo  $\psi_0$  (punto  $I$  en la figura) está relacionado con  $\psi$  a través de la relación

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{d_0 \sin \psi_0}{d_0 \cos \psi_0 - l} \right) \text{ para } l < d_0 \cos \psi_0 \quad (3.14)$$

y será

$$\psi = \pi + \tan^{-1} \left( \frac{d_0 \sin \psi_0}{d_0 \cos \psi_0 - l} \right) \text{ para } l > d_0 \cos \psi_0. \quad (3.15)$$

La distancia  $d$  se relaciona con  $l$  mediante

$$d^2 = d_0^2 + l^2 - 2d_0l \cos \psi_0. \quad (3.16)$$

De modo que se tiene explícitamente la dependencia de  $d\tau_{\gamma\gamma}$  con  $E_\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , y  $l$ . La opacidad total para la propagación  $\gamma$  hasta un observador lejano resulta de integrar

$$\tau_{\gamma\gamma} = \int_0^\infty dl \int_{c_{\min}}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\epsilon_{\min}}^\infty \frac{d\tau_{\gamma\gamma}}{d\epsilon d\Omega} d\epsilon, \quad (3.17)$$

donde  $c_{\min} = (1 - R_\star^2/d^2)^{1/2}$ .

Es conveniente reescribir la integral en la energía como una integral definida en  $\beta = (1 - 1/s)^{1/2}$  en el intervalo  $[0, 1]$ . De manera similar, la integral en  $l$  puede transformarse en una integral definida en  $\psi$  entre  $[\psi_0, \pi]$  bajo la condición  $d_0 \sin \psi_0 \geq R_\star$  o el rayo  $\gamma$  choca contra la estrella.

Para cambiar la variable de  $\epsilon$  a  $\beta$ , donde  $\beta = (1 - 1/s)^{1/2}$  se necesita

$$\epsilon = \frac{2sm_e^2c^4}{E_\gamma(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star)}. \quad (3.18)$$

Se escribe

$$\beta = \left(1 - \frac{2m_e^2c^4}{\epsilon E_\gamma(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star)}\right)^{1/2}, \quad (3.19)$$

y entonces

$$d\epsilon = \frac{4\beta}{(1 - \beta^2)^2} \frac{m_e^2c^4}{E_\gamma(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star)} d\beta, \quad (3.20)$$

obteniéndose  $n_\epsilon$  en función de  $\beta$ :

$$n_\beta = \frac{2(2m_e^2c^4)^2}{h^3c^3E_\gamma^2(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star)^2(1 - \beta^2)^2} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{2m_e^2c^4}{E_\gamma^2(1 - \mathbf{e}_\gamma \mathbf{e}_\star)^2(1 - \beta^2)kT}\right) - 1}. \quad (3.21)$$

Para cambiar de la variable  $l$  a  $\psi$  se usa la siguiente relación:

$$l = d_0 \cos \psi_0 - \frac{d_0 \sin \psi_0}{\tan(\psi)}. \quad (3.22)$$

Entonces se obtiene

$$dl = \frac{d_0 \sin \psi_0}{\sin^2 \psi} d\psi. \quad (3.23)$$

El límite de integración  $c_{\min}$  se escribe

$$c_{\min} = \sqrt{1 - \frac{R_{\star}}{d_0^2 + l^2 - 2d_0l \cos \psi_0}} \quad (3.24)$$

Finalmente la integral queda

$$\tau_{\gamma\gamma} = \kappa \int_{\psi_0}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \psi} d\psi \int_{c_{\min}(\psi, d_0, \psi_0)}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 n_{\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \frac{\beta}{1 - \beta^2} d\beta, \quad (3.25)$$

donde

$$\kappa = \frac{2d_0 \sin \psi_0 \pi r_e^2 (2m_e^2 c^4)^3}{h^3 c^3 E_{\gamma}^3}. \quad (3.26)$$

y  $\tau$  es determinada por  $E_{\gamma}$ ,  $d_0$  y  $\psi_0$ . En el caso de un microquásar la fuente de rayos  $\gamma$  se ubica cerca del objeto compacto, las cantidades  $d_0$  y  $\psi_0$  dependen de los parámetros orbitales.

$$d_0 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (3.27)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita ( $a = GMP_{orb}^2/4\pi^2$ ),  $e$  la excentricidad,  $\theta$  la anomalía verdadera, y  $\omega$  el ángulo de pasaje por periastró, esto hace que todo el problema sea dependiente del tiempo. La fase orbital es  $\phi = (\eta - e \sin \eta)/2\pi$  donde  $\eta$  es la anomalía excéntrica con:

$$\tan \frac{\eta}{2} = \left( \frac{1 - e}{1 + e} \right)^{1/2} \tan \frac{\theta - \omega}{2}. \quad (3.28)$$

La fase  $\phi$  se define de modo tal que el cero corresponde a la conjunción superior. A su vez  $\phi = (t - t_0)/P$  donde  $t_0$  es el momento de la conjunción superior y  $P$  el período. Luego  $\phi$  varía entre 0 y 1.

El ángulo  $\psi_0$  de la emisión al observador (localizado en el infinito) medido desde la estrella, a cada punto de la órbita es

$$\cos \psi_0 = \sin \theta \sin i \quad (3.29)$$

donde  $i$  es la inclinación de la órbita. Si la emisión sucede a una altura  $h$  por encima del objeto compacto perpendicular al plano orbital

$$d = \sqrt{d_0^2 + h^2}, \quad (3.30)$$

y el ángulo inicial cambia a  $\psi_1$  (ver Figura 3.3 ), definiendo

$$\vec{d}_1 = (d_0 \cos \phi, d_0 \sin \phi, h). \quad (3.31)$$

Entonces,

$$|\vec{d}_1|^2 = d_0^2 + h^2. \quad (3.32)$$

Introduciendo los vectores unitarios

$$\check{e}_1 = \frac{-\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|} = \frac{-1}{\sqrt{d_0^2 + h^2}}(d_0 \cos \phi, d_0 \sin \phi, h), \quad (3.33)$$

$$\check{e}_{obs} = (-\sin i, 0, \cos i) \quad (3.34)$$

se obtiene

$$\cos \psi_1 = \check{e}_1 \cdot \check{e}_{obs} = \frac{1}{\sqrt{d_0^2 + h^2}}(d_0 \cos \phi \sin i - h \cos i). \quad (3.35)$$

Esto completa el formalismo necesario para estimar la absorción de rayos  $\gamma$  en un sistema binario.

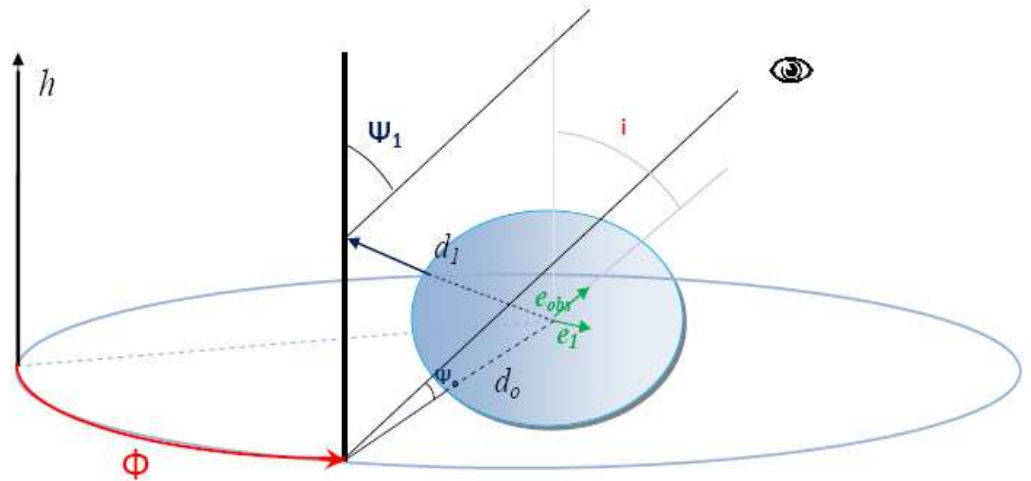


Figura 3.3: Ángulos para una altura  $h$  por sobre el plano orbital

## Capítulo 4

# El caso de Cygnus X-1

### 4.1. Parámetros

Para aplicar lo expuesto en el capítulo anterior al sistema Cygnus X-1 se adoptaron los parámetros enumerados en la siguiente tabla

<i>Parámetro</i>	<i>Valor adoptado</i>
Masa de la estrella	$30 M_{\odot}$
Temperatura efectiva	$30400^{\circ} K$
Radio estelar	$22,11 R_{\odot}$
Masa del Agujero Negro	$20 M_{\odot}$
Semieje mayor	$3,4 \times 10^{12} \text{ cm}$
Período	5,6 días
Inclinación	$35^{\circ}$
Excentricidad	0

De acuerdo al tipo espectral de la estrella del sistema, O9.7 Iab, se hace uso de los catálogos estelares (en este caso se utilizó Martins et al., 2005). El valor de la masa de la estrella está acotado entre los valores  $40 \pm 10 M_{\odot}$  según Ziółkowski (2005); de acuerdo al catálogo estelar a este tipo de estrellas le corresponde una masa de  $27.83 M_{\odot}$ , se considera entonces un valor de  $30 M_{\odot}$ , consistente con el trabajo y el catálogo. El valor de la temperatura efectiva correspondiente a este tipo espectral también se adopta, al igual que el valor del radio, del mencionado catálogo.

