



Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de La Plata

---

*Departamento de Electrotecnia. Cátedra de Trabajo Final.*

Trabajo Final: “Automatización de un Sistema de Medición de Antenas en Cámara Anecoica”

**Alumno:** 49583 – Luciano Giménez.

**Director:** Ing. Aurelio Juan Sanz.

**Lugar de realización:** Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR).

**Fecha:** 12 de Diciembre de 2008.

La Plata - Buenos Aires - Argentina.





**Cátedra de Trabajo Final - Electrónica**  
**Departamento de Electrotecnia**  
**Universidad Nacional de La Plata**

**Denominación del Trabajo Final:**

"Automatización de un Sistema de Medición de Antenas en Cámara Anecoica"

**Grupo de trabajo:**

| Nº de alumno | Nombre y Apellido | Calificación |
|--------------|-------------------|--------------|
| 49583        | Luciano Giménez   |              |

**Director (es):** Aurelio Juan Sanz.

**Subdirector (es):**

**Colaborador (es):**

**Lugar de realización:** Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR).

**Fecha:** 12 de Diciembre de 2008.

**Firma de los integrantes de la mesa examinadora:**

**Concepto general del Trabajo (\*):**

Comentarios sobre el trabajo:

(\*): Calificar con: regular (R) - Bueno (B) - Muy Bueno (MB) - Excelente (EX):



*A mi Mamá y a mi Papá.*



## *Agradecimientos*

*A mi mamá y a mi papá por el apoyo incondicional en todo y por haberme dado la oportunidad de estudiar lo que yo quería.*

*A mis tíos, tías y primas quienes en determinadas épocas de mi vida oficiaron de familia substituta brindándome siempre su apoyo y cariño.*

*A mis padrinos, por haberme elegido como ahijado y por su apoyo y cariño de siempre.*

*A mis amigos, compañeros de estudio, compañeros de trabajo, compañeros de viaje y personajes que han compartido distintas épocas de la Facultad y de la vida y que siempre me brindaron su apoyo, cariño y buena onda.*

*A Junior, Hugo y Fernando por su amistad, cariño y por aguantar mis locuras durante tantos años, incluso, hasta hoy.*

*A María Laura, por el apoyo y el cariño incondicional de todos los días.*

*A mi director, el Ing. Juan Sanz por la oportunidad, el apoyo, el aguante y la libertad para llevar a cabo este proyecto.*

*A los Ings. Ricardo Mantz y Enrique Spinelli de la Cátedra de Control Moderno por la ayuda brindada en distintas etapas del proyecto.*

*A Santiago Spagnolo, quien adaptó las partes mecánicas y me ayudó a armar y desarmar (varias veces) el posicionador de antena.*

*A todo el personal del IAR por recibirme con afecto desde el primer día y sin cuyo esfuerzo diario proyectos como éste no podrían ser llevados a cabo.*

*Y a todas las personas que hicieron posible mi educación en una Universidad pública, gratuita y estatal.*

*“El viaje es largo...”*



## Resumen

El objetivo de este proyecto consistió en el diseño e implementación de un sistema de control de movimiento para un posicionador de antena, empleado para realizar mediciones de radiofrecuencia en la cámara anecoica del Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR).

La principal dificultad a resolver fue asegurar que el comportamiento del posicionador de antena durante la medida sea independiente del tamaño y geometría de la carga. Si a esto se le suma que no se contaba con información sobre los parámetros físicos que determinan el comportamiento dinámico del posicionador, el problema del diseño e implementación de un control automático se hizo aún más complicado.

Se propuso como solución la implementación de un control robusto, insensible tanto a perturbaciones externas como a incertidumbres en los parámetros físicos propios del sistema a controlar conocido como *Control por Modo Deslizante*.

Dicha solución exigió contar con un modelo de estado del sistema a controlar. Para ello se utilizaron técnicas de Identificación de Sistemas, mediante las cuales se estimó y validó un modelo de estado apto para el diseño del sistema de control a lazo cerrado.

Así se implementó un control robusto, el cual fue sometido a ensayos básicos que permitieron validar el diseño del control propuesto, cumpliendo en una primera etapa los requerimientos del proyecto.

## Abstract

The aim of this project was the design and implementation of a motion control system for an antenna positioner used for radiofrequency measurements in the anechoic chamber placed at the Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR).

The main difficulty was to maintain a total independence of the dynamic response of the antenna positioner from its load's weight and shape. Moreover, if there exists a complete uncertainty of those parameters that govern the dynamic response of the positioner, the problem of designing and implementing a motion control system becomes even more complicated.

The proposed solution was the design of a robust motion control profile based in sliding modes techniques, insensitive not only to exogenous disturbances but also to the system's own physical parameters, known as *Sliding Mode Control*.

For the intended design, it was mandatory to have a space-state model of the antenna positioner. For the estimation and validation of such a model, System Identification procedures were applied to estimate and validate a suitable model for the design of the closed-loop control system.

That was the procedure that allowed to put in practice a robust motion control system which, after running basic tests, validated the proposed motion control profile satisfying the specified requirements for this first stage of the project.



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Índice . . . . .   | i         |
| <b>1 Sistemas de Medición de Antenas</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Introducción. . . . .  | 1         |
| 1.2 ¿Qué es un Sistema de Medición de Antenas? . . . . .   | 1         |
| 1.2.1 Necesidad de un Sistema de Medición de Antenas. . . . .  | 2         |
| 1.3 ¿Qué es lo que se pretende medir?. . . . .   | 3         |
| 1.4 Sistema de Coordenadas. . . . .  | 4         |
| 1.5 Propagación de las Ondas Electromagnéticas. . . . .  | 5         |
| 1.5.1 Ecuaciones de Maxwell. . . . .   | 5         |
| 1.5.2 Propagación de una Onda Electromagnética. . . . .  | 7         |
| 1.6 Potenciales Retardados. Radiación de Ondas Electromagnéticas. . . . .  | 10        |
| 1.6.1 Potenciales Retardados. . . . .  | 10        |
| 1.6.2 Radiación de Ondas Electromagnéticas. . . . .  | 12        |
| 1.7 Zonas de Radiación de una antena. Vector de Poynting. . . . .  | 14        |
| 1.8 Características de las antenas a medir. El Principio de Reciprocidad. . . . .                                | 16        |
| 1.9 Resumen. . . . .   | 18        |
| <b>2 Sistemas de Medición de Antenas: Campos de Medida.</b>  | <b>19</b> |
| 2.1 Introducción. . . . .  | 19        |
| 2.2 Estructura de un sistema de medición de antenas. . . . .   | 19        |
| 2.3 Determinación de un Diagrama de Radiación. . . . .   | 22        |
| 2.4 Otros parámetros que se miden a partir de los datos adquiridos. . . . .                                      | 23        |
| 2.4.1 Eficiencia de antena o eficiencia de apertura $\eta$ . . . . .   | 23        |
| 2.4.2 Intensidad de radiación y ángulo sólido del haz. . . . .   | 23        |
| 2.4.3 Directividad. . . . .  | 24        |
| 2.4.4 Ganancia. . . . .  | 24        |
| 2.5 Determinación de un diagrama de radiación a partir de la variación de $\theta$ y $\phi$ . . . . .            | 24        |
| 2.6 El campo de medida. Cámaras Anecoicas. . . . .   | 26        |
| 2.6.1 Efectos de las Reflexiones en la Medición de Antenas. . . . .  | 27        |
| 2.6.2 Cámaras Anecoicas. Qué son. Tipos de Cámaras Anecoicas. . . . .  | 29        |
| 2.6.3 Tipos de Cámaras Anecoicas. . . . .  | 29        |
| 2.6.4 Componentes de una cámara anecoica. . . . .  | 31        |
| 2.7 Características de la Cámara Anecoica construida en el predio del IAR.<br>Consideraciones de diseño. . . . . | 32        |
| 2.7.1 Absorbedores: Distribución dentro de la Cámara Anecoica. . . . .   | 34        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.7.2    | Construcción de la cámara anecoica. Características. . . . .   | 36        |
| 2.8      | Resumen. . . . .   | 38        |
| <b>3</b> | <b>Requerimientos del Sistema.</b>   | <b>39</b> |
| 3.1      | Introducción. . . . .  | 39        |
| 3.2      | Motivación y origen del proyecto. . . . .  | 39        |
| 3.3      | Especificaciones técnicas del proyecto. . . . .  | 42        |
| 3.3.1    | Requerimientos técnicos del sistema. . . . .   | 42        |
| 3.3.2    | Requerimientos adicionales del sistema. . . . .  | 43        |
| 3.4      | Componentes definidos del proyecto. . . . .  | 43        |
| 3.5      | Actividades a realizar en el marco del proyecto. . . . .   | 44        |
| 3.6      | Resumen. . . . .   | 45        |
| <b>4</b> | <b>Posicionador de Antena: Análisis.</b>   | <b>46</b> |
| 4.1      | Introducción. . . . .  | 46        |
| 4.2      | Sistema Posicionador de Antena. . . . .  | 46        |
| 4.3      | Subsistemas relacionados con el Posicionador de Antena. . . . .  | 49        |
| 4.4      | Motor de Corriente Continua. . . . .   | 51        |
| 4.4.1    | Principio de funcionamiento. . . . .   | 51        |
| 4.4.2    | Estructura básica de un Motor DC. . . . .  | 52        |
| 4.5      | Ecuaciones de un Motor de Corriente Continua. Primer Paso a un Modelo Matemático del Posicionador de Antena. . . . . | 55        |
| 4.6      | Motores DC. Configuración con Excitación Independiente de Campo. Justificación de su utilización. . . . .            | 58        |
| 4.7      | Características de los motores a utilizar. Especificaciones de la Electrónica de Potencia a implementar. . . . .     | 59        |
| 4.7.1    | Azimut. Especificaciones técnicas del motor DC. . . . .  | 60        |
| 4.7.2    | Elevación. Especificaciones técnicas del motor DC. . . . .   | 60        |
| 4.7.3    | Electrónica de potencia. . . . .   | 60        |
| 4.8      | Análisis de la Parte Mecánica del Posicionador de Antena. Sistema de Poleas. Caja Reductora. . . . .                 | 61        |
| 4.9      | Modelo Matemático de un Sistema Reductor. . . . .  | 65        |
| 4.10     | Utilización de los Modelos del Motor de Corriente Continua y del Sistema Reductor. . . . .                           | 67        |
| 4.11     | Resumen. . . . .   | 68        |
| <b>5</b> | <b>Modelo Matemático del Posicionador de Antena.</b>   | <b>69</b> |
| 5.1      | Introducción. . . . .  | 69        |
| 5.1.1    | Función Transferencia y Modelo de Estados. . . . .   | 69        |
| 5.2      | Función Transferencia de un Sistema Lineal. . . . .  | 70        |
| 5.3      | Modelo de Estados de un Sistema. . . . .   | 71        |
| 5.4      | Modelo de Estados Discreto de un Sistema. . . . .  | 75        |
| 5.4.1    | Matriz de Transición de Estados. . . . .   | 76        |
| 5.4.2    | Modelo de Estados Discreto de un Sistema Continuo. . . . .   | 77        |
| 5.5      | Función Transferencia del Posicionador de Antena para el Sentido de Movimiento en Azimut. . . . .                    | 78        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.6      | Modelo de Estados del posicionador de antena para el sentido de movimiento en azimut. . . . .   | 85         |
| 5.7      | Resumen. . . . .  | 87         |
| <b>6</b> | <b>Control de sistemas por Modo Deslizante.</b>   | <b>88</b>  |
| 6.1      | Introducción. . . . .   | 88         |
| 6.2      | Por qué utilizar un control por modo deslizante en este proyecto. . . . .   | 88         |
| 6.3      | Sistemas de Estructura Variable (SEV). Introducción. . . . .  | 90         |
| 6.3.1    | Ejemplo 1: Sistema de estructura variable. . . . .  | 91         |
| 6.3.2    | Tipos de Sistemas de Estructura Variable (SEV). . . . .   | 92         |
| 6.4      | El Modelo del Doble Integrador y su Relación con el Modelo del Posicionador de Antena. . . . .  | 94         |
| 6.4.1    | Análisis del modelo del Doble Integrador y su Relación con el Modelo del Posicionador de Antenas. . . . .                                       | 94         |
| 6.4.2    | Modelo de Estados del Doble Integrador. . . . .   | 97         |
| 6.5      | Sistemas de Estructura Variable (SEV) y Modos Deslizantes. Ejemplo 6.2: Sistema de Estructura Variable con cambio en la Realimentación. . . . . | 98         |
| 6.6      | Sistemas de Estructura Variable (SEV) y Modos Deslizantes. Ejemplo 6.3: Sistema de Estructura Variable con Cambio en la Excitación. . . . .     | 108        |
| 6.7      | Control por Modo Deslizante. Fundamentos Teóricos. . . . .  | 113        |
| 6.7.1    | Modos Deslizantes. Definiciones. . . . .  | 113        |
| 6.7.2    | Modos Deslizantes. Condiciones de existencia. . . . .   | 116        |
| 6.7.3    | Modo de alcance. Importancia de la acción de control $u$ . Interpretación geométrica de la condición de existencia. Ejemplos. . . . .           | 118        |
| 6.7.4    | Modos Deslizantes. Justificación de por qué se utiliza el Modelo de Estados. . . . .  | 124        |
| 6.8      | Control de Sistemas Lineales por Modo Deslizante. Análisis y Diseño de Lazos de Control. . . . .  | 125        |
| 6.8.1    | Condiciones de Existencia para Sistemas Lineales. . . . .   | 126        |
| 6.8.2    | Análisis de Sistemas Lineales durante el Modo Deslizante. Método del Control Equivalente. . . . .   | 127        |
| 6.8.3    | Análisis de los Sistemas Lineales durante el Modo Deslizante. Dinámica del Régimen Deslizante Lineal. . . . .                                   | 128        |
| 6.8.4    | Análisis de Sistemas Lineales durante el Modo Deslizante. Interpretación Física de la Señal de Control Equivalente $u_{eq}$ . . . . .           | 130        |
| 6.8.5    | Diseño de un Control por Modo Deslizante. Método de Asignación de Raíces. . . . .   | 131        |
| 6.9      | Robustez del Modo Deslizante. . . . .   | 135        |
| 6.9.1    | Efecto de las Perturbaciones sobre la Condición de Existencia. . . . .  | 135        |
| 6.9.2    | Efecto de las perturbaciones sobre la dinámica de lazo cerrado. . . . .   | 136        |
| 6.10     | Resumen. . . . .  | 137        |
| <b>7</b> | <b>Identificación de Sistemas.</b>  | <b>138</b> |
| 7.1      | Introducción. . . . .   | 138        |
| 7.2      | ¿Por qué surge la necesidad de aplicar técnicas de identificación de sistemas en este proyecto? . . . . .                                       | 138        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 7.3      | ¿Qué es un sistema? - Definición y clasificación de sistemas. . . . .  | 140        |
| 7.3.1    | Sistemas Dinámicos. Definición. . . . .  | 141        |
| 7.3.2    | Modelo de un Sistema. Definición. Clasificación. . . . .   | 141        |
| 7.4      | Identificación de Sistemas. Introducción. . . . .  | 142        |
| 7.4.1    | Métodos de identificación. Clasificación. . . . .  | 143        |
| 7.5      | Técnicas de Identificación No Paramétricas. . . . .  | 145        |
| 7.5.1    | Estimación de la Respuesta al Impulso. . . . .   | 146        |
| 7.5.2    | Estimación de la Respuesta en Frecuencia. . . . .  | 147        |
| 7.6      | Técnicas de Identificación Paramétricas. . . . .   | 148        |
| 7.6.1    | El Operador Retardo $q$ . Definición. . . . .  | 148        |
| 7.6.2    | Estructuras de Modelos Preestablecidos. Modelos “Ready-Made”. . . . .  | 149        |
| 7.6.3    | Modelos propuestos por el usuario (“Tailor-Made”). Identificación de un modelo de estados. . . . .                                     | 151        |
| 7.6.4    | Identificación de un Modelo de Estados: El Modelo de Innovación. . . . .   | 152        |
| 7.7      | Predicción. Error de Predicción. Aplicación a la Identificación de Sistemas. . . . .   | 154        |
| 7.7.1    | Error de Ecuación (Equation Error). . . . .  | 155        |
| 7.7.2    | Error de Salida (Output Error). . . . .  | 155        |
| 7.7.3    | Método de Predicción de Error (Prediction Error Method - PEM). . . . .   | 156        |
| 7.8      | Regresión Lineal. . . . .  | 159        |
| 7.9      | Modelos de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo. Modelos Determinísticos y Estocásticos. . . . .                                 | 159        |
| 7.10     | El Método de lo mínimos cuadrados . . . . .  | 160        |
| 7.10.1   | El método de los Mínimos Cuadrados (Least Squares) . . . . .   | 161        |
| 7.10.2   | Mínimos Cuadrados Recursivos (Recursive Least Squares) . . . . .   | 162        |
| 7.10.3   | Otros Métodos de Estimación de Parámetros . . . . .  | 163        |
| 7.11     | Métodos de Identificación de Modelos de Estados. . . . .   | 163        |
| 7.11.1   | Estimación del Modelo de Estados mediante PEM . . . . .  | 164        |
| 7.11.2   | Estimación del Modelo de Estados por el Método de Subespacio de Estados. (Subspace State-Space System Identification - 4SID) . . . . . | 165        |
| 7.12     | El Filtro de Kalman . . . . .  | 166        |
| 7.12.1   | Planteo del Problema que resuelve el filtro de Kalman. . . . .   | 167        |
| 7.12.2   | Algoritmo del Filtro de Kalman. . . . .  | 168        |
| 7.13     | El Procedimiento de Identificación . . . . .   | 170        |
| 7.13.1   | El procedimiento de identificación . . . . .   | 170        |
| 7.13.2   | Paso 1: Obtención de los datos de entrada-salida . . . . .   | 172        |
| 7.13.3   | Paso 2: Tratamiento previo de los datos obtenidos. . . . .   | 173        |
| 7.13.4   | Paso 3: Selección de la estructura del modelo. . . . .   | 173        |
| 7.13.5   | Paso 4: Obtención de los parámetros del modelo. . . . .  | 175        |
| 7.13.6   | Paso 5: Validación del modelo. . . . .   | 175        |
| 7.14     | Resumen. . . . .   | 176        |
| <b>8</b> | <b>Hardware. Primera Parte.</b>  | <b>177</b> |
| 8.1      | Introducción . . . . .   | 177        |
| 8.1.1    | Estructura del Sistema de Medida. Subsistemas. . . . .   | 178        |
| 8.2      | Subsistema Controlador Digital. . . . .  | 179        |
| 8.2.1    | Requerimientos del Controlador Digital. . . . .  | 179        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 8.2.2     | Selección del Controlador Digital. . . . .  | 180        |
| 8.2.3     | Microprocesadores y Módulos Rabbit. . . . .   | 184        |
| 8.2.4     | ¿Por qué se optó por un microprocesador Rabbit? . . . . .   | 185        |
| 8.2.5     | El microprocesador Rabbit3000a. Arquitectura. . . . .   | 189        |
| 8.2.6     | El entorno de desarrollo Dynamic C. . . . .   | 195        |
| 8.3       | Subsistema Electrónica de Potencia. . . . .   | 197        |
| 8.3.1     | Señal PWM para el Control de Motores. . . . .   | 197        |
| 8.3.2     | Control de Motores de Corriente Continua. . . . .   | 198        |
| 8.3.3     | Módulos de Potencia AMC25A20DD. . . . .   | 199        |
| 8.3.4     | Fuente de Alimentación de la Etapa de Potencia. . . . .   | 203        |
| 8.3.5     | Placa Interfaz entre el Controlador Rabbit3000 y los Módulos de Potencia 25A20DD. . . . .                               | 205        |
| 8.3.6     | Codificación de Posición. Encoder. . . . .  | 206        |
| 8.3.7     | Adquisición de la Velocidad de Giro del Motor DC. Tacómetro. . . . .  | 207        |
| 8.4       | Resumen. . . . .  | 207        |
| <b>9</b>  | <b>Estimación del Modelo de Estados del Posicionador.</b>   |            |
|           | <b>Primera Parte: Experimento de Identificación.</b>  | <b>208</b> |
| 9.1       | Introducción. . . . .   | 208        |
| 9.2       | Modelo Aproximado a Partir del Modelo Algebraico. . . . .   | 209        |
| 9.2.1     | Obtención de Información del Sistema a partir de Experimentos Sencillos. . . . .  | 211        |
| 9.2.2     | Medición de la Constante de Tiempo Eléctrica. . . . .   | 212        |
| 9.2.3     | Conclusiones a partir los experimentos previos realizados al posicionador. . . . .                                      | 217        |
| 9.3       | Cálculo del Modelo Discreto del Posicionador. . . . .   | 218        |
| 9.3.1     | Modelo aproximado del modelo continuo y el equivalente discreto del posicionador de antenas. Valores iniciales. . . . . | 226        |
| 9.4       | Controlabilidad y Observabilidad del Posicionador de Antena. . . . .  | 228        |
| 9.5       | Diseño e Implementación del Experimento de Identificación. . . . .  | 230        |
| 9.5.1     | Estructura propuesta para el ensayo de Identificación. . . . .  | 231        |
| 9.5.2     | Sobre la señal de excitación $u[n]$ . Condición “ <i>Persistently Exciting</i> ”. Factor de Cresta. . . . .             | 232        |
| 9.5.3     | Señales de Entrada para la Identificación de Sistemas. Propiedades. . . . .   | 236        |
| 9.5.4     | Señales a utilizar. Propiedades. . . . .  | 240        |
| 9.5.5     | Comparación de las Señales de Excitación a utilizar. . . . .  | 247        |
| 9.5.6     | Estructura Final del Experimento de Identificación. . . . .   | 249        |
| 9.5.7     | Resultados obtenidos. Selección de los datos a utilizar. . . . .  | 254        |
| 9.5.8     | Determinación del parámetro $n_k$ . . . . .   | 255        |
| 9.6       | Resumen. . . . .  | 256        |
| <b>10</b> | <b>Estimación del Modelo de Estados del Posicionador. Segunda Parte.</b>  | <b>257</b> |
| 10.1      | Introducción . . . . .  | 257        |
| 10.2      | El Toolbox de Identificación de Sistemas. . . . .   | 257        |
| 10.2.1    | Visualización de datos (Data Views). . . . .  | 259        |
| 10.2.2    | Operaciones (Operations). . . . .   | 259        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 10.2.3    | Visualización de Modelos (Model View).  | 261        |
| 10.3      | Análisis y Preprocesamiento de los Datos de Entrada - Salida.                                       | 262        |
| 10.4      | Respuesta en Frecuencia y Respuesta al Escalón  | 268        |
| 10.5      | Estimación de Modelos. Métodos Disponibles.   | 270        |
| 10.6      | Herramientas de Validación.   | 276        |
| 10.6.1    | Ajuste (FIT)  | 276        |
| 10.6.2    | Análisis de Residuos  | 278        |
| 10.6.3    | Respuesta en Frecuencia   | 280        |
| 10.6.4    | Respuesta Transitoria   | 280        |
| 10.6.5    | Polos y Ceros   | 280        |
| 10.7      | Estimación del Modelo del Posicionador de Antena  | 282        |
| 10.8      | Modelo de Proceso del Posicionador.   | 282        |
| 10.9      | Estimación de Modelos Paramétricos Lineales.  | 284        |
| 10.9.1    | Estimación del Modelo de Estados del Posicionador. Parte 1.   | 290        |
| 10.9.2    | Estimación del Modelo de Estados del Posicionador. Parte 2.   | 297        |
| 10.10     | Modelo de Estados del Posicionador de Antena para el Movimiento en Azimut.                          | 302        |
| 10.11     | Resumen.  | 310        |
| <b>11</b> | <b>Diseño del Lazo de Control.</b>  | <b>311</b> |
| 11.1      | Introducción.   | 311        |
| 11.2      | Especificaciones del Sistema a Lazo Cerrado.  | 312        |
| 11.3      | Consideraciones Previas al Diseño del lazo de control.  | 313        |
| 11.3.1    | Controlabilidad del Sistema.  | 314        |
| 11.3.2    | Modelo de Orden Reducido del Posicionador de Antena.  | 314        |
| 11.4      | Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante.   | 315        |
| 11.5      | Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante con Error de Estado Estacionario Nulo.               | 321        |
| 11.6      | Resumen.  | 328        |
| <b>12</b> | <b>Hardware. Segunda Parte: Adquisición.</b>  | <b>330</b> |
| 12.1      | Introducción.   | 330        |
| 12.2      | Estructura del Sistema de Control a Lazo Cerrado del Posicionador de Antena (Azimut).               | 330        |
| 12.3      | Canal de Adquisición de la Corriente de Armadura ( $i_a(t)$ ).                                      | 333        |
| 12.3.1    | Requerimientos desde el Módulo AMC25A20DD.  | 333        |
| 12.3.2    | Requerimientos desde en Controlador Rabbit3000.   | 334        |
| 12.3.3    | Resumen de Requerimientos.  | 335        |
| 12.3.4    | Diseño del Canal de Adquisición. Esquemáticos.  | 336        |
| 12.4      | Canal de Adquisición de la Velocidad Angular $\omega_m(t)$ .  | 345        |
| 12.4.1    | Requerimientos Impuestos por el Tacómetro.  | 345        |
| 12.4.2    | Requerimientos desde el Controlador Rabbit3000.   | 347        |
| 12.4.3    | Resumen de Requerimientos del Canal de Adquisición de Velocidad Angular.                            | 347        |
| 12.4.4    | Diseño del Canal de Adquisición. Esquemáticos.  | 348        |
| 12.5      | Adquisición de la Posición Angular. Comunicación con el Transductor de Posición ( <i>Encoder</i> ). | 355        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 12.5.1    | Requerimientos. . . . .   | 356        |
| 12.5.2    | Circuito de Comunicación con el Encoder. . . . .  | 357        |
| 12.5.3    | Funciones en C utilizadas para la comunicación. . . . .   | 357        |
| 12.6      | Resumen. . . . .  | 359        |
| <b>13</b> | <b>Implementación del Control por Modo Deslizante.</b>  | <b>360</b> |
| 13.1      | Introducción. . . . .   | 360        |
| 13.2      | Funciones del Microprocesador Rabbit3000 en el Lazo de Control. Integración de los distintos Subsistemas. . . . . | 360        |
| 13.3      | Implementación Práctica del Bloque Conmutador. Cálculo de $s(x)$ . . . . .  | 363        |
| 13.4      | Implementación del Estado Integral. . . . .   | 366        |
| 13.5      | Generación de la Señal de Referencia Utilizando una Función Rampa. . . . .  | 366        |
| 13.6      | Determinación de la Frecuencia de Muestreo. . . . .   | 367        |
| 13.7      | Implementación del Sistema de Control a Lazo Cerrado. Resultados Obtenidos. . . . .                               | 367        |
| 13.7.1    | Resultados Obtenidos. . . . .   | 368        |
| 13.7.2    | Conclusiones sobre los resultados obtenidos. . . . .  | 373        |
| 13.8      | Resumen. . . . .  | 375        |
| <b>14</b> | <b>Conclusiones.</b>  | <b>376</b> |
| 14.1      | Mejoras a Futuro. . . . .   | 377        |
| 14.1.1    | Del Control del Posicionador de Antena. . . . .   | 377        |
| 14.1.2    | Del Sistema de Medida en General. . . . .   | 378        |
| <b>A</b>  | <b>Cálculo de la expresión simplificada de <math>H_1(s)</math>.</b>   | <b>379</b> |
| <b>B</b>  | <b>Plano de Fase.</b>   | <b>382</b> |
| B.1       | Trayectorias en el espacio de estados. . . . .  | 382        |
| B.1.1     | Introducción. . . . .   | 382        |
| B.1.2     | Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. . . . .   | 383        |
| B.1.3     | Ejemplo 1. . . . .  | 383        |
| B.2       | El Método del Plano de Fase. Fundamentos básicos. . . . .   | 384        |
| B.2.1     | Ejemplo 2: Sistema en el modelo canónico controlable. Trayectorias en el plano de fase. . . . .                   | 386        |
| B.2.2     | Interpretación de las Trayectorias. Propiedades. . . . .  | 387        |
| B.3       | Análisis en el Plano de Fase del Doble Integrador con Conmutación en la Realimentación (Ejemplo 6.1). . . . .     | 388        |
| B.3.1     | Análisis del sistema a lazo cerrado con la llave en la posición A ( $k_1 = -1$ ). . . . .                         | 389        |
| B.3.2     | Análisis en el Plano de Fase. . . . .   | 389        |
| B.3.3     | Análisis del sistema con la llave en la posición B ( $k_1 = 1$ ). . . . .   | 390        |
| B.3.4     | Análisis en el Plano de Fase. . . . .   | 391        |
| B.4       | Análisis en el plano de fase del doble integrador con conmutación en excitación (Ejemplo 6.3). . . . .            | 392        |
| B.4.1     | Análisis para $e > 0$ . . . . .   | 392        |
| B.4.2     | Análisis para $e < 0$ . . . . .   | 394        |