La masa para el agujero negro es acotada al rango de  $21 \pm 8 M_{\odot}$ , aquí se adopta  $20 M_{\odot}$

El valor del período de la órbita esta bien establecido, al igual que la naturaleza circular de la misma. No es el caso de la inclinación, ésta se encuentra entre  $25^{\circ}$  y  $65^{\circ}$ , se adopta para la inclinación un valor intermedio. Más adelante se analiza la variación de los resultados obtenidos con la modificación de la inclinación.

El semieje mayor de la órbita se calcula de acuerdo a la dinámica clásica:  $a = \left(\frac{GM P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$  con  $M$  la masa total del sistema.

Para el cálculo de la integral (3.25) se utilizó el método de aproximación numérico de cuadratura gaussiana, detallado en el Apéndice B.

La dependencia orbital en este sistema es más sencilla que para el caso general, ya que se trata de una órbita circular. La fase será simplemente  $\phi$  y tomará los valores entre 0 y 1, como se mencionó en el capítulo anterior.

## 4.2. Resultados del cálculo de la opacidad

A continuación se presentan los resultados obtenidos en el cálculo del coeficiente de atenuación  $e^{-\tau}$ . La Figura 4.1 muestra el mapa de absorción para distintas energías en todo punto de la órbita del sistema, en función de la posición  $h$  del emisor de rayos  $\gamma$ , es decir la altura perpendicular sobre el plano de la órbita. Es apreciable el aumento del coeficiente de atenuación para energías mayores a 10 TeV, y para las energías más bajas consideradas. Para energías del orden de 10 GeV el coeficiente adquiere valores muy cercanos a 1, se grafica en otra escala de colores para poder apreciar su variación. Hay zonas de baja absorción a grandes alturas, es decir  $h$  del orden de  $10^{13}$  cm y cuando  $\phi \sim 0,5$ , momento en que la estrella está detrás del agujero negro.

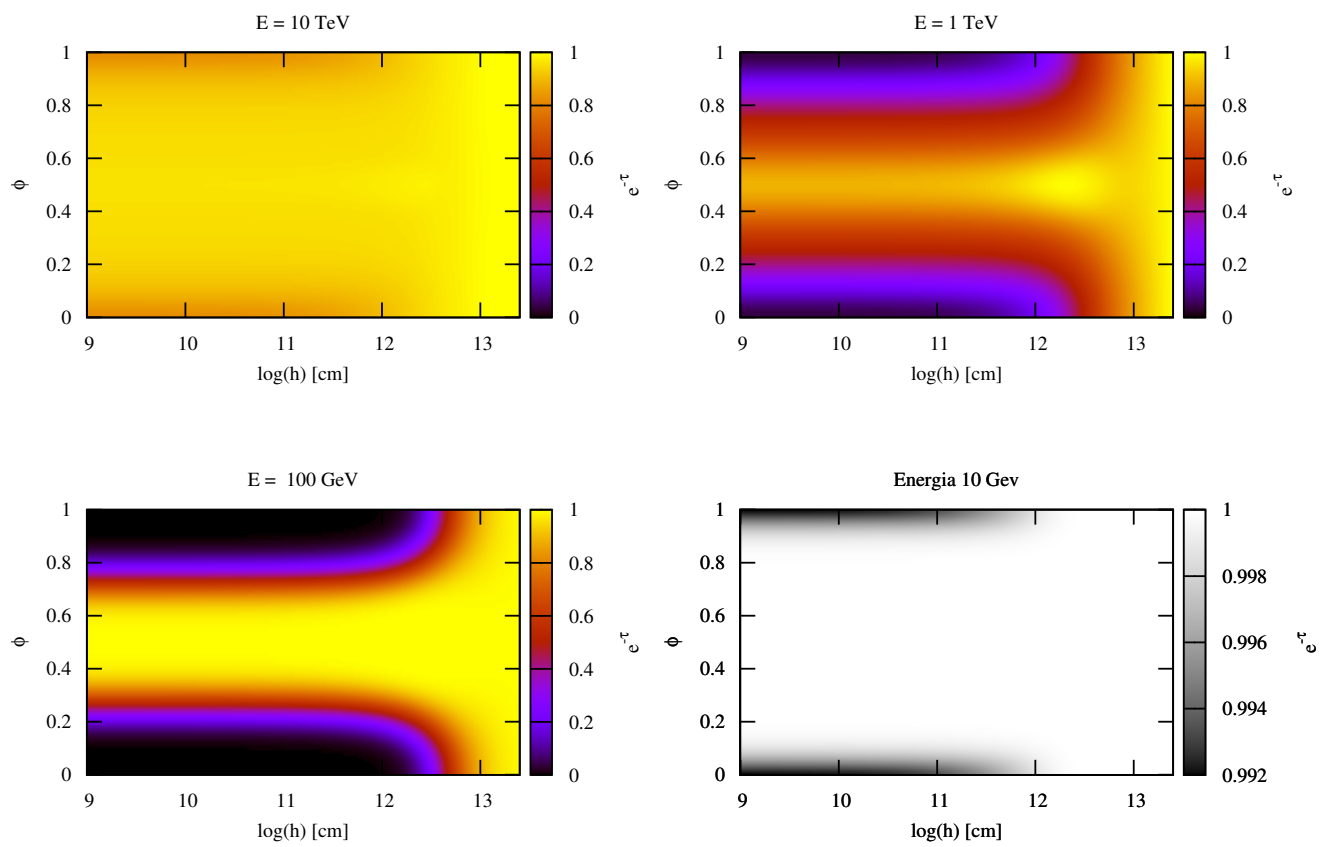


Figura 4.1: Variación del coeficiente de atenuación con la altura  $h$  y la fase  $\phi$  a diferentes valores fijos de energía.

La Figura 4.2 muestra el mapa de absorción para distintas alturas  $h$  en todo punto de la órbita, en función de la energía. Puede apreciarse, como es de esperar, que el coeficiente de atenuación disminuye con la altura sobre el plano orbital. A alturas del orden de  $10^{13}$  cm la absorción es casi nula, y varía escasamente.

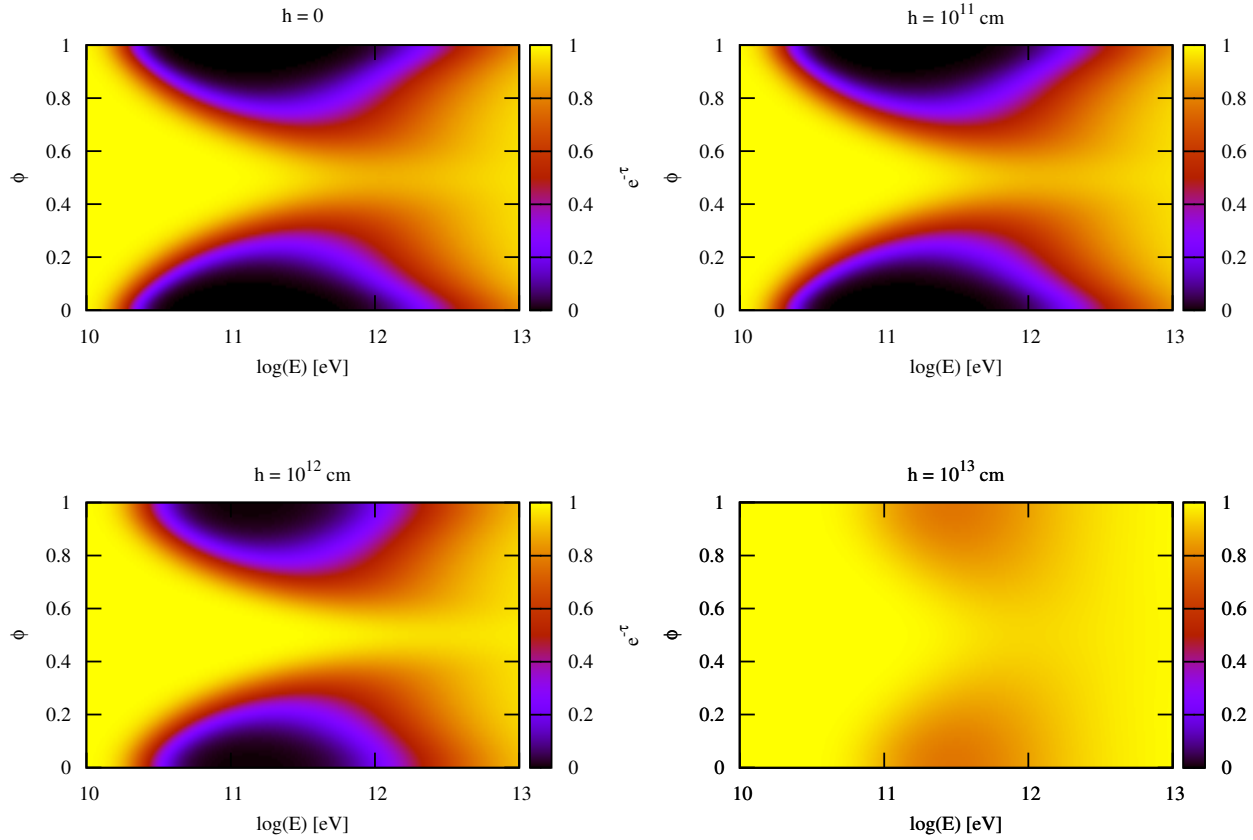


Figura 4.2: Variación del coeficiente de atenuación con la energía  $E$  y la fase  $\phi$  a diferentes valores fijos de altura  $h$ .