|                     |   |            |
|---------------------|---|------------|
| B.4.3               | Comportamiento del Sistema Completo. . . . .  | 394        |
| B.5                 | Análisis en el plano de fase $e$ y $\dot{e}$ . . . . .                                    | 395        |
| <b>C</b>            | <b>Identificación de un Modelo Tipo ARX.</b>  | <b>398</b> |
| C.1                 | Condición de Persistencia de la excitación ( <i>Persistently Exciting Condition</i> ).403 |            |
| C.2                 | Mínimos Cuadrados Recursivos. . . . .   | 404        |
| <b>Bibliografía</b> |   | <b>407</b> |

# Capítulo 1

## Sistemas de Medición de Antenas

### 1.1 Introducción.

Durante el último siglo la transmisión de ondas electromagnéticas a través del espacio se ha convertido en una práctica cada vez más común y demandante en todos sus aspectos. Como era de esperar, las antenas no han quedado al margen de dichas exigencias.

Una antena puede definirse como la interfaz entre un circuito eléctrico y el espacio libre que permite radiar o recibir ondas electromagnéticas lo que la convierte en un dispositivo poco usual ya que en la mayoría de los casos debe adaptarse a distintos requerimientos dependiendo de cada aplicación.

Si bien este documento no pretende ser un manual sobre como medir los parámetros de una antena, es necesario definir algunos conceptos y técnicas de medición que permitirán entender los requerimientos que dieron origen a la necesidad de construir un sistema de medición de antenas y a la automatización del mismo.

Los Capítulos 1 y 2 tienen por objetivo mostrar la disposición y funcionamiento básico de un sistema de medición de antenas. Para esto se darán algunas definiciones y procedimientos básicos involucrados en las técnicas de medición de antenas que son de uso común. Técnicas más complejas pueden encontrarse en la bibliografía o serán mencionadas en el transcurso del avance del proyecto.

### 1.2 ¿Qué es un Sistema de Medición de Antenas?

Un sistema de medición de antenas es un instrumento de laboratorio. El mismo está compuesto por distintas partes, que se denominan subsistemas, los cuales deben funcionar en conjunto para lograr un objetivo: medir los distintos parámetros que caracterizan a una antena.

Un sistema de medición de antenas no solo está conformado por la instrumentación que permite llevar a cabo la medida sino que también lo compone el espacio físico especialmente diseñado para la misma. En conjunto forman lo que se denomina Campo de Medida (Antenna-Range).

Los campos de medida pueden ser de diversos tipos dependiendo del tipo de medida a realizar. Los mismos pueden ser lugares abiertos así como lugares cerrados, siendo estos últimos cada vez más implementados gracias a que las técnicas de medición han evolucionado.

nado no solo para permitir trasladar los campos de medida implementados al aire libre a lugares cerrados, sino también para obtener resultados cada vez más exactos.

Los campos de medida cerrados se conocen Cámaras Anecoicas y consisten en recintos diseñados para reducir las reflexiones no deseadas mediante el revestimiento de sus paredes internas de material absorbente de ondas electromagnéticas. De esta forma las medidas electromagnéticas en el espacio libre pueden ser simuladas con alto grado de aceptabilidad.

En la figura 1.1(a) se puede observar el campo de medida actualmente funcionando en las instalaciones del IAR. En la figura 1.1(b) se observa una cámara anecoica similar a la que se desea implementar en el Instituto.

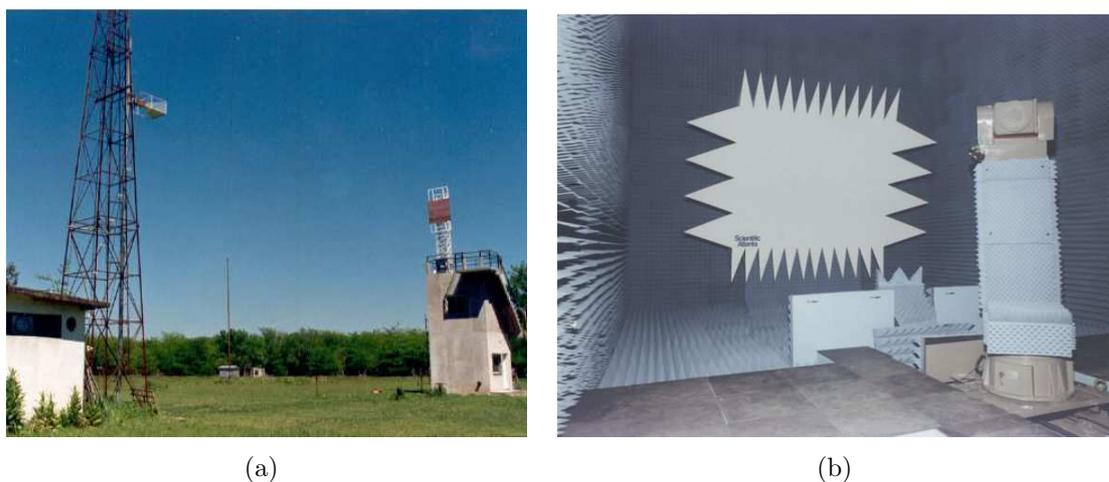


Figura 1.1: Ejemplos de campos de medida de antenas. (a) Abierto y (b) Cámara Anecoica

### 1.2.1 Necesidad de un Sistema de Medición de Antenas.

Una de las actividades del área de Transferencia de Tecnología del Instituto Argentino de Radioastronomía es el diseño, construcción y medidas de antenas de radiofrecuencia.

Dichas actividades consisten en varias etapas que en forma general se dividen en:

1. Estudio de los requerimientos.
2. Diseño utilizando herramientas de diseño asistido por computadoras (CAD) que permitirán hallar el modelo de antena que mejor se ajuste a los requerimientos indicados como así también la simulación de las mismas a modo de predecir el comportamiento de la antena real.
3. Construcción y medición de la antena
4. Corrección del modelo real de la antena.
5. Construcción y medición del modelo final de la antena.

Como se puede apreciar la medición de una antena es solo una parte de un proceso mucho más complejo. Evaluar el desempeño de una antena según los requerimientos especificados permitirá la validación y mejora del diseño.

La necesidad de tener un sistema automatizado que permita la medición de una antena se debe tanto a la creciente demanda de especificaciones más complejas y demandantes a la hora de diseñar una antena como también al uso masivo que existe de la computadora personal en este tipo de actividades.

Como punto de partida para el análisis, un criterio práctico establece que *una antena de  $M$  longitudes de onda requiere  $16\pi M$  puntos en cada dirección para ser descrita correctamente* [1]. A partir de esto, para una antena común se alcanza un número de muestras necesarias cercano a 20000 lo cual justifica aún más el uso de un sistema computarizado capaz de procesar y postprocesar las muestras adquiridas.

### 1.3 ¿Qué es lo que se pretende medir?

El objetivo principal en el diseño de una antena es lograr una determinada distribución de energía en el espacio de la forma más eficiente, esto es, radiar la mayor cantidad de energía minimizando las pérdidas y las reflexiones.

Esencialmente la medición de una antena tiene como objetivo obtener dos parámetros básicos:

- El Diagrama de Irradiación de una antena (Antenna Pattern).
- La adaptación de la antena (impedancia de entrada).

El sistema de medición de antenas permitirá cuantificar cuan eficientemente es llevada a cabo esta tarea mediante la obtención diagrama de radiación.

Esto permitirá:

- Ajustar componentes críticos de la antena así como las dimensiones de la misma.
- Almacenamiento y postprocesamiento de datos.
- Inspección y control del diseño.
- Verificar el diseño de la antena.
- Evaluar los errores.

Un diagrama de radiación típico se observa en la figuras 1.2(a) y 1.2(b).

La figura 1.2(a) muestra como se distribuye la energía en el espacio alrededor de la antena bajo ensayo localizada en el centro del diagrama polar.

La figura 1.2(b) es otra forma de representación que permite visualizar con mayor resolución algunos puntos del espacio (principalmente cuando se producen nulos).

Ahora, hasta aquí no se ha dicho nada de cómo obtener dichos diagramas de radiación. Como puede verse en la figura 1.2(a), ambos gráficos representan la distribución de energía espacial generada por la antena bajo ensayo. Medir esto de forma correcta implica tener en cuenta algunas consideraciones y conceptos previos que permitirán no solo entender como funciona un sistema de medición de antenas sino también especificar los requerimientos de este proyecto.

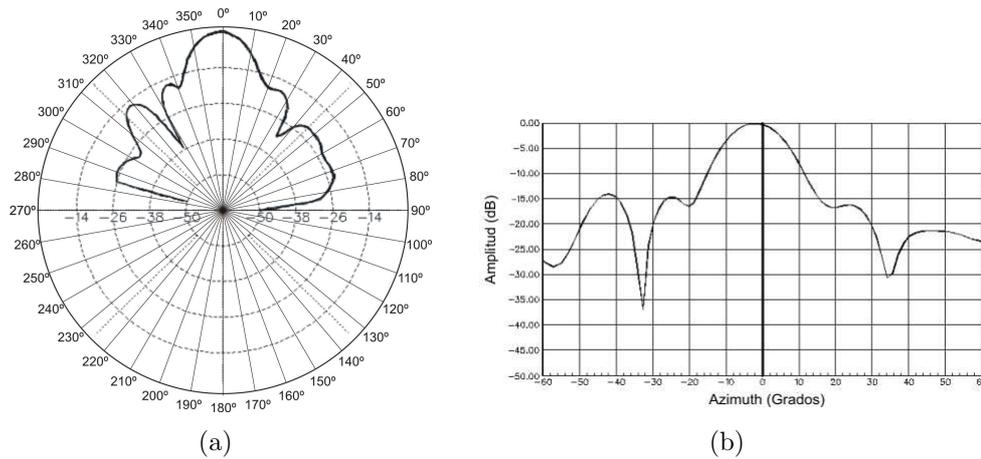


Figura 1.2: Diagrama de radiación de una antena en a) forma polar y b) forma rectangular

### 1.4 Sistema de Coordenadas.

La correcta elección del sistema de coordenadas permite simplificar el estudio de diversos problemas. En el caso del estudio de antenas se utiliza por lo general un sistema de coordenadas esférico asociado a la antena a ensayar como se observa en la figura 1.3.

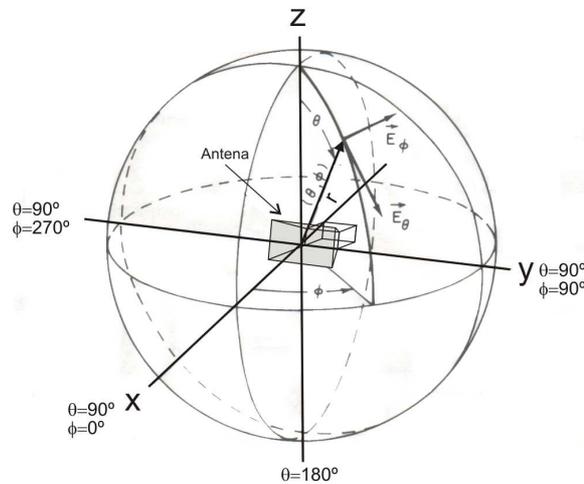


Figura 1.3: Sistema de coordenadas esféricas con el origen ubicado en la antena bajo ensayo

Como puede observarse, los distintos parámetros de una antena se miden sobre la superficie de una esfera cuyo centro se halla en la antena bajo ensayo (el origen de coordenadas).

Si bien, cualquier punto puede ser representado en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  los resultados se expresan más fácilmente en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  las cuales se hallan relacionadas mediante las siguientes relaciones de transformación:

$$\begin{aligned}x &= r.\text{sen}(\theta).\text{cos}(\phi) \\y &= r.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\phi) \\z &= r.\text{cos}(\theta)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Cuando la distancia  $r$  a un punto de referencia es fija (como sucede, por ejemplo, en los sistemas de medición de antenas de campo lejano) solo las dos coordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$  son variables. Para una valor fijo de  $\theta$  y variando  $\phi$  de 0 a 360 grados se obtienen los diagramas de radiación como en la figura 1.2.

## 1.5 Propagación de las Ondas Electromagnéticas.

Para caracterizar completamente el campo de radiación de una antena es necesario medir la amplitud del campo radiado, la fase relativa, la polarización y la ganancia de potencia a la frecuencia operación de la misma. Como se mencionó en la sección anterior, dichos parámetros son medidos sobre la superficie de una esfera cuyo centro se halla en la antena a ensayar.

Antes de concentrarse en cómo medir cada uno de los parámetros, es necesario hacer una pequeña introducción a la propagación de las ondas electromagnéticas. Esto permitirá entender:

- Cómo es capaz de radiar energía una antena.
- Cómo puede medirse dicha energía radiada.
- Que consideraciones se tienen en cuenta a la hora del diseño de un campo de medida.

Tomando como punto de partida las ecuaciones de Maxwell, se introducirá el concepto de potenciales retardados para obtener la expresión del vector de Poynting para un punto en el espacio alrededor de una antena.

### 1.5.1 Ecuaciones de Maxwell.

En su forma diferencial las ecuaciones de Maxwell para el caso general están dadas por:

$$\nabla \times H = \sigma.E + \varepsilon.\frac{dE}{dt}\tag{1.2}$$

$$\nabla \times E = -\mu.\frac{dH}{dt}\tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot H = 0\tag{1.4}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}\tag{1.5}$$

siendo:

$\nabla \times$  el operador rotor.

$\nabla \cdot$  el operador divergencia.

$E$  campo eléctrico [*volt/m*].

$H$  campo magnético [*A/m*].

$\sigma$  conductividad del elemento [*Siemens/m*].

$\varepsilon$  permisividad del medio [*Faraday/m*].

$\mu$  permeabilidad del medio [*Henry/m*].

$\rho$  densidad de carga. [*Coulomb/m*].

De donde, a partir de la ecuación (1.2) se observa que tanto la corriente de desplazamiento como la corriente de conducción generan un campo magnético y de (1.3) que un campo magnético variable genera un campo eléctrico.

Luego, para un medio homogéneo en el cual no hay carga ni conductividad ( $\rho = 0$ ,  $\sigma = 0$ ) como lo es un campo de medida de antenas, las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\nabla \times H = \varepsilon \cdot \frac{dE}{dt} \quad (1.6)$$

$$\nabla \times E = -\mu \cdot \frac{dH}{dt} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot E = 0. \quad (1.9)$$

Siendo más interesantes para analizar la propagación de las ondas electromagnéticas. Si bien el segundo juego de ecuaciones es una simplificación del primero, a partir de ambos se llega a la misma conclusión: *un campo eléctrico variable produce un campo magnético y a su vez un campo magnético variable produce un campo eléctrico* [2]. De esta forma, si existe una perturbación, supongamos de campo eléctrico, esta producirá un campo magnético variable que su vez generará campo eléctrico variable y así sucesivamente, por lo que se puede suponer que existe una serie de transferencias de energía entre ambos campos cuando se excita alguno de ellos. Luego, si la energía magnética no está confinada a la misma porción del espacio que la energía eléctrica de la cual deriva, es decir, que se desplaza algo más allá en el espacio y a su vez la energía eléctrica derivada a partir de la energía magnética también se desplaza y así sucesivamente de modo que cada vez que la energía cambie de forma se produzca un desplazamiento en el espacio entonces se producirá la propagación de una onda electromagnética. Éste es el principio de funcionamiento de una antena.

Para entender como se propaga una onda electromagnética el próximo paso será hallar las expresiones de campo eléctrico y magnético a partir de las ecuaciones (1.6-1.9) ya que consideraremos un medio homogéneo sin cargas ni conductividad.

El primer paso será obtener un juego de ecuaciones que dependan únicamente del campo eléctrico  $E$  o del campo magnético  $H$ .

Aplicando el operador rotor  $\nabla \times$  a ambos miembros de la ecuación (1.7) y teniendo en cuenta que el orden de derivación no afecta al resultado:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \cdot \nabla \times \frac{dH}{dt} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \cdot \frac{d(\nabla \times H)}{dt}. \quad (1.10)$$

Luego, sustituyendo (1.6) en el miembro derecho de (1.10)

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \varepsilon \cdot \frac{d^2 E}{dt^2} \quad (1.11)$$

y dado que la divergencia del campo eléctrico es nula ( $\nabla \cdot E = 0$ ) la ecuación (1.11) puede escribirse de la siguiente forma<sup>1</sup>:

$$\nabla^2 E = \mu \varepsilon \cdot \frac{d^2 E}{dt^2} \quad (1.12)$$

obteniéndose una ecuación diferencial parcial de segundo orden conocida como ecuación de ondas<sup>2</sup> a partir de la cual se observa que la velocidad de propagación será:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}. \quad (1.13)$$

Procediendo de manera análoga se obtiene la ecuación de propagación para el campo magnético:

$$\nabla^2 H = \mu \varepsilon \cdot \frac{d^2 H}{dt^2}. \quad (1.14)$$

Así se obtuvieron dos ecuaciones que describen como se propagan los campos eléctrico y magnético, pero es necesario tener en cuenta que ambas ecuaciones provienen de las ecuaciones (1.2) y (1.3) por lo que ambas son magnitudes físicas inseparables, es decir, no se puede tener una perturbación eléctrica sin que haya una perturbación magnética y viceversa verificándose que una onda electromagnética que se propaga posee una componente de campo eléctrico y otra de campo magnético.

## 1.5.2 Propagación de una Onda Electromagnética.

Analizar como ocurre este fenómeno, principalmente el concepto de onda plana, permitirá entender qué es concretamente lo que se mide en un campo de medición de antenas y bajo qué condiciones.

En primer lugar se obtendrá la expresión matemática para cada uno de los campos. El problema consiste en resolver las ecuaciones en derivadas parciales (1.12) y (1.14).

---

<sup>1</sup>Se puede demostrar que el rotor del rotor de cualquier vector se puede expresar de la siguiente forma:  $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$  Siendo  $\vec{V}$  un vector cualquiera.

<sup>2</sup>La expresión general de la ecuación de ondas está dada por:  $u_{xx} - \frac{1}{v^2} u_{tt} = 0$  cuya solución es  $u = u(x, t)$  y  $v$  es la velocidad de propagación. Esta ecuación es un caso particular de una ecuación diferencial parcial de segundo orden cuya expresión general es:  $A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = f(u, u_x, u_y, x, y)$ .

### Solución para el Campo Eléctrico.

La solución a obtener deberá verificar la ecuación (1.12) que se repite a continuación.

$$\nabla^2 E = \mu\varepsilon \cdot \frac{d^2 E}{dt^2} \quad (1.15)$$

donde  $E$  es un vector, pero si para simplificar los cálculos se supone que solo tiene componentes sobre el eje  $y$ . Por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{aligned} E_x = 0 &\Rightarrow \frac{dE_x}{dt} = 0 \\ E_z = 0 &\Rightarrow \frac{dE_z}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

y la ecuación de onda se transforma en:

$$\frac{d^2 E_y}{dt^2} = \mu\varepsilon \cdot \frac{d^2 E_y}{dt^2} \quad (1.17)$$

La solución de esta ecuación dependerá de la función  $E_y$  o sea, del tipo de perturbación que produce la onda. En el caso de las ondas de radio, la mayoría son sinusoidales pero, para el caso general podemos plantear que la solución de la ecuación (1.17) tendrá la siguiente forma:

$$E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (1.18)$$

Donde, por lo dicho anteriormente,  $f_1$  y  $f_2$  serán funciones sinusoidales que representarán una onda progresiva que se desplaza en ambos sentidos en la dirección del eje  $x$ . Dado que  $f_1$  y  $f_2$  son por separado también solución de la ecuación diferencial podemos suponer por simplicidad  $f_2 = 0$ .

De esta forma el campo eléctrico en coordenadas cartesianas y para una perturbación sinusoidal puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= E_m \cos \beta(x - vt) = E_m \cos(\omega t - \beta x) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Donde  $E_m$  es la amplitud del campo eléctrico y  $\beta$  es la constante de fase que determina la frecuencia de la onda ya que  $\omega = 2\pi f$  siendo  $f$  la frecuencia de la señal.