En la Figura 4.3 se exhiben dos gráficos. El gráfico de la izquierda corresponde a curvas del coeficiente de atenuación en función de la fase orbital para diferentes alturas seleccionadas, a una dada energía fija,  $E = 1$  TeV. Este gráfico presenta claramente la atenuación de la absorción para grandes alturas y la modulación de la absorción provocada por la fase orbital. El gráfico de la derecha corresponde a curvas del coeficiente de atenuación en función de la energía para diferentes alturas seleccionadas, para una fase fija,  $\phi = 0,91$  que corresponde al instante de detección del *flare*. La atenuación es máxima para bajas alturas y para energías del orden de las centenas de GeV; la drástica disminución con la altura puede apreciarse comparando la curva correspondiente a  $h = 10^{12}$  cm con la correspondiente a  $10^{13}$  cm.

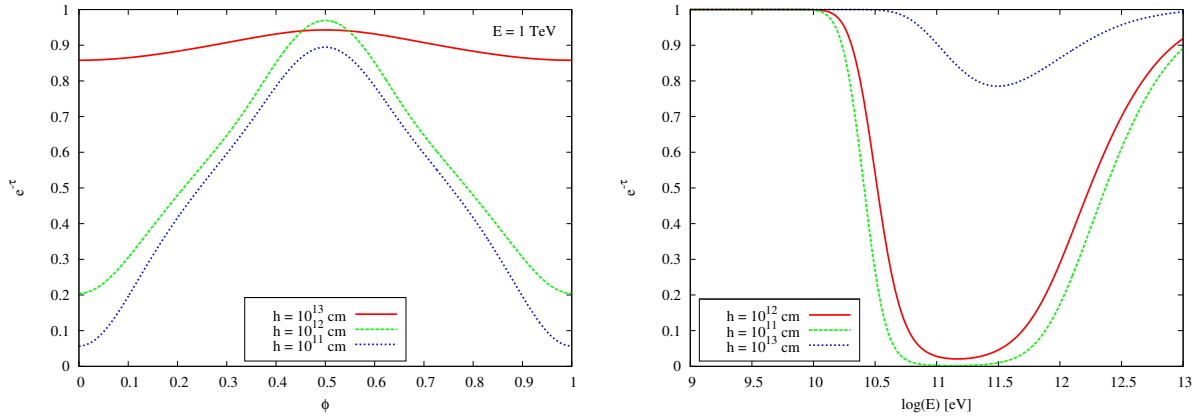


Figura 4.3: *Izquierda:* Curvas de  $e^{-\tau}$  en función de la fase  $\phi$  a diferentes alturas  $h$ , para  $E = 1$  TeV.

*Derecha:* Curvas de  $e^{-\tau}$  en función de la energía  $E$  a diferentes alturas  $h$ , para  $\phi = 0,91$ .

Por último, la Figura 4.4 presenta el mapa de absorción calculado, en función de la altura por sobre el plano orbital y de la energía. La fase es fija,  $\phi = 0,91$ . Puede apreciarse que la absorción es casi nula a las alturas máximas consideradas. Las energías entre  $\sim 70$  y  $\sim 700$  GeV producen los máximos de absorción. En la figura además se destaca la zona correspondiente a  $\tau \sim 1$  que divide el mapa en dos regiones. Para  $\tau \sim 1$  el coeficiente de atenuación toma un valor  $\sim 0,36$  lo cual corresponde a una absorción  $\sim 64\%$  del flujo emitido (ver ecuación 3.2), de modo que en la región interna delimitada por  $\tau \sim 1$  la absorción es mayor al  $64\%$  y en la región externa menor.

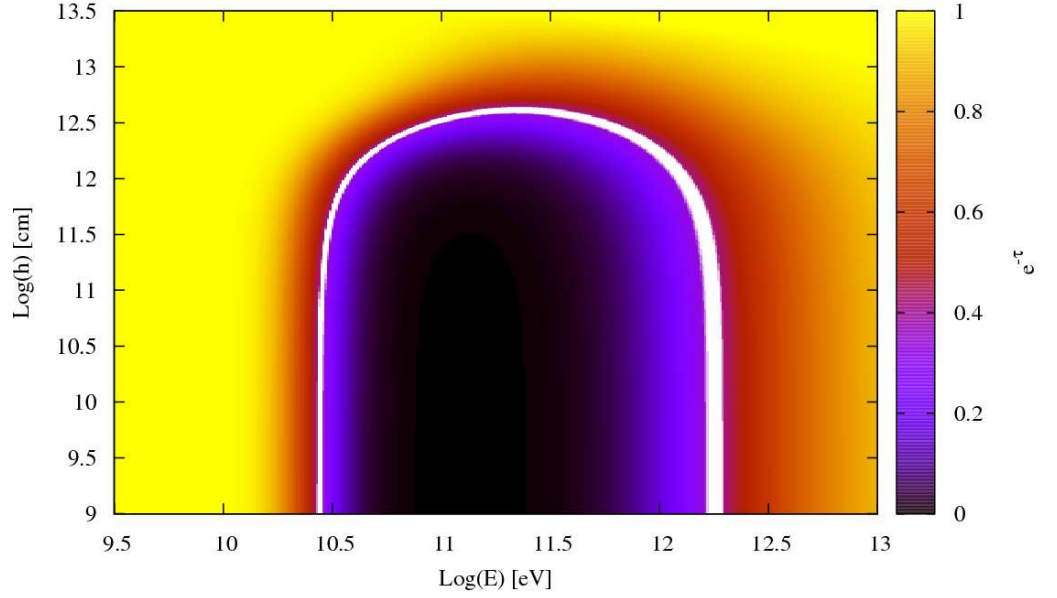


Figura 4.4: Variación del coeficiente de atenuación con la energía y la altura a valor fijo de la fase  $\phi = 0,91$ . Las curvas blancas corresponden a un valor de  $\tau \sim 1$ .

### 4.3. Análisis de la energética

#### 4.3.1. Cálculo del índice espectral emitido

Los datos de MAGIC y su análisis implican que el flujo observado en rayos  $\gamma$  por Cygnus X-1 es

$$F_{\text{obs}} = kE^{-\alpha} \quad (4.1)$$

donde  $k$  es una constante, ver ecuación (2.1). Entonces

$$\log(F_{\text{obs}}) = \log(k) + \log(E^{-\alpha}) = \log(k) - \alpha \log E \quad (4.2)$$

A partir del flujo medido a dos energías fijas  $E_1$  y  $E_2$

$$\log(F_{\text{obs}}(E_1)) - \log(F_{\text{obs}}(E_2)) = \alpha(\log(E_2) - \log(E_1)) \quad (4.3)$$

Por lo tanto el índice espectral derivado de las observaciones es

$$\alpha = \frac{\log(F_{\text{obs}}(E_1)) - \log(F_{\text{obs}}(E_2))}{\log(E_2) - \log(E_1)}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, se tiene para el flujo emitido, asumiendo que también sigue una ley de potencias

$$F_{\text{emit}} = \kappa E^{-\beta}, \quad (4.5)$$

con  $\kappa$  una constante.

Análogamente

$$\beta = \frac{\log(F_{\text{emit}}(E_1)) - \log(F_{\text{emit}}(E_2))}{\log(E_2) - \log(E_1)}, \quad (4.6)$$

y además si  $\tau(E)$  se comporta en forma aproximadamente lineal con la energía en  $(E_1, E_2)$  se pueden relacionar ambas leyes de potencias

$$F_{\text{obs}} = F_{\text{emit}} e^{-\tau(E)}. \quad (4.7)$$

Se escribe explícitamente la dependencia de  $\tau$  con la energía por los requerimientos del cálculo ( $\tau$  depende además de otras cantidades como la altura o la fase orbital). Tomando logaritmos

$$\log(F_{\text{obs}}) = \log(F_{\text{emit}}) - \tau(E) \log(e) \quad (4.8)$$

Reemplazando en (4.6) se obtiene

$$\beta = \frac{\log(F_{\text{obs}}(E_1)) + \tau(E_1) \log(e) - \log(F_{\text{obs}}(E_2)) + \tau(E_2) \log(e)}{\log(E_2) - \log(E_1)} \quad (4.9)$$

Usando (4.4)

$$\beta = \alpha + \log(e) \frac{\tau(E_2) - \tau(E_1)}{\log(E_2) - \log(E_1)}. \quad (4.10)$$

Del ajuste de las observaciones se obtiene  $\alpha = 3,2$ ,  $E_1 = 100$  GeV y  $E_2 = 1$  TeV, luego

$$\beta = 3,2 - 0,43 \frac{\tau(E_2) - \tau(E_1)}{2,30} \quad (4.11)$$

Para cada valor de la altura  $h$  habrá un valor de  $\tau$ . Los valores de  $\tau(h)$  calculados se muestran en la Figura 4.5 para las dos energías de interés. Se tiene entonces  $\beta(h)$ , y los valores obtenidos se despliegan en la Figura 4.6.