### Solución para el Campo Magnético.

La relación entre el campo eléctrico y magnético se tiene de la ecuación (1.6) que se repite por comodidad:

$$\nabla \times E = -\mu \cdot \frac{dH}{dt} = -\frac{dB}{dt} \quad (1.20)$$

Y dado que se conoce la expresión de  $E$  del desarrollo anterior, se puede calcular su rotor<sup>3</sup> y obtener las componentes cartesianas del campo magnético:

$$\begin{aligned}\frac{dB_x}{dt} &= -\left(\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz}\right) = 0 \\ \frac{dB_y}{dt} &= -\left(\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx}\right) = 0 \\ \frac{dB_z}{dt} &= -\left(\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy}\right) = -\frac{dE_y}{dx} = -\beta E_m \text{sen}(\omega t - \beta x).\end{aligned}\tag{1.21}$$

Integrando se tienen las componentes de campo magnético a partir del campo eléctrico:

$$\begin{aligned}B_x &= 0 \\ B_y &= 0 \\ B_z &= \frac{\beta}{\omega} E_m \cos(\omega t - \beta x) = \frac{\beta}{\omega} E_y\end{aligned}\tag{1.22}$$

Y  $\beta/\omega$  es la velocidad de propagación  $v$  por lo que la relación entre el campo eléctrico y magnético estará dada por:

$$\boxed{E_y = v B_z}\tag{1.23}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (1.23) se concluye que ambas componentes son idénticas en forma y perpendiculares. Esto puede verse en el caso analizado ya que si el campo eléctrico tiene componentes solamente sobre el eje  $y$ , el campo magnético tendrá componentes sobre el eje  $z$ . O de forma más general teniendo en cuenta que el rotor de un vector determina un vector perpendicular al plano de forma que analizando las ecuaciones de Maxwell (1.2) y (1.3)

$$\begin{aligned}\nabla \times H &= \sigma \cdot E + \varepsilon \cdot \frac{dE}{dt} \\ \nabla \times E &= -\mu \cdot \frac{dH}{dt}\end{aligned}\tag{1.24}$$

Se observa que en ambas ecuaciones el miembro izquierdo determinará un vector perpendicular al plano que contiene las componentes del campo que se consideran en el miembro derecho.

Luego, de las ecuaciones (1.19) y (1.22) se tiene que la dirección de propagación de la onda electromagnética es en la dirección del eje  $x$ , o sea, en la dirección perpendicular al plano que contiene las componentes de campo eléctrico y magnético.

Una idea aproximada de este fenómeno se tiene en la siguiente figura donde se observa un frente de onda plano (figura 1.4).

---

<sup>3</sup>El rotor de un vector  $\vec{V}$  cualquiera está dado por:  $\nabla \times \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \vec{i} \left( \frac{dV_z}{dy} - \frac{dV_y}{dz} \right) - \vec{j} \left( \frac{dV_z}{dx} - \frac{dV_x}{dz} \right) + \vec{k} \left( \frac{dV_y}{dx} - \frac{dV_x}{dy} \right)$

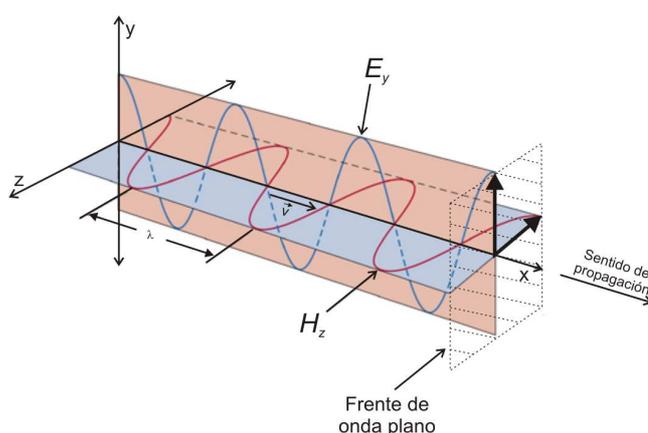


Figura 1.4: Sentido de propagación de una onda electromagnética en el espacio. Frente de onda.

## 1.6 Potenciales Retardados. Radiación de Ondas Electromagnéticas.

Hasta aquí se ha visto como se propaga una onda electromagnética a través de un medio homogéneo ya sea debido a una perturbación del campo eléctrico  $\vec{E}$  o magnético  $\vec{H}$ .

Si bien los conceptos del desarrollo anterior son generales, el enfoque es distinto cuando se analiza la propagación de una onda electromagnética a través de una línea de transmisión o una guía de onda a cuando se considera el caso de una antena.

En el caso de las líneas de transmisión y las guías de onda la atención se concentra en la energía guiada a lo largo del sistema. Es decir, se busca que la radiación (pérdida de energía en el espacio libre) sea mínima. En el caso de las antenas, las mismas se diseñan para radiar (o recibir) energía de la forma más eficiente posible.

Entender el fenómeno de radiación permitirá entender ciertos aspectos que hacen al sistema de medida. Para esto se analizará en primer lugar los potenciales retardados.

### 1.6.1 Potenciales Retardados.

Cuando se trata con antenas o sistemas de radiación el tiempo de propagación es un concepto importante. El mismo es consecuencia de que el efecto de las fuentes de campo eléctrico y magnético sobre un punto determinado del espacio no es instantáneo sino que se produce sólo después de un intervalo igual al tiempo requerido para que la perturbación se propague una distancia  $r$  (figura 1.5).

Dado que el objetivo será hallar una expresión que permita conocer el campo eléctrico y magnético en un punto P del espacio (sobre una esfera con centro en la antena) a partir de las fuentes, o sea, la densidad de corriente  $J$  y de la densidad volumétrica de carga  $\rho$  se analizará la solución a las ecuaciones de Maxwell pero considerando el potencial escalar  $V$  dado por

$$E = -\nabla V - \frac{dA}{dt} \begin{bmatrix} \text{V} \\ \text{m} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

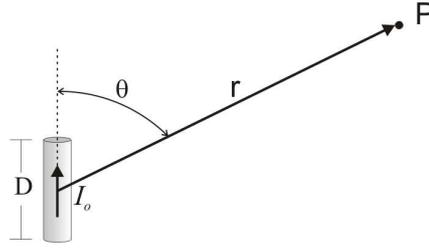


Figura 1.5: Distancia entre un elemento radiante y un punto del espacio.

y el potencial magnético escalar  $A$

$$H = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times A \quad \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (1.26)$$

ambos asociados al campo eléctrico y magnético respectivamente (La obtención de las ecuaciones de Maxwell para  $V$  y  $A$  pueden hallarse en las referencias [2] y [4]).

Entonces, las ecuaciones de Maxwell para un medio homogéneo y libre de carga en función de los potenciales escalares estarán dadas por:

$$\nabla^2 V = \mu\epsilon \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} \quad (1.27)$$

$$\nabla^2 A = \mu\epsilon \cdot \frac{d^2 A}{dt^2} \quad (1.28)$$

Como era de esperar se obtienen ecuaciones de onda y ambos potenciales se propagarán en el espacio con velocidad  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ .

Supóngase un elemento conductor de longitud  $D$  por el que circula una corriente  $i$  de forma tal que se tiene una densidad de corriente  $\rho$  y se desea hallar los potenciales en un punto  $P$  lo suficientemente alejado una distancia  $r$  tal que  $r \gg D$  como en la figura 1.5.

Si la perturbación se produce en el instante  $t_0$ , el efecto de dicha perturbación sobre el punto  $P$  no será instantáneo sino que estará retardado el tiempo  $t$  necesario para que la perturbación recorra una distancia  $r$  lo cual depende de la velocidad de propagación de la onda en el medio.

La solución a estas ecuaciones se obtiene a partir de la ecuación de Poisson para el caso estático considerando una corriente que circula por una pequeña porción de conductor y que varía en el tiempo de donde se tiene que el potencial escalar  $V$  estará dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(t - \frac{r}{v})}{r} dv \quad (1.29)$$

y el potencial escalar  $A$ :

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{J(t - \frac{r}{v})}{r} dv. \quad (1.30)$$

En estas ecuaciones queda de manifiesto que cualquier condición de la carga actual no tiene repercusión en el punto  $P$  sino hasta  $r/v$  segundos después.

### 1.6.2 Radiación de Ondas Electromagnéticas.

El análisis del fenómeno de radiación para el caso más general como es el de una antena dipolar permitirá llegar a la conclusión que la antena irradia energía en distinta forma dependiendo de la distancia a la que se encuentra el punto de observación determinando lo que se denomina *zonas de radiación*.

Los resultados de la sección anterior permitirán analizar cómo una antena es capaz de radiar energía al medio.

Dado que la radiación es un problema enteramente dinámico, el objetivo será hallar la expresión de campo eléctrico y magnético a partir del potencial escalar y vectorial definidos por las ecuaciones (1.27) y (1.28).

Supongamos el caso de una porción de conductor por el que circula una corriente como la de la figura 1.6.

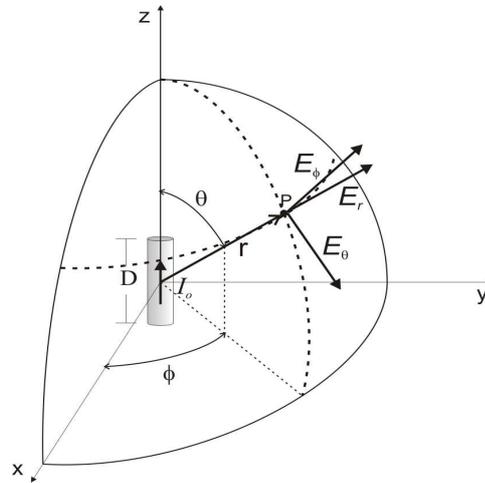


Figura 1.6: Influencia de la corriente circulando por una porción de conductor sobre un punto  $P$  en el espacio función de la distancia  $r$ .

El mismo puede definirse como un *dipolo corto* y es de interés porque una antena lineal puede considerarse como un conjunto de dipolos cortos conectados en serie.

Por simplicidad de los cálculos se utilizará para el desarrollo las coordenadas esféricas de forma tal que en cualquier punto  $P$  el campo eléctrico  $E$  y el campo magnético  $H$  es estarán dados por:

$$\vec{E} = \hat{r}E_r + \hat{\theta}E_\theta + \hat{\phi}E_\phi \quad (1.31)$$

$$\vec{H} = \hat{r}H_r + \hat{\theta}H_\theta + \hat{\phi}H_\phi \quad (1.32)$$

Sin embargo, para hallar  $E$  y  $H$  se debe primero hallar el potencial escalar  $V$  y el potencial vectorial  $A$  a partir de los cuales podemos hallar  $E$  y  $H$  mediante las ecuaciones (1.25) y (1.26).

Suponiendo que por el conductor circula una corriente alterna de frecuencia  $f$  cuya expresión matemática estará dada por (en notación fasorial):

$$I = I_0 e^{j\omega t} \quad (1.33)$$

cuya expresión retardada en el tiempo será:

$$I = I_0 e^{j\omega(t-\frac{r}{v})} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (1.34)$$

entonces la densidad de corriente retardada estará dada por:

$$J = J_0 e^{j\omega(t-\frac{r}{v})} = J_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (1.35)$$

y sustituyendo en la ecuación (1.26) se tiene la expresión del potencial vectorial retardado:

$$A = \frac{u_0}{4\pi} \int_v \frac{J}{r} dv = \frac{u_0}{4\pi} \int_v \frac{J_0 e^{j\omega(t-\frac{r}{v})}}{r} dv \quad [\text{Wb/m}]. \quad (1.36)$$

En forma análoga se tiene el potencial escalar retardado en el punto  $P$  cuya expresión es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho}{r} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-\frac{r}{v})}}{r} dv \quad [\text{V}]. \quad (1.37)$$

Suponiendo que el conductor se aísla en el espacio y que la corriente circula en la dirección del eje  $z$ , entonces la solución de la ecuación (1.36) estará dada por:

$$A_z = \frac{u_0 I_0}{4\pi} \int_{l/2}^{l/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dz \quad (1.38)$$

donde se verifica que al circular la corriente únicamente en la dirección del eje  $z$ , el campo vectorial magnético solo tendrá una única componente en la dirección del mismo eje. Por lo que:

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Luego, si la distancia desde el dipolo hasta el punto  $P$  es lo suficientemente grande comparado con su longitud ( $r \gg D$ ) y la longitud de onda es grande comparada con  $D$  ( $D \gg \lambda$ ) la ecuación (1.38) puede escribirse de la siguiente forma:

$$A_z = \frac{u I_0 D e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \quad (1.40)$$

Dado que el objetivo es hallar el campo magnético  $H$ , es necesario calcular  $\nabla \times A$ . Debido a que esto es más sencillo en coordenadas esféricas, la expresión de  $A$  en dichas coordenadas a partir del resultado obtenido en (1.40) estará dada por:

$$\begin{aligned} A_r &= A_z \cdot \cos \theta \\ A_\theta &= -A_z \cdot \text{sen} \theta \\ A_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Aplicando esta transformación y calculando la expresión de los campos eléctrico y magnético a partir de las ecuaciones (1.31) y (1.32) se obtienen las siguientes expresiones:

Cuadro 1.1: Ecuaciones de campo eléctrico y magnético en coordenadas esféricas.

| Componentes de campo eléctrico<br>en coordenadas esféricas   | Componentes de campo magnético<br>en coordenadas esféricas   |
|--|--|
| $E_r = \frac{I_0 D e^{j(\omega t - Br)} \cos \theta}{2\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{vr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$  | $H_r = 0$  |
| $E_\theta = \frac{I_0 D e^{j(\omega t - Br)} \operatorname{sen} \theta}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{j\omega}{v^2 r} + \frac{1}{vr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$ | $H_\theta = 0$   |
| $E_\phi = 0$   | $H_\phi = \frac{I_0 D e^{j(\omega t - Br)} \operatorname{sen} \theta}{4\pi} \left( \frac{j\omega}{vr} + \frac{1}{r^2} \right)$ |

La cuales por simplicidad se escribirán en función de la longitud de onda  $\lambda$  ya que  $\lambda = 2\pi v/\omega$ ,  $n = 1/\varepsilon v = \sqrt{u/\varepsilon}$  y  $\beta = 2\pi/\lambda$  obteniéndose las ecuaciones del Cuadro 1.2.