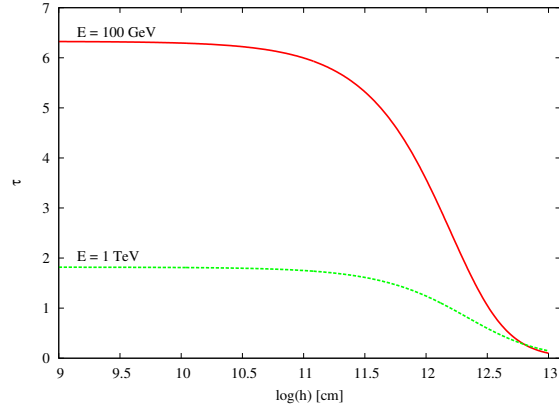


Figura 4.5: Variación de la profundidad óptica  $\tau$  con la altura para dos valores de energía, a valor fijo de la fase  $\phi = 0,91$ .

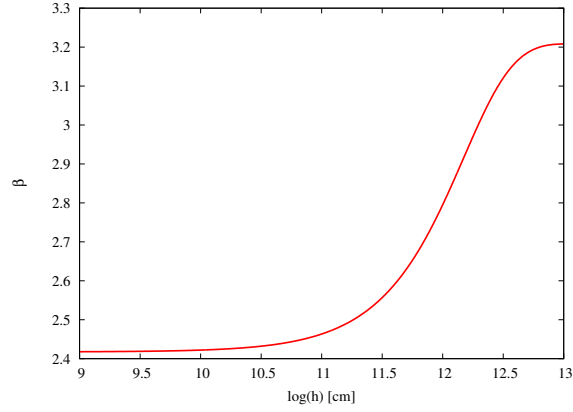


Figura 4.6: Variación del índice espectral  $\beta$  en función de la altura.

### 4.3.2. Cálculo de la luminosidad emitida

A partir de la ecuación (2.1) se obtiene la luminosidad

$$L_{\text{obs}} = 4\pi k 1,6d^2 \left(\frac{E}{1\text{TeV}}\right)^{-3,2+2} \text{erg/seg.} \quad (4.12)$$

De aquí, se deduce que  $k = 2,3 \times 10^{-12}$  y

$$L_{\text{emit}} = 4\pi \kappa 1,6d^2 \left(\frac{E}{1\text{TeV}}\right)^{-\beta+2} \quad (4.13)$$

en conformidad con (4.7)

$$\log(\kappa E^{-\beta}) = \log\left(k \left(\frac{E}{1\text{TeV}}\right)^{-\alpha}\right) + \tau \log(e). \quad (4.14)$$

Despejando  $\kappa$ :

$$\log(k) = \frac{(\alpha - \beta) \log\left(\frac{E}{1\text{Tev}}\right) + \alpha \log(k) - \tau \log(e)}{\beta} \quad (4.15)$$

y

$$\log(\kappa) = \frac{(3,2 - \beta) \log\left(\frac{E}{1\text{Tev}}\right) - 37,29 - 0,43\tau}{\beta} \quad (4.16)$$

También puede obtenerse  $L_{\text{emit}}$  como:

$$L_{\text{emit}} = L_{\text{obs}} e^{\tau} \quad (4.17)$$

con  $L_{\text{obs}} = 4\pi \times 2,3 \times 10^{-12} \times 1,6d^2 E^{-1,2} \text{ erg s}^{-1}$  y  $d = 2.2 \text{ Kpc}$ . Se calcula entonces para  $E = 100 \text{ GeV}$  a distintas alturas:

$$\log(L_{\text{emit}}) = \log(15,85 \times 4,40 \times 10^{32} e^{\tau}). \quad (4.18)$$

Los valores obtenidos para la luminosidad emitida se muestran en la Figura 4.7.

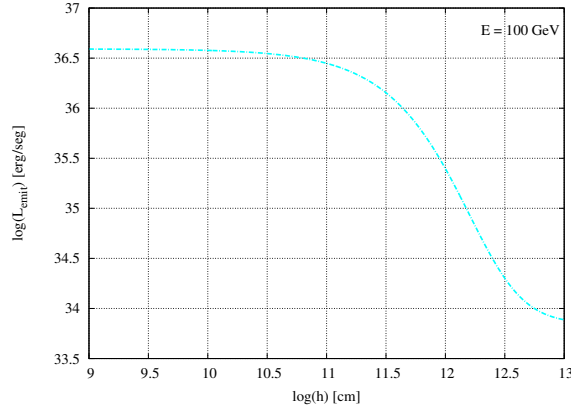


Figura 4.7: Luminosidad emitida,  $L_{\text{emit}}$ , en función de la altura.

#### 4.4. Análisis de la variación con la inclinación

Como se mencionó en secciones previas la inclinación del sistema Cygnus X-1 no se conoce con gran precisión, de modo que no hay una forma de determinar que valor entre 25 y 65 grados es más apropiado adoptar. La función de masa del sistema sí se conoce con gran precisión. A partir de ella pueden estimarse nuevos valores para el semieje de la órbita, y de la masa secundaria para valores fijos dados de la inclinación y de la masa de la componente primaria.

La función de masa del sistema Cygnus X-1 es  $f(m_1, m_2) = 0,251 \pm 0,007 M_\odot$  (Gies et al., 2003). La función de masa de un sistema binario cuya componente primaria tiene masa  $m_1$  y cuya componenete secundaria masa  $m_2$  se define como

$$f(m_1, m_2) = 4\pi^2 \frac{a \sin(i)^3}{GP^2} = \frac{(m_2 \sin(i))^3}{(m_1 + m_2)^2}, \quad (4.19)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita,  $i$  la inclinación, y  $P$  el período.

Si se fija el valor de la masa de la estrella al valor adoptado ( $30M_\odot$ ), para un nuevo valor de  $i$  se tendrá un nuevo valor de  $a$  y de  $m_2$ .

Como  $a = (\frac{GMP^2}{4\pi^2})^{1/3}$  con  $M = m_1 + m_2$ , si se lo reemplaza en el segundo miembro de la ecuación 4.19, se obtiene un polinomio para  $m_2$

$$0,25m_1^2 + 2 \times 0,25m_1 \times m_2 + 0,25 \times m_2^2 - \sin(i)^3 \times m_2^3 = 0. \quad (4.20)$$

Se calcula  $m_2$  mediante el método de Newton-Raphson para los valores extremos de la inclinación y luego se calcula el correspondiente valor de  $a$ :

$i$	$m_2$	$a$
25°	20,35 $M_\odot$	3,40 $\times 10^{12}$ cm
65°	7,84 $M_\odot$	3,09 $\times 10^{12}$ cm

La Figura 4.8 muestra los valores de la opacidad  $\tau$  para dos valores fijos de energía calculados con los parámetros correspondientes a las inclinaciones 25° y 65°. Como es de esperar existe una gran diferencia entre los valores correspondientes a las dos inclinaciones. Al cambiar la posición relativa de la órbita respecto de la línea de la visual cambia el recorrido que realizan los rayos  $\gamma$  para llegar al observador.

El índice espectral  $\beta$  cambia considerablemente. En La Figura 4.9 se exhibe la variación del índice espectral  $\beta$  en función de la altura para los diferentes valores de la inclinación . El índice espectral se hace más duro para  $i = 65^\circ$ .

Los requerimientos energéticos varían enormemente con la inclinación, como lo muestra la Figura 4.10: la luminosidad emitida en función de la altura  $h$  para ambos valores de la inclinación. Se aprecia que a mayor inclinación mayor es la luminosidad emitida por el sistema;  $L_{emit}$

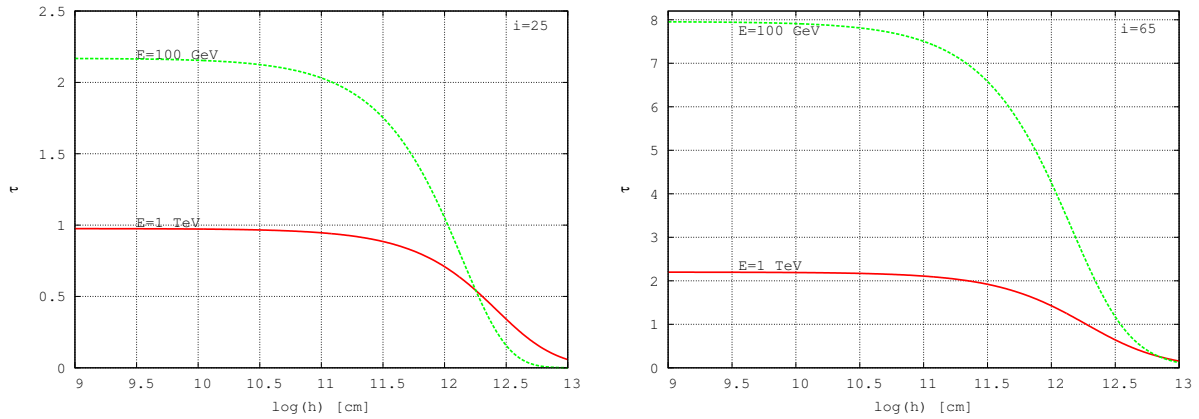


Figura 4.8: *Izquierda:* Curvas de  $\tau$  en función de la altura, para dos valores fijos de la energía, correspondientes a una inclinación  $i = 25^\circ$ .