Cuadro 1.2:

| Componentes de campo eléctrico<br>en coordenadas esféricas  | Componentes de campo magnético<br>en coordenadas esféricas   |
|---|--|
| $E_r = \frac{n I_0 D e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \cos \theta}{r \lambda} \left( \frac{\lambda}{2\pi r} + \frac{\lambda^2}{j 4\pi^2 r^2} \right)$                           | $H_r = 0$  |
| $E_\theta = \frac{n I_0 D e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \operatorname{sen} \theta}{2r \lambda} \left( j 1 + \frac{\lambda}{2\pi r} + \frac{\lambda^2}{j 4\pi^2 r^2} \right)$ | $H_\theta = 0$   |
| $E_\phi = 0$  | $H_\phi = \frac{I_0 D e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \operatorname{sen} \theta}{2r \lambda} \left( j 1 + \frac{\lambda}{2\pi r} \right)$ |

Las expresiones anteriores permitirán analizar el comportamiento del vector de Poynting en función de la distancia a la antena  $r$ . Esto se verá en la sección siguiente.

## 1.7 Zonas de Radiación de una antena. Vector de Poynting.

En la sección anterior se obtuvo la expresión del campo eléctrico y magnético generado por un conductor en un punto  $P$  del espacio llegando a las ecuaciones que aparecen en los Cuadros 1.1 y 1.2 donde puede observarse que a medida que la distancia  $r$  aumenta los términos  $1/r^2$  y  $1/r^3$  comienzan a ser despreciables frente los términos que dependen de  $1/r$ .

Calculando el vector se Poynting se tiene que el valor promedio de la densidad de potencia radiada estará dado por:

$$S_{AV} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{E}_\theta \right| \left| \vec{H}_\phi^* \right| \cdot \cos(\varphi) \quad (1.42)$$

Donde  $\varphi$  es el ángulo de fase en el tiempo en la dirección de propagación (para este caso el eje  $x$ ).

Analizando el comportamiento del vector de Poynting el análisis puede restringirse a tres regiones dependiendo de la distancia a la antena:

- Zona 1: Para valores pequeños de  $r$  con respecto a la longitud de onda ( $r < \lambda$ ) se dice que el *campo es de inducción o reactivo* y se desprecia el campo de radiación.
- Zona 2: a distancias intermedias la segunda zona se conoce como *campo de transición o de inducción*.

En ambas regiones el vector de Poynting *posee parte real e imaginaria, o sea es complejo, y tiene componentes en la dirección de propagación* ( $\varphi \neq 0$ ).

- Zona 3: a distancias mayores donde se verifica  $r \gg \lambda$  la tercera zona es llamada de *radiación o campo lejano*.

Despreciando los términos que dependen de  $1/r^2$  y  $1/r^3$  se tiene que el campo magnético y eléctrico estarán en fase cuando la distancia  $r$  sea lo suficientemente grande tal que se verifique:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= j \frac{n I_0 D e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})}}{2r\lambda} \sin\theta \\ H_{\phi} &= j \frac{I_0 D e^{j(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})}}{2r\lambda} \sin\theta \end{aligned} \quad (1.43)$$

que constituye un frente de onda plano el cual se propaga en la dirección radial y cuyas componentes se encuentran en fase por lo que el vector de Poynting es real. Para el caso considerado, si se toma una esfera alrededor del conductor se tiene que el valor medio de la potencia radiada está dada por:

$$P_m = \frac{1}{2} \int_s \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) ds \quad (1.44)$$

Como conclusión se tiene que las dos primeras zonas contienen componentes de ondas transversales y longitudinales mientras que en la tercera zona se pierde la componente longitudinal quedando solo la componente transversal.

Como regla general, las zonas de radiación de una antena se dividen de la siguiente forma:

**Campo Reactivo.** Para distancias menores que algunas longitudes de onda ( $0 < r < \lambda/2\pi$ ) el vector de Poynting es imaginario puro (no radiante), tiene componentes en las tres coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ) y disminuye con la inversa del cuadrado de  $r$ .

**Campo Cercano Radiante (o zona de Fresnel).** Esta zona comprende distancias entre  $\lambda/2\pi < r < 2D^2/\lambda$ , donde  $D$  es la dimensión más larga de la antena y a su vez puede dividirse en dos regiones:

1. La primera considera la región comprendida entre  $\lambda/2\pi < r < 2D^2/4\lambda$  donde se verifica que los campos  $E$  y  $H$  decaen más rápido que  $1/r$  y por lo que el patrón de radiación depende de  $r$ .
2. La segunda región comprende la zona  $2D^2/4\lambda < r < 2D^2/\lambda$  donde  $E$  y  $H$  decaen como  $1/r$  y el patrón de radiación es todavía dependiente de  $r$ .

**Campo Lejano (o zona de Fraunhofer).** Finalmente, para  $r > 2D^2/\lambda$  se tiene que el vector de Poynting es real y el patrón de radiación es independiente de  $r$  y solo tiene dos componentes ( $\theta$  y  $\phi$ ). Se dice que aquí que el campo radiactivo lejano y es la condición que hace posible la propagación de la energía en el espacio.

Lo anterior se resume en la figura 1.7.

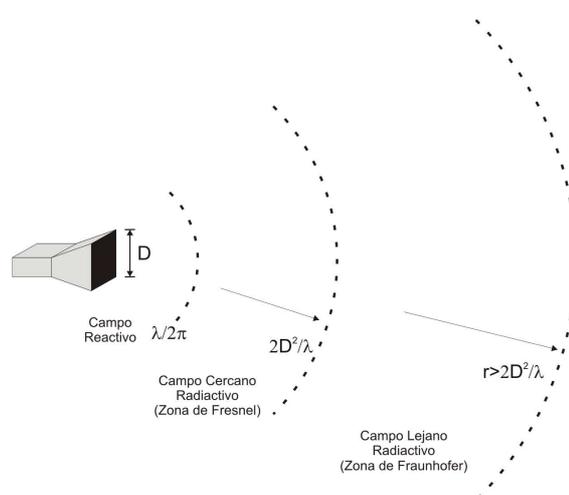


Figura 1.7: Zonas de radiación de una antena en función de la distancia  $r$ .

Como se verá en el próximo capítulo, el campo de medida implementado es del tipo lejano por lo que estará destinado a medir el diagrama de campo lejano de la antena bajo ensayo.

## 1.8 Características de las antenas a medir. El Principio de Reciprocidad.

Si bien por lo general las antenas se consideran como transmisores en la práctica se cumple el principio de reciprocidad que establece que *el diagrama de radiación, la directividad, la abertura y la impedancia terminal de una antena son las mismas en la transmisión y en la recepción* [4].

La mayoría de los estándares internacionales definidos para la medición de antenas se encuentran definidos por la IEEE la cual se encarga de redactar los procedimientos de ensayo así como definiciones que permitirán que los resultados obtenidos sean comprendidos universalmente.

Salvo casos especiales, el estándar IEEE 149-1979 resume definiciones y procedimientos de ensayo para elementos del tipo:

- Pasivo.
- Lineal.
- Recíproco.

Lo cual hace que las propiedades de radiación puedan medirse con la antenna funcionando como transmisor o receptor y que ambos esquemas de medida que se muestran en las figuras 1.8(a) y 1.8(b) arrojen iguales diagramas de radiación de la antenna bajo ensayo (AUT).

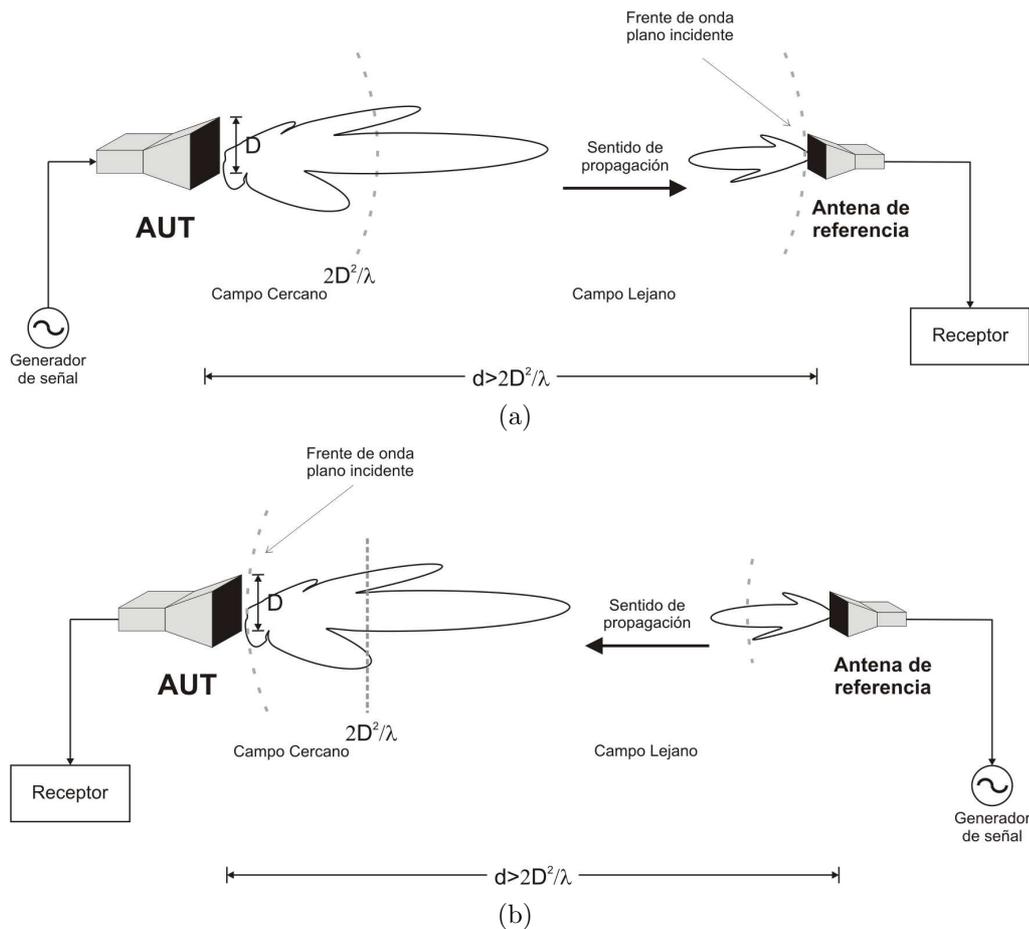


Figura 1.8: Principio de Reciprocidad. (a) Antena bajo ensayo actuando como transmisor y (b) Antena bajo ensayo actuando como receptor.

Es por esto que en la mayoría de los sistemas de medida (salvo aquellos casos donde no se cumple el principio de reciprocidad) **la antena a ensayar actúa como receptor**. De esta forma la adquisición de datos y la manipulación de la antenna (movimiento) ocurren en un mismo lugar lo que simplifica el diseño y la organización del instrumental del campo de medida.

También puede darse el caso que el elemento a medir contenga elementos activos, no lineales o no recíprocos. Bajo cualquiera de estas condiciones las características de la antenna no son las mismas cuando actúa como transmisor o como receptor debiéndose utilizar otras técnicas de medida (Ver bibliografía).

## 1.9 Resumen.

En este capítulo se dio una breve introducción a los sistemas de medición de antenas y se definieron algunas herramientas y conceptos básicos que hacen a la propagación de ondas electromagnéticas en el espacio libre que ayudarán a entender en Capítulo 2 qué parámetros se miden cuando se somete a ensayo una antena.

En este punto debe quedar en claro que existe un sistema de coordenadas esféricas cuyo origen coincide con la posición de la misma y que, alejándose lo suficiente tal que  $r > 2D^2/\lambda$ , es posible medir la potencia radiada por la antena (valor promedio del vector de Poynting).

La distancia a la cual debe medirse la potencia radiada dependerá de las dimensiones de la antena ( $D$ ) y de la longitud de onda ( $\lambda$ ) para la cual fue diseñada. Esto tendrá incidencia directa en las dimensiones del campo de medida.