*Derecha:* Idem para  $i = 65^\circ$ .

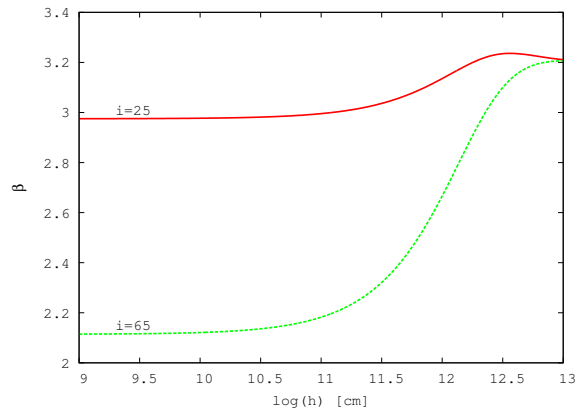


Figura 4.9: Variación del índice espectral  $\beta$  en función de la altura para los diferentes valores de la inclinación.

puede variar hasta casi 3 órdenes de magnitud para alturas del orden de  $10^9$  cm. La opacidad aumenta al aumentar la inclinación por ende la luminosidad requerida para reproducir la luminosidad observada (ver ecuación 4.12) también lo hace.

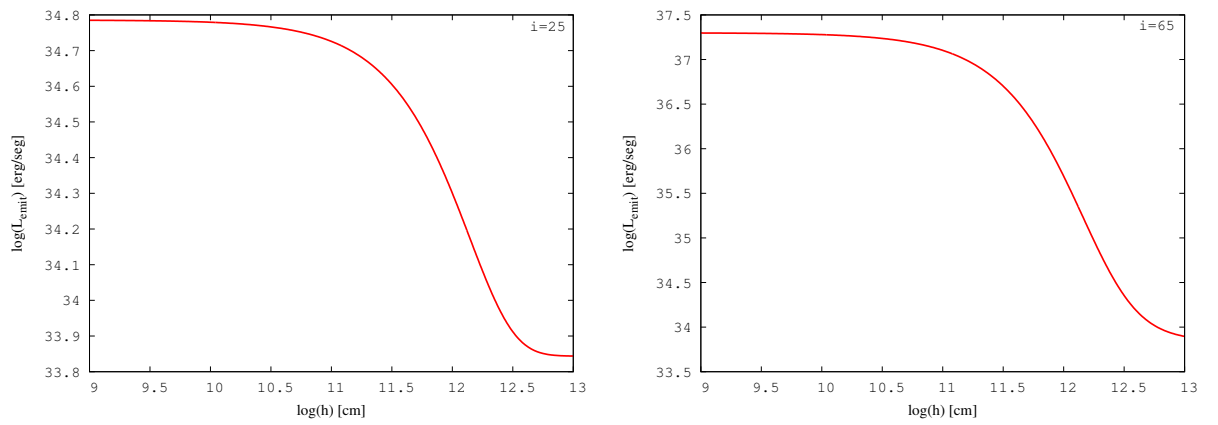


Figura 4.10: *Izquierda:* Luminosidad emitida,  $L_{\text{emit}}$ , en función de la altura, para dos valores fijos de la energía, correspondientes a una inclinación  $i = 25^\circ$ .

*Derecha:* Idem para  $i = 65^\circ$ .



## Capítulo 5

# Discusión

Los resultados obtenidos en la investigación presentada en esta tesis brindan un detalle de la absorción bajo las hipótesis realizadas, y permiten obtener una estimación de la luminosidad intrínseca calculada a partir de la luminosidad observada corregida de absorción. A fin de acotar la localización de la región emisora en función de la absorción, se necesita tener en cuenta la potencia cinética total del jet de Cygnus X-1,  $P_{\text{jet}} \sim 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$  (Gallo et al., 2005). La potencia emitida por el jet en rayos  $\gamma$  será una fracción de este valor. De modo que sea cual fuere el modelo a proponer para la generación del *flare*, debe dar cuenta de las observaciones con una energética de no más de una fracción de  $P_{\text{jet}}$ .

De la Figura 4.7 se observa que si la emisión  $\gamma$  se produjo en la base del jet, para reproducir las observaciones se requiere de una luminosidad en  $\gamma$  de  $10^{36,6} \text{ erg s}^{-1}$ . Por otro lado, a una altura de  $1,5 \times 10^{12} \text{ cm}$  la luminosidad es de  $10^{35} \text{ erg s}^{-1}$ . Si la altura es mayor, menor será la luminosidad emitida.

Se proponen dos modelos muy distintos para la explicación del *flare* observado y de la posible posición del emisor.

Romero et al. (2002) presentaron un modelo que incorpora las diferentes componentes de Cygnus X-1, el disco de acreción, la corona, la estrella compañera, y el jet relativista. En este modelo los *outbursts* no térmicos son un resultado natural y esperado. Sugieren que ciertos episodios de emisión de *flares* detectados en energías del orden de  $\sim 1 \text{ MeV}$  (Golenetskii et al., 2002; Shmidt, 2002) pueden interpretarse en términos de actividad de microblazar no térmica. El

carácter recurrente de éstos eventos puede explicarse a través del corrimiento Doppler originado en la precesión del jet (Kaufman-Bernadó et. al., 2002).

Existe un efecto de corrimiento debido al factor Doppler relativista

$$D = \Gamma^{-1}(1 \pm \beta \cos \phi)^{-1} \quad (5.1)$$

donde  $\phi$  es el ángulo formado con la línea de la visual,  $\Gamma$  es el factor de Lorentz total del fluido, y  $\beta$  es su velocidad. Un objeto moviéndose a un ángulo  $\phi$  con velocidad  $\beta$  tendrá una luminosidad significativamente más grande a su valor intrínseco

$$L_{\text{app}} = D^n L_{\text{int}} \quad (5.2)$$

con  $3 < n < 4$ .

La corrección Doppler afecta todo el espectro no térmico, incluyendo energías mayores a 200 GeV. En el modelo de Romero et al. (2002) se introduce un *cutoff* en la distribución de electrones, por el hecho de que el evento fue observado a bajas energías. En este modelo la luminosidad intrínseca se origina por efecto Compton inverso sobre fotones de la estrella. Es un modelo esencialmente leptónico.

Un resultado interesante que arroja este trabajo es que debido a la precesión hay una variación de hasta un orden de magnitud en la radiación observada del jet respecto de la emitida. El ángulo de precesión se estima en 16,5 grados. El tránsito a través del pico de flujo magnificado puede ser muy rápido en el sistema de referencia del observador, detectándose como un *flare*. La Figura 5.1 ilustra esta situación.

Bajo estas condiciones los requerimientos energéticos para que la emisión se origine cerca de la base del jet,  $\log(L_{\text{emit}}) = 36,6$ , serían menores y además se explicaría el carácter no continuo de la emisión detectada en rayos  $\gamma$ .

Por otro lado se ha propuesto un modelo para explicar *flares* en rayos  $\gamma$  (Romero et al. 2003, 2007; Araudo, et al., 2009; Owocki et al., 2009) en microcuásares de gran masa, basado en la interacción entre los jets y las inhomogeneidades del viento de las estrellas masivas. La pérdida de masa en este tipo de estrellas se piensa que es llevada a cabo vía vientos supersónicos formados por grumos (*clumps*) muy densos y grandes vacíos entre ellos (e.g. Owocki & Cohen, 2006).

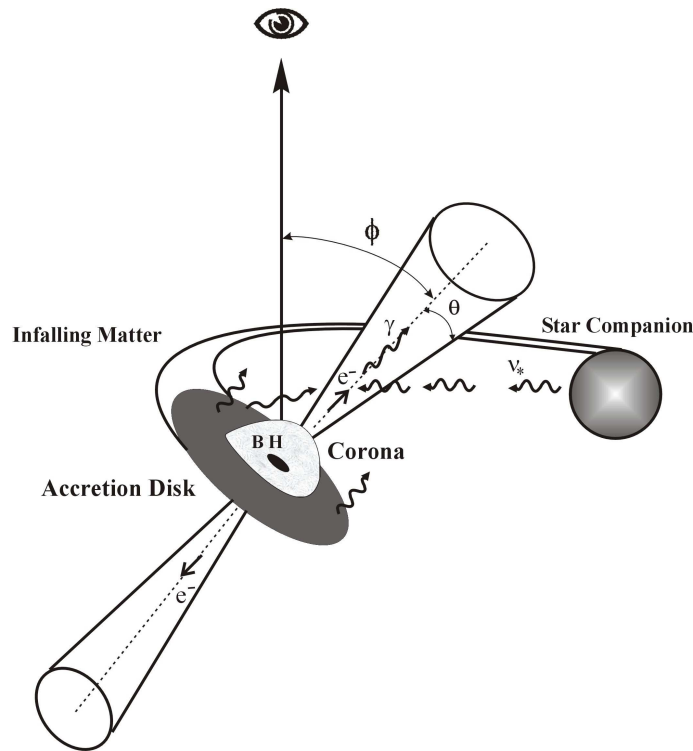


Figura 5.1: Diagrama de la situación discutida en el modelo de precesión del jet. El jet relativista se inyecta cerca del agujero negro. Este jet atraviesa campos de fotones creados por el disco de acreción, la corona y la estrella. La dispersión Compton inversa debe ocurrir necesariamente (Romero, et al. 2002).