En el próximo capítulo se verá la estructura del sistema de medida implementado en las instalaciones del IAR que permitirá medir el campo radiactivo lejano de una antena a partir del cual se determinará el diagrama de radiación.

## Capítulo 2

# Sistemas de Medición de Antenas: Estructura de un Campo Lejano de Medida. Cámaras Anecoicas.

### 2.1 Introducción.

A partir de lo visto en el Capítulo 1 se concluye que **en un campo lejano de medida el parámetro a medir en cada punto del espacio es la potencia recibida en la antena** que determinará el diagrama de radiación. Sin embargo, hasta ahora no se ha mencionado nada de cómo se mide dicho diagrama ni de la estructura que compone dicho campo. En éste capítulo se presentará la estructura básica de un campo de medición de antenas de acuerdo al estándar 149-1979 de la IEEE.

En líneas generales, la disposición del campo de medida debe permitir iluminar la antena bajo ensayo (*Antenna Under Test o AUT*) con un frente de onda plano generado por una antena de referencia que actúa como transmisor y que se halla a una distancia  $R > 2D^2/\lambda$ .

Luego, dado que el objetivo será determinar las características de la antena en el espacio libre (la forma en que la energía es radiada) no habrá puertos accesibles a partir de los cuales tomar una medida (como ocurre, por ejemplo, en un circuito) sino que deberán obtenerse muestras apropiadas de radiación en el espacio alrededor de la misma. Para esto será necesario contar con un mecanismo que permita cambiar la posición relativa entre la antena de referencia y la antena bajo ensayo.

### 2.2 Estructura de un sistema de medición de antenas.

El estándar IEEE 149-1979 establece que la instrumentación requerida para un campo de medida de antenas puede dividirse en cinco subsistemas:

1. Antena de referencia y sistema transmisor.
2. Sistema receptor.
3. Sistema de posicionamiento.

4. Sistema de almacenamiento de datos.
5. Sistema de procesamiento de datos.

Gráficamente esto puede representarse con el siguiente diagrama en bloques:

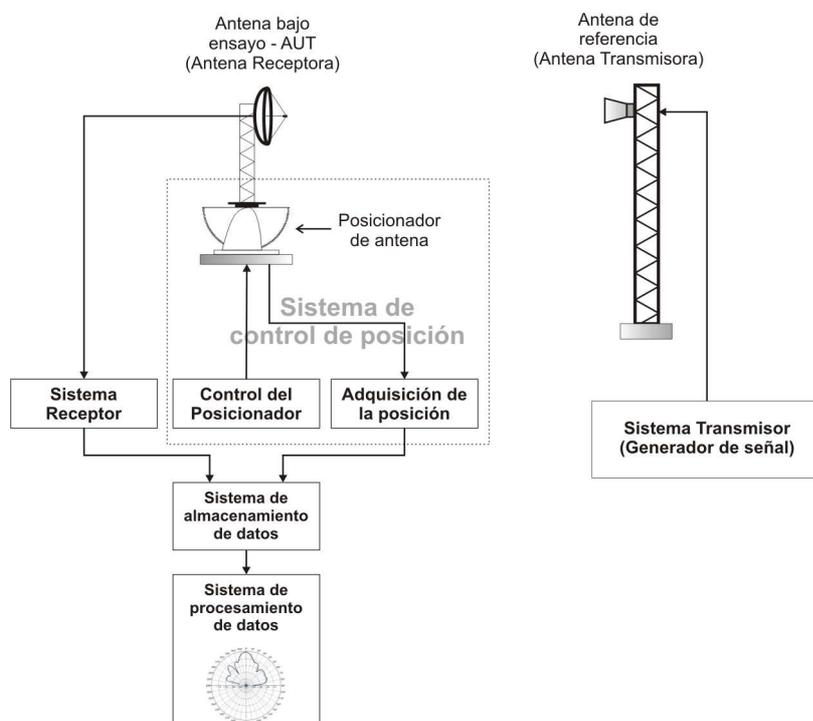


Figura 2.1: Estructura general de un sistema de medición de antenas definida por el estándar IEEE 149-1979.

Como se puede observar en la figura 2.1, la existencia de un posicionador de antena permite cambiar la posición relativa entre la antena de referencia y la AUT, la cual, como se estableció en el Capítulo 1, se supone en el origen del sistema de coordenadas esférico asociado.

También puede verse la ventaja que representa el cumplimiento del principio de reciprocidad: la adquisición de datos y la manipulación de la antena -movimiento en **azimut** ( $\phi$  variable y  $\theta$  fijo) y en **elevación** ( $\phi$  fijo y  $\theta$  variable)- ocurren en el mismo extremo del campo de medida.

Luego, el cambio de posición relativa variando  $r, \theta$  o  $\phi$  permitirá determinar de qué manera la antena concentra la energía radiada en el espacio que la rodea como se observa en la figura 2.2 que representa un esquema básico de medición de antenas.

En la figura 2.2 la distancia  $r$  puede limitarse a la distancia que separa la AUT de la antena de referencia de forma que  $r$  puede considerarse fija y el diagrama de radiación quedará determinado por  $(\theta, \phi)$  o lo que es lo mismo por el movimiento en *azimut* y *elevación*.

Finalmente, el estándar contempla dos configuraciones básicas para la disposición de los sistemas de medida de campo lejano que permiten obtener diagramas de radiación para distintas posiciones de  $\theta$  y  $\phi$ .

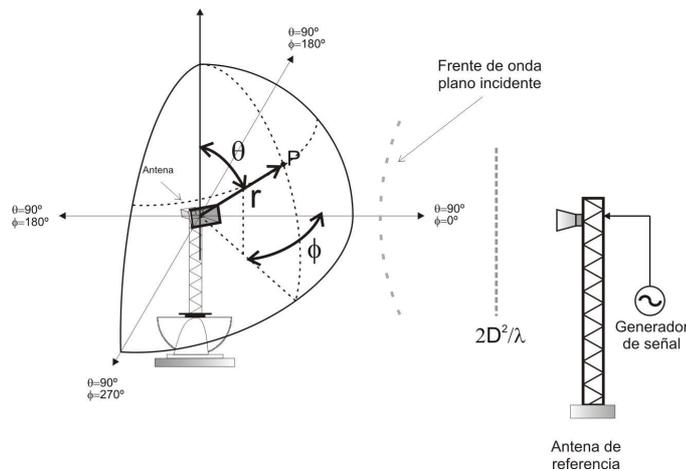


Figura 2.2: Estructura general de un sistema de medición de antenas. La antena a ensayar y su eje de coordenadas asociado rotan a través de una abscisa mientras que la antena de referencia se mantiene fija (Fixed Line of Sight).

1. Campo de visión fija (Fixed Line of Sight): La antena bajo ensayo y su eje de coordenadas asociado rotan a través de una abscisa. Si la antena bajo ensayo funciona en modo receptor, entonces recibe potencia desde una antena fija (antena de referencia) a medida que se desplaza sobre un plano como se muestra en la figura 2.2.
2. Campo de visión variable (Movable Line of Sight): en este caso la antena de referencia se mueve alrededor de la antena bajo ensayo en forma de circunferencias (figura 2.3).

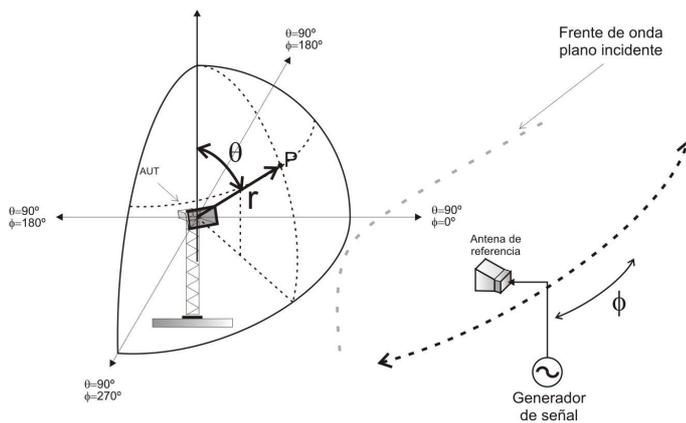


Figura 2.3: Estructura general de un sistema de medición de antenas del tipo Movable Line of Sight.

De lo anterior cabe remarcar que:

- *El campo a implementar en el IAR será del tipo Fixed Line of Sight con la estructura mostrada en la figura 2.2.*

## 2.3 Determinación de un Diagrama de Radiación.

Un diagrama de radiación puede especificarse por los siguientes parámetros: la máxima dirección de campo eléctrico ( $E_{max}$ ), el ancho del haz (*Beamwidht*) y la existencia o no de lóbulos laterales.

El diagrama de radiación puede ser absoluto o relativo aunque por lo general se utilizan diagramas relativos donde el valor medido en un punto  $P(\theta, \varphi)$  del espacio se refiere al valor máximo en una determinada dirección. Por ejemplo, un diagrama relativo en función del campo eléctrico máximo genera una función de  $\theta$  para un valor de  $\varphi$  constante donde el valor normalizado de campo eléctrico estará dado por:

$$E_n(\theta, \phi) = \frac{E(\theta, \phi)}{E_{max}(\theta, \phi)} \quad (2.1)$$

O, en el caso de medir la potencia (valor instantáneo del vector de Poynting) se obtiene el diagrama de radiación en función de la potencia normalizada.

$$S_n(\theta, \phi) = \frac{S(\theta, \phi)}{S_{max}(\theta, \phi)} \quad (2.2)$$

En la figura 2.4 se observa un ejemplo de un diagrama de radiación típico donde se observan las distintas regiones que lo caracterizan. El mismo corresponde a un valor fijo de  $\theta$  por lo que constituye un corte en la esfera que rodea a la antena.

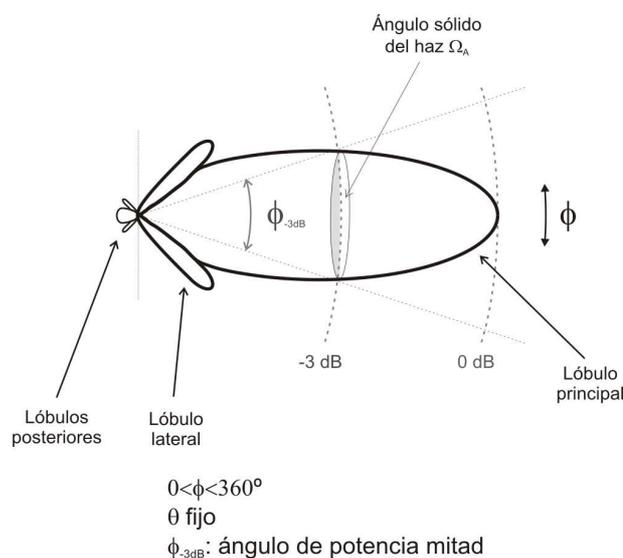


Figura 2.4: Zonas que caracterizan un Diagrama de radiación típico.

Como se observa en la figura anterior se pueden definir distintas regiones dentro de la distribución espacial de energía como por ejemplo:

- El ancho del Haz (*Beamwidht*): Es el área de mayor concentración de energía (dará lugar a la determinación de la ganancia de la antena). A efectos prácticos será la región del espacio donde se podrá iluminar un objetivo o comunicarse con otro sistema con el mayor rango de potencia.

- Lóbulos laterales y posteriores: por lo general la radiación fuera del lóbulo principal se trata de reducir al mínimo para evitar iluminar regiones sin interés y también interferir o recibir interferencia proveniente de otros sistemas. Se especifican en decibeles [dB] respecto al lóbulo principal.
- Y otros parámetros de interés como la dirección del haz, ángulos de potencia mitad y puntos nulos.

## 2.4 Otros parámetros que se miden a partir de los datos adquiridos.

Como se dijo anteriormente el parámetro de interés a medir es la potencia recibida por la antena a ensayar. Esto se debe a que si el vector de Poynting es bien conocido en todos los puntos de radio  $r$  sobre la esfera en cuyo centro se halla la antena bajo ensayo, entonces la potencia radiante por dicha antena es la integral de las componentes radiales del vector de Poynting promedio sobre toda la superficie de dicha esfera. Esto es:

$$W_{rad} = \iint S_{med} da = \iint \frac{1}{2} \cdot Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) da \quad (2.3)$$

como se vio en el Capítulo 1.