Estas ideas son sostenidas por evidencia observacional (e.g. Dessart & Owocki, 2003, 2005; Puls et al., 2006).

Los *clumps* provenientes del viento pueden eventualmente penetrar en el jet, provocando interacciones entre el material del jet y el material del viento, que liberará una fracción significativa de la luminosidad cinética del jet en forma de radiación sincrotrón, dispersión Compton inversa, y emisión por decaimiento de piones neutros producto de interacciones protón-protón (ver sección 1.3.2.). La Figura 5.2 ilustra la situación.

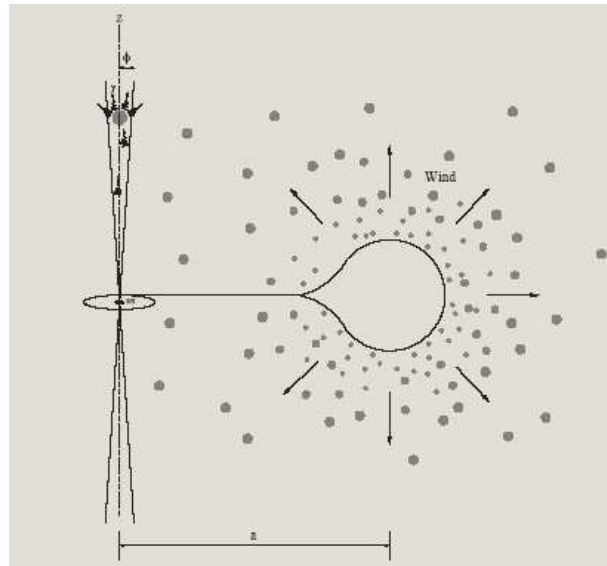


Figura 5.2: Diagrama de la situación discutida en el modelo de interacción del jet con el viento estelar, un microcuásar de gran masa con un viento estelar grumoso (Araudo, et al., 2008).

Este modelo también predice la ocurrencia de *flares* en energías del orden del TeV. Los resultados dependen de las características del *clump* del viento que se adopten. Sin embargo, como consecuencia de la alta resolución espacial necesaria para detectar directamente a los *clumps* del viento, toda la evidencia es indirecta. Por este motivo, sus propiedades como tamaño, densidad y número no son bien conocidas al presente.

La ventaja de este tipo de modelos es que las interacciones que dan lugar a la radiación  $\gamma$  ocurren a una distancia tal del agujero negro que la opacidad es pequeña.

## Capítulo 6

# Conclusión

Se ha calculado en detalle la absorción  $\gamma$ - $\gamma$  del sistema Cygnus X-1 por producción de pares. Como era de esperar la opacidad es modulada por el movimiento orbital del sistema.

La absorción en el momento de detección del *flare* reportado por MAGIC es muy grande cerca del plano orbital del sistema, y los requerimientos energéticos para reproducir los reportes observacionales son muy grandes, a menos que actúe un mecanismo de precesión del jet como se menciona en el capítulo anterior o que la interacción que da lugar a la radiación ocurra lejos del agujero negro.

Remitiéndose a la Sección 4.4., los requerimientos energéticos varían enormemente con la inclinación (ver Figura 4.10). Se cuenta con una cota en la potencia del jet, sin embargo mientras no se disponga de una cota más precisa en la inclinación la indeterminación es muy grande. Si la inclinación real es del orden de  $i = 65^\circ$ , y si la emisión es producida en la base del jet, requiere de una luminosidad mayor a  $10^{37}$  erg s<sup>-1</sup>. En cambio, si la inclinación real es  $\sim 25^\circ$  la luminosidad emitida nunca supera valores moderados para la potencia del jet.

Posibles líneas de trabajo que pueden desarrollarse son

- Considerar en el cálculo de la absorción los efectos que podría tener el oscurecimiento al limbo, al integrar el espectro de la estrella.
- Como primera aproximación se despreció el efecto de cascadas electromagnéticas, debería

realizarse un tratamiento más exhaustivo para determinar cuán importante puede ser su efecto sobre el espectro emitido en rayos  $\gamma$ .

- Tener en cuenta la posible precesión del jet de Cygnus X-1 y sus implicaciones en la absorción y la emisión de radiación  $\gamma$  realizando cálculos precisos que impliquen resolver la ecuación de transporte para las partículas.

La detección del *flare* es muy reciente. El mejoramiento de las técnicas observacionales y el hecho de que nuevos detectores de rayos  $\gamma$  entren en funcionamiento proveen de varias perspectivas a futuro:

- \* Cygnus X-1 es un sistema observable desde el hemisferio Norte. MAGIC II podrá detectar este tipo de eventos con mayor precisión y sensibilidad.
- \* VERITAS (*Very Energetic radiation Imaging Telescope Array*), construído en Arizona, también podrá detectar emisión de muy alta energía proveniente de Cygnus X-1.
- \* El satélite Fermi/GLAST (*Gamma-Ray Large Area Space Telescope*) está detectando fuentes variables a energías de MeV-GeV, que podrían corresponder a nuevos *flares* en fuentes aún no identificadas (Abdo et al., 2009).
- \* También el satélite italiano de rayos  $\gamma$  AGILE (*Astro-rivelatore Gamma a Immagini Leggero*) está detectando fuentes variables a energías de MeV-GeV (ver Romero & Vila, 2009; Pittori et al., 2009).
- \* Finalmente cuando se cuente con más y mejores observaciones se podrán proponer modelos más detallados.

# Bibliografía

- [1] Abdo, A.A., et al., submitted to ApJ., (2009).
- [2] Ables, J.G., Proc. Astron. Soc. Australia, 1, 237-40, (1969).
- [3] Aharonian, F.A., Volk, H.J., High Energy Gamma-Ray Astronomy, AIP Press, Melville, NY (2001).
- [4] Albert, J., et al., ApJ, Lett. 665, L51 (2007).
- [5] Araudo, A.T., Bosch-Ramon, V., Romero, G.E., enviado a A&A, (2008).
- [6] Bednarek, W., A&A, 322-523 (1997).
- [7] Bosch-Ramon, V., et al., Aip Conference proceedings 801, 196 (2005).
- [8] Bosch-Ramon, V., et al., A&A, 489,L21,L24 (2008).
- [9] Bosch-Ramon, V., Romero, G.E., & Pardes J.M., A&A,447, 273 (2006).
- [10] Bowyer, S., et al., Science, 147, 394 (1965).
- [11] Bridle, A.H., Perley, R.A., Annu. Rev. Astr. Astrophys., 22, 319, 58 (1984).
- [12] Burden, R. & Faires, J., Análisis Numérico, Thomson Learning, México (2002).
- [13] Burnidge, G. R., A&A, 129, 849 (1959).
- [14] Chakrabarti, S., & Titarchuk, L.G., ApJ, 455, 623 (1995).
- [15] Cheng, K.S., Romero, G.E., Cosmic Gamma Ray Sources, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).
- [16] Curtis, H.D., Publ. Lick. Obs. 13: 9-42 (1918).
- [17] Dessart, L. & Owocki, S.P., A&A, 406, L1 (2003).
- [18] Dessart, L. & Owocki, S.P., A&A, 437, 657 (2005).
- [19] Dove, J.B., et al., ApJ, 487, 759 (1997).
- [20] Dubus, G., A&A 151 9 (2006).
- [21] Esin, A.A., et al., ApJ, 505, 854 (1998).
- [22] Esin, A.A., et al., ApJ, 505 (1998).

- [23] Fabian, A.C., Rees M.J., MNRAS, 187, 13-16 (1979).
- [24] Fender, R., et al., MNRAS, 369, 603 (2006).
- [25] Fender, R., & Maccarone, T., in: Cosmic Gamma-Ray Sources, ed. K.S.
- [26] Frank, J. , King, J. & Raine, D., *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press, (2002).
- [27] Frontera, F., et al., ApJ 546,2,1027 (2001).
- [28] Gallo, E. et al., Nature, 436, 819 (2005).
- [29] Georganopoulos, M., Aharonian, F.A., & Kirk, J.G, A&A, 388, N25 (2002).
- [30] Gierlinski, M., et al., MNRAS, 288, 958 (1997).
- [31] Gies, D. R., & Bolton, C. T., ApJ, 304, 371 (1986).
- [32] Gilmore, W.S. et al., Astron. J., 86, 864 (1981).
- [33] Golenetskii, S. et al., IAUC, 7840 (2002).
- [34] Gould, R.J. & Scheröder, G.P., Pys. Rev., 155, 1404 (1967).
- [35] Ichimaru, S., ApJ, 214, 840 (1977).
- [36] Kaufman-Bernadó, M.M., Romero, G.E. & Mirabel, I.F., A&A, 385, L10 (2002).
- [37] Longair, M., *High Energy Astrophysics (Vol. I y II)* Cambridge University Press, Cambridge (1992 y 1994).
- [38] Mandl, F. & Shaw, G., *Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons Ltd, NY (1991).
- [39] Margon, B.A., Stone R.P.S., Klemola A., Ford H.C., Katz J.I., et al., ApJ, 230,R41, (1979).
- [40] Margon, B.A., Annu. Rev. Astr. Astrophys. 22, 507 (1984).
- [41] Markoff, S., Falcke, H. & Fender, R., A&A, 372, L25 (2001).
- [42] Markoff, S., Nowak, M., Corbel, S., et al., A&A, 397, 645 (2003).
- [43] Martí, J. et al., A&A 306, 449 (1996).
- [44] Martins, F., et al., A&A, 436, 1049 (2005).
- [45] Mirabel, I.F. et al., Nature, 358, 215 (1992).
- [46] Mirabel, I.F.& Rodríguez L.F., Nature, 392, 673 (1998).
- [47] Mirabel, I.F. & Rodríguez, L.F., ARA&A, 37, 409 (1999).
- [48] Mirabel, I.F. & Rodríguez, I., Science, 300, 1119 (2003).
- [49] *Numerical recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University press (1992).
- [50] Owocki, S.P. & Cohen, D.H., ApJ, 648, 1, 565 (2006).



- [51] Owocki, S.P., et al., aceptado para publicar en ApJ, (2009).
- [52] Orellana, M., Tesis de Doctorado UNLP “Emisión gamma en binarias con acreción” (2007).
- [53] Paredes, J. M, AIP Conference proceedings, 1085, 157, 168 (2008).
- [54] Paul, J., et al., In Advances in Space Research, 11, 8289 302 (1991).
- [55] Pittori, C., et al., submitted to A&A (2009).
- [56] Poutanen, J., Krolik, J. H., & Ryde, F., MNRAS, 292, L21 (1997).
- [57] Puls, J., et al., A&A, 454, 625 (2006).
- [58] Robertson & Leiter ApJ, 565, 447 (2002).
- [59] Romero, G.E, Kaufman Bernadó, M.M., Mirabel, I.F. A&A 393, L61-l64 (2002).
- [60] Romero, G.E., et al., A&A, 410, L1 (2003).
- [61] Romero, G.E., Chinese Journal of A&A, 5, suppl. 110 (2005).
- [62] Romero, G.E., et al., A&A, 474, 15 (2007).
- [63] Romero, G.E. et al., Proceedings of an International Workshop held in Potsdam, ISBN 978-3-940790793-33-1, 191 (2008).
- [64] Romero, G.E. & Vila, G.S., A&A, 485, 3, 623 (2008).
- [65] Romero, G.E. & Vila, G.S., A&A, 494, 3 (2009).
- [66] Shapiro, S.L. & Teulosky, S.A., Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, Wiley, NY (1983).
- [67] Schmidt, M., IAUC, 7856 (2002).
- [68] Sharples, W., ApJ Suppl ser., 4, 257 (1959).
- [69] Spencer, R.E., Nature, 282, 483 (1979).
- [70] Stirling, A. M., et al., MNRAS 327, 1273 (2001).
- [71] Sunyaev, R., Churasov, E., Gilfanov, M., et al., ApJ, 383, L49 (1991).
- [72] Wen, L., et al. ApJ, 546, L05 (2001).
- [73] Young, A.J., et al., MNRAS, 325, 1045 (2001).
- [74] Ziółkowski, J., MNRAS, 358, 851 (2005).



# Apéndice A

## Sección eficaz $\gamma$ - $\gamma$

El cálculo de la sección eficaz de la reacción  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$  se efectúa mediante electrodinámica cuántica (*QED*).

La probabilidad de transición de un estado inicial  $i$  a un estado final  $f$  está dada por

$$w = |S_{if}|^2/T, \quad (\text{A.1})$$

donde  $S_{if}$  es el elemento de matriz de la matriz  $S$  entre los estados  $i$  y  $f$ . En función de  $M$ , la amplitud invariante de Feynman puede escribirse

$$S_{if} = \delta_{if} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum p'_f - \sum p_i\right) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2} \prod_f \left(\frac{1}{2VE'_f}\right)^{1/2} \prod_l (2m_l)^{1/2} M \quad (\text{A.2})$$

donde el índice  $l$  hace referencia a cada leptón partícipe del proceso.

Se definió  $w$  como la razón de transición a un estado final definido. Para obtener la razón de transición para un grupo de estados finales con momento en los intervalos  $(p'_f, p'_f + dp'_f)$ ,  $f=1, \dots, N$ , se debe multiplicar  $w$  por el número de éstos estados que es

$$\prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.3})$$

La sección eficaz diferencial es la razón de transición a este grupo de estados finales para un centro dispersor y unidad de flujo incidente. El volumen  $V$  que se considera contiene sólo un

centro dispersor, y el flujo incidente es  $v_{rel}/V$  donde  $v_{rel}$  es la velocidad relativa de las partículas colisionantes.

Combinando estos resultados

$$d\sigma = w \frac{V}{v_{rel}} \prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.4})$$

Entonces la sección eficaz diferencial para la colisión de dos partículas ( $i = 1, 2$ ) moviéndose colinealmente con velocidad relativa  $v_{rel}$  y resultando en  $N$  partículas finales ( $f = 1, 2, \dots, N$ ) esta dada por

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum p'_f - \sum p_i\right) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel}} \left(\prod_l (2m_l)\right) \left(\prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}\right) |M|^2. \quad (\text{A.5})$$

Supóngase que en el estado inicial tenemos un fotón de momento  $k_1 = (\omega_1, \vec{k}_1)$  y vector polarización  $\varepsilon \equiv \varepsilon_r(\vec{k}_1)$  y otro fotón de momento  $k_2 = (\omega_2, \vec{k}_2)$  y vector polarización  $\varepsilon \equiv \varepsilon_{r'}(\vec{k}_2)$ . En el estado final tendremos un electrón de momento  $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$  en el estado de spin  $u_1 \equiv u_s(\vec{p}_1)$  y un positrón de momento  $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$  en el estado de spin  $v_2 \equiv v_{s'}(\vec{p}_2)$ .

Para el caso de dos partículas finales la sección eficaz puede escribirse:

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}}{dt} = \frac{\hbar^2 c^2}{16\pi s^2} \langle |M|^2 \rangle \quad (\text{A.6})$$

donde  $s = (k_1 + k_2)^2/c^2$  y  $t = (k_1 - p_1)^2/c^2$  son las variables de Mandelstam.

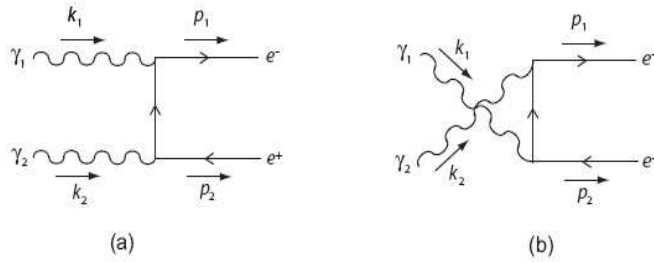


Figura A.1: Diagramas de Feynman para el proceso  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$

A nivel más bajo no nulo (nivel *árbol*), la amplitud de Feynman  $M$  resulta de dos diagramas de Feynman (ver Figura A.1), de modo que  $M = M_{(a)} + M_{(b)}$  y sus correspondientes contribuciones estan dadas por:

$$M_{(a)} = (-ie)\bar{u}(p_1)\gamma^\alpha\varepsilon_\alpha(k_1)i\frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_e c}{(p_1 - k_1)^2 - m_e^2 c^2}(-ie)v(p_2)\gamma^\beta\varepsilon_\beta(k_2) \quad (\text{A.7})$$

$$M_{(b)} = (-ie)\bar{u}(p_1)\gamma^\beta\varepsilon_\beta(k_2)i\frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_e c}{(p_1 - k_2)^2 - m_e^2 c^2}(-ie)v(p_2)\gamma^\alpha\varepsilon_\alpha(k_1), \quad (\text{A.8})$$

donde las  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac, y se define  $\not{a}^\mu = a^\mu\gamma_\mu$ . Se debe calcular

$$|M|^2 = |M_{(a)}|^2 + |M_{(b)}|^2 + M_{(a)}M_{(b)}^\dagger + M_{(b)}M_{(a)}^\dagger. \quad (\text{A.9})$$

Si las partículas colisionantes no están polarizadas (el estado de polarización inicial y final no estan completamente especificados) para obtener la sección eficaz no polarizada  $|M|^2$  se debe *promediar* sobre todos los estados iniciales de polarización y se debe *sumar* sobre todos los estados finales de spin. Es decir,

$$\langle |M|^2 \rangle \equiv \frac{1}{2} \sum_r \sum_s |M|^2. \quad (\text{A.10})$$

Para llevar a cabo estas sumas se usan relaciones de completitud para las sumas de spin:

$$\sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) = (\not{p} + mc); \quad \sum_{s=1,2} v_s(p)\bar{v}_s(p) = (\not{p} - mc), \quad (\text{A.11})$$

y para las sumas de polarización

$$\sum_r \varepsilon_r^\alpha(k)\varepsilon_r(k)^\beta = -g^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.12})$$

Se obtiene

$$\langle |M_{(a)}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left( (\not{p}_1 + m_e c) \gamma^\alpha \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_e c}{[(p_1 - k_1)^2 - m_e^2 c^2]^2} \gamma^\beta (\not{p}_2 - m_e c) \gamma_\beta (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_e c) \gamma_\alpha \right), \quad (\text{A.13})$$

$$\langle |M_{(b)}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left( (\not{p}_1 + m_e c) \gamma^\alpha \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_e c}{[(p_1 - k_1)^2 - m_e^2 c^2]^2} \gamma^\beta (\not{p}_2 - m_e c) \gamma_\beta (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_e c) \gamma_\alpha \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\langle M_{(a)} M_{(b)}^\dagger \rangle = \frac{e^4 \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e c) \gamma^\alpha (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_e c) \gamma^\beta (\not{p}_2 - m_e c) \gamma_\beta (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_e c) \gamma_\alpha]}{4[(p_1 - k_1)^2 - m_e^2 c^2][(p_1 - k_2)^2 - m_e^2 c^2]}, \quad (\text{A.15})$$

$$\langle M_{(b)} M_{(a)}^\dagger \rangle = \frac{e^4 \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e c) \gamma^\alpha (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_e c) \gamma^\beta (\not{p}_2 - m_e c) \gamma_\beta (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_e c) \gamma_\alpha]}{4[(p_1 - k_2)^2 - m_e^2 c^2][(p_1 - k_1)^2 - m_e^2 c^2]}, \quad (\text{A.16})$$

Para calcular las trazas involucradas se utilizan las propiedades de las trazas del producto de matrices de Dirac, algunas de ellas son <sup>1</sup>:

$$\text{Tr}(\not{A} \not{B}) = 4(AB)$$

$$\text{Tr}(\not{A} \not{B} \not{C} \not{D}) = 4[(AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC)]$$

$$\text{Tr}(\not{A}_1 \not{A}_2 \dots \not{A}_{2n}) = \text{Tr}(\not{A}_{2n} \dots \not{A}_2 \not{A}_1)$$

$$\text{Tr}(\not{A}_1 \not{A}_2 \dots \not{A}_{2k+1}) = 0.$$

Es conveniente trabajar en el sistema centro de masas, donde

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = \frac{s}{2}; \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \frac{s}{2} - m_e^2 c^2, \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{p}_1 = \vec{k}_2 \cdot \vec{p}_2 = \frac{m_e^2 c^2 - t}{2} - m_e^2 c^2; \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{k}_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{k}_1 = \frac{s + t - m_e^2 c^2}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Si la velocidad del electrón en el sistema centro de masas es  $\beta_e = \vec{p}_1/p_1^0$  se puede escribir  $t = m_e^2 c^2 - \frac{s}{2}(1 - \beta_e \cos(\theta))$  y Para integrar la ecuación  $\frac{d\sigma}{dt}$  en  $t$  los límites de integración serán

$$t_{\min} = m_e^2 c^2 - s \frac{1 + \beta_e}{2} \quad \text{y} \quad t_{\max} = m_e^2 c^2 - s \frac{1 - \beta_e}{2} \quad (\text{A.19})$$

Integrando se obtiene finalmente

$$\sigma_{\gamma\gamma}(E_\gamma, \epsilon) = \frac{\pi r_e^2}{2} (1 - \beta^2) \left[ 2\beta(\beta^2 - 2) + (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right], \quad (\text{A.20})$$

donde

$$r_e = \frac{e^4}{16\pi^2 m_e^2}. \quad (\text{A.21})$$

<sup>1</sup>Para más detalle consultar por ejemplo F. Mandl and G. Shaw (1984), pag 329.

## Apéndice B

# Método de cuadratura de Gauss

Se desea realizar el cálculo numérico de una cierta integral definida. El método básico con que se aproxima  $\int_a^b f(x)dx$  recibe el nombre de cuadratura numérica y emplea una suma del tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \tag{B.1}$$

para aproximar  $\int_a^b f(x)dx$ .

Los métodos de cuadratura numérica se basan en polinomios interpolantes. Se selecciona un conjunto de nodos distintos  $\{x_0, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[a, b]$  y después se integra el polinomio interpolante, por ejemplo el de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \tag{B.2}$$

y su término de error de truncamiento en  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \tag{B.3}$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx, \tag{B.4}$$

donde  $\xi(x)$  se encuentra en  $[a, b]$  para cada  $x, y$

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx \tag{B.5}$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Por tanto, la fórmula de cuadratura es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \tag{B.6}$$

con un error dado por

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx. \quad (\text{B.7})$$

Es decir que esta fórmula será exacta cuando aproxime cualquier polinomio de un grado menor o igual que  $n$ .

En la cuadratura gaussiana se escogen nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en el intervalo  $[a, b]$  y los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i). \quad (\text{B.8})$$

La selección óptima de estos valores es la que dé el resultado exacto de la clase de polinomios de mayor grado, es decir, la que ofrezca el mayor grado de precisión.

Los coeficientes  $c_j$  son arbitrarios y los nodos  $x_j$  están restringidos sólo por la especificación de que se encuentren en el intervalo de integración. Esto da  $2n$  parámetros a seleccionar. Si los coeficientes de un polinomio se consideran parámetros, la clase de polinomios de grado máximo  $2n-1$  también contiene  $2n$  parámetros. Por tanto, éste es el tipo de polinomio de grado mayor en que es posible esperar que la fórmula sea exacta si los coeficientes y nodos se eligen de manera correcta.

Como ejemplo ilustrativo supóngase que se quiere determinar  $c_1, c_2, x_1$  y  $x_2$  de modo que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \quad (\text{B.9})$$

de el resultado exacto siempre que  $f(x)$  sea un polinomio de grado  $2(2)-1=3$  o menor, es decir, cuando

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (\text{B.10})$$

para algún conjunto de constantes  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$ . Dado que

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx = a_0 \int 1 dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + a_3 \int x^3 dx, \quad (\text{B.11})$$

esto equivale a demostrar que la fórmula produce resultados exactos cuando  $f(x)$  es  $1, x, x^2$  y  $x^3$ . Por tanto, se necesita que:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2,$$



$$\begin{aligned}c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 &= \int_{-1}^1 x dx = 0, \\c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3, \\c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 &= \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución única

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (\text{B.12})$$

con que se obtiene la fórmula de aproximación

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right). \quad (\text{B.13})$$

Con esta técnica se podrían determinar los nodos y coeficientes de las fórmulas que proporcionan resultados exactos con los polinomios de grado superior. Pero se puede hacer uso de un tipo de polinomios en particular para obtenerlos más fácilmente. Los polinomios de Legendre son un conjunto  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$  de polinomios ortogonales con las siguientes propiedades:

Para cada  $n$ ,  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$

$\int_{-1}^1 P(x)P_n(x) dx = 0$ , siempre que  $P(x)$  sea un polinomio de un grado menor que  $n$ .

Las raíces de estos polinomios son diferentes, se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$  tienen simetría con respecto del origen y, lo más importante de todo, es la opción correcta para determinar los parámetros que resuelven el problema.

Los nodos  $x_1, \dots, x_n$  necesarios para producir una fórmula de la aproximación a la integral, que proporcione resultados exactos para cualquier polinomio de un grado menor que  $2n$  son las raíces del polinomio de Legendre de grado  $n$ . Esto se establece por medio del siguiente resultado:

**Teorema 1** Si se tiene que  $x_1, \dots, x_n$  son las raíces del polinomio de Legendre  $P_n(x)$  de  $n$ -ésimo grado y que para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , los números  $c_i$  están definidos por

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \quad (\text{B.14})$$

Si  $P(x)$  es un polinomio cualquiera de un grado menor que  $2n$ , entonces

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i). \quad (\text{B.15})$$

La demostración se encuentra en cualquier libro básico de cálculo numérico como por ejemplo Burden & Faires (2002).

Las constantes  $c_i$  necesarias para que la cuadratura funcione, pueden generarse a partir de la ecuación del teorema enunciado, pero afortunadamente las constantes  $c_i$  y las raíces de los polinomios de Legendre se tabulan ampliamente.

Una integral en un intervalo arbitrario  $[a, b]$  puede llevarse a otra en el intervalo  $[-1, 1]$  mediante el siguiente cambio de variables

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \iff x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]. \quad (\text{B.16})$$

La cuadratura gaussiana puede aplicarse de forma

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt. \quad (\text{B.17})$$

El método puede modificarse abiertamente para utilizarlo para aproximar integrales múltiples. Debido a la cantidad de cálculos que se requieren en una integral triple o de mayor orden, la cuadratura gaussiana es el método indicado.