### 2.4.1 Eficiencia de antena o eficiencia de apertura $\eta$ .

Representa la relación entre la potencia radiada  $W_{rad}$  y la potencia que ingresa a la antena  $W_e$  donde

$$W_{rad} = \eta \cdot W_e \quad (2.4)$$

### 2.4.2 Intensidad de radiación y ángulo sólido del haz.

La potencia por ángulo sólido a una distancia  $r$  de la antena estará dada por:

$$S(\theta, \phi) = S_{med}(\theta, \phi) \cdot r^2. \quad (2.5)$$

De forma que integrando la potencia normalizada  $S_n(\theta, \phi)$  sobre una determinada área de la esfera se obtiene la potencia que atraviesa el ángulo sólido de la antena por lo que:

$$\Omega_A = \iint S_n(\theta, \phi) d\Omega = \iint \frac{S(\theta, \phi)}{S_{max}(\theta, \phi)} d\Omega \quad (2.6)$$

donde  $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi$  es un elemento de ángulo sólido.

Como se observa en la figura 2.5 es común expresar en ángulo sólido en función de los ángulos de potencia mitad en los planos determinados por  $\theta$  y  $\varphi$  obteniendo:

$$\Omega_A \cong \theta_{-3dB} \cdot \phi_{-3dB} \quad (2.7)$$

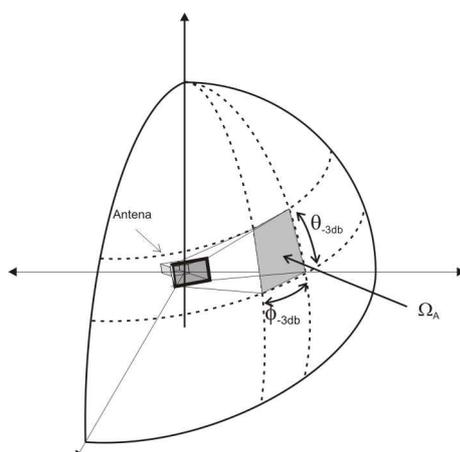


Figura 2.5: Ángulo sólido del haz de antena.

### 2.4.3 Directividad.

Es la relación entre la intensidad de radiación (en una dirección dada) y la intensidad radiada promedio en todas las direcciones considerando una fuente isotrópica excitada con igual potencia. De esta forma se tiene que:

$$D = \frac{4\pi \cdot S(\theta, \phi)}{W_{rad}} \quad (2.8)$$

### 2.4.4 Ganancia.

A diferencia de la directividad, la ganancia de una antena se define como la relación entre la intensidad de radiación **máxima** (en una dirección dada) y la intensidad de radiación que se obtendría si la antena radiara potencia de forma isotrópica. De esta forma

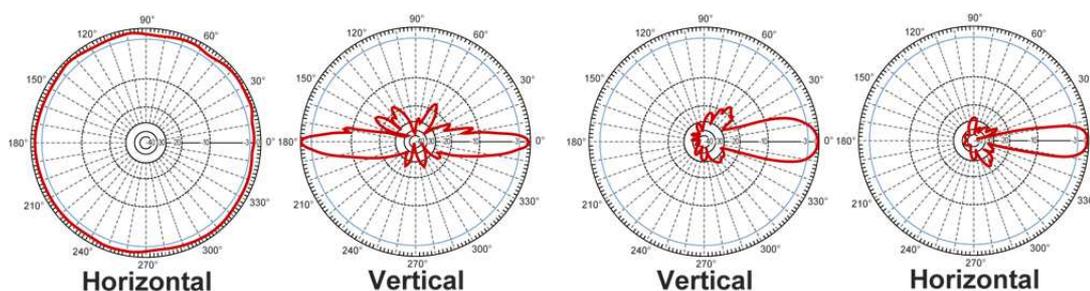
$$G_0 = \frac{\eta \cdot S_{max}(\theta, \phi)}{S_{med}} \quad (2.9)$$

Si bien estos no son los únicos parámetros de interés a la hora de medir una antena son los más representativos. Para más información puede referirse a [1].

## 2.5 Determinación de un diagrama de radiación a partir de la variación de $\theta$ y $\phi$ .

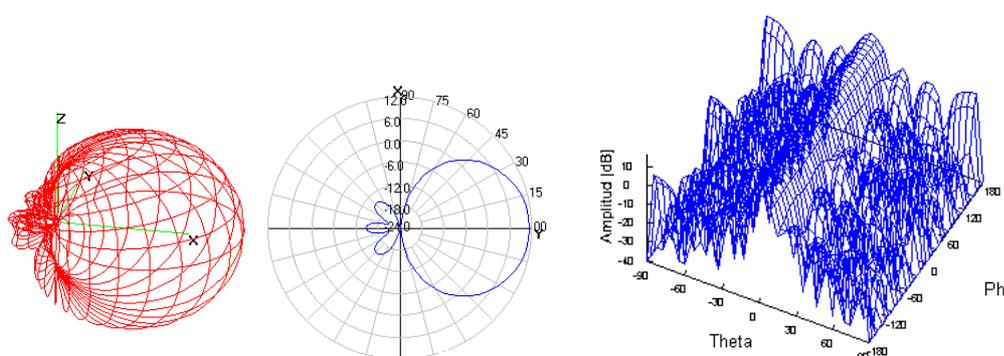
Generalmente, los resultados se presentan en coordenadas polares ya que está implícito el ángulo de rotación de la antena pero tiene la desventaja de no representar claramente el diagrama en el origen, por eso se utiliza también el gráfico denominado rectangular donde el ángulo de azimut se grafica en la abscisa del eje  $x$  y el nivel de potencia en la ordenada  $y$  como se mostró en la figura 1.2. En la figura 2.6 se observan otros ejemplos de diagramas de radiación de este tipo.

Si se desea obtener la información en tres dimensiones (para lo cual es necesario también el movimiento en elevación) se utilizan gráficos en tres dimensiones (figura 2.7).



(a) Ejemplo de un diagrama de radiación de una antena omnidireccional. (b) Ejemplo de un diagrama de radiación de una antena direccional.

Figura 2.6: Ejemplos de diagramas de radiación en dos dimensiones.



(a) Ejemplo de un diagrama de radiación tridimensional. (b) Ejemplo de un gráfico tridimensional de un diagrama de radiación análogo a los diagramas rectangulares en dos dimensiones.

Figura 2.7: Ejemplos de diagramas de radiación en tres dimensiones.

Como se mostró en el diagrama en bloques de la figura 2.1 el cambio de la posición relativa se consigue utilizando un posicionador de antena que permita cambiar el valor de  $\theta$  y  $\phi$  y a su vez registrar dicho cambio.

Existen distintas configuraciones de posicionador de antena que permitirán obtener distintos patrones de acuerdo al corte que realicen. En la figura 2.8 se muestran las configuraciones más comunes así como los cortes que permiten obtener.

En el caso de la medición de antenas, la configuración Azimut-sobre-Elevación (*Azimuth-over-Elevation*) es la única que permite obtener diagramas de radiación convencionales fuera de los planos principales. En la figura 2.8(a) queda claro que los diagramas de radiación se obtienen para distintos cortes manteniendo  $\theta$  constante.

El caso más simple contemplado por el estándar consiste en tomar:

$$\theta = 90^\circ$$

$$\phi \text{ variable entre } 0 \text{ y } 360 \text{ grados}$$

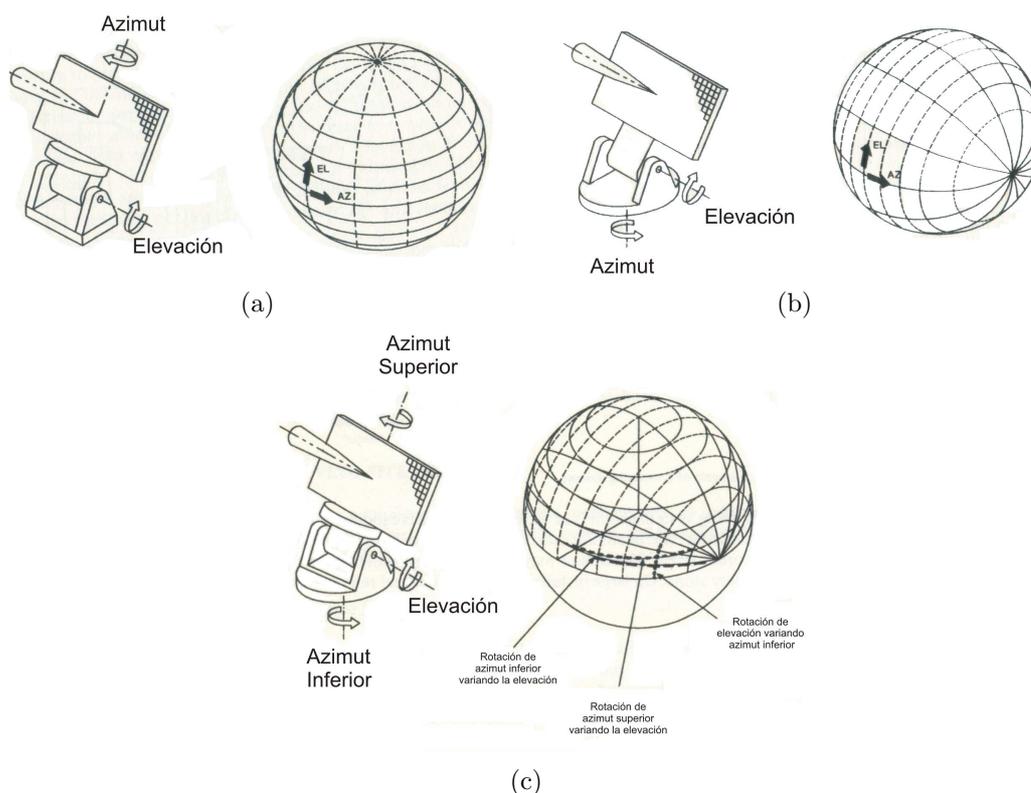


Figura 2.8: a) Posicionador del tipo Azimut-sobre-Elevación. b) Posicionador del tipo Elevación-sobre-Azimut. c) Posicionador del tipo Azimut-sobre-Elevación-sobre-Azimut.

que determina el corte circular de mayor radio (*Great Circle Cut*) ya que se mide sobre el círculo de mayor radio que constituye el plano donde existe el lóbulo principal de la antena y permite realizar la medida utilizando un sistema que posea un solo sentido de movimiento (azimut).

- *El posicionador a utilizar en el campo de medida a implementar será del tipo Azimut-sobre-Elevación.*
- *En la primera etapa del proyecto se harán medidas del tipo Great Circle Cut.*

## 2.6 El campo de medida. Cámaras Anecoicas.

En líneas generales, todo campo lejano de medida se diseña para obtener un frente de onda incidente lo más plano posible sobre la AUT. Para lograr este tipo de campo se tienen dos configuraciones básicas según los estándares de la IEEE:

1. Campo de espacio libre: se minimizan los efectos de los alrededores para evitar que los rayos reflejados incidan en la zona de medida.
2. Campo con reflexión: se diseñan para utilizar en forma adecuada las reflexiones de las ondas electromagnéticas y de esta forma obtener un frente de onda lo más plano posible en la zona de medida.

Aunque existen varios tipos de configuraciones de campo, las más comunes son el *Campo Elevado* y la *Cámara Anecoica* cuyas características principales son:

- Ambas antenas son montadas sobre torres, montañas, techos o canteras.
- Se diseña sobre terrenos planos y minimizando los efectos de los alrededores mediante:
  1. La correcta elección de la antena de referencia teniendo en cuenta su directividad y el nivel de los lóbulos laterales.
  2. Manteniendo despejado el campo de visión entre ambas antenas (AUT y la antena de referencia).
  3. Mediante el redireccionamiento o absorción de las ondas reflejadas.

Aunque el principal objetivo de este proyecto consiste en la automatización de un sistema de medición de antenas que va funcionar dentro de cámara anecoica, los mismos conceptos deberían ser aplicables a cualquier campo de medida como los mencionados anteriormente.

### 2.6.1 Efectos de las Reflexiones en la Medición de Antenas.

Como se dijo anteriormente, en un campo de medida idealmente se busca iluminar la antena con bajo ensayo con un frente de onda lo más plano posible. Para esto, una de las primeras condiciones de diseño es que la distancia  $R$  que separa a la antena bajo ensayo de la antena de referencia sea mayor a  $2D^2/\lambda$  (Condición de Campo Lejano).

Ahora, hasta aquí no se ha dicho nada sobre que sucede cuando se combinan en espacio los vectores de campo eléctrico correspondientes al rayo directo que incide sobre la antena y a un rayo reflejado en alguna superficie que rodea al campo de medida. Como consecuencia se tiene una alteración en el frente de onda plano degradando la exactitud de la medida de la antena.

Como es de esperar, el diseño del campo de medida deberá permitir la reducción al mínimo las reflexiones en los objetos que rodean al mismo para lograr la exactitud especificada.

El mecanismo por el cual una señal reflejada interfiere con la señal deseada correspondiente al camino directo es análogo al patrón de interferencia que se tiene cuando se estudia el patrón de interferencia de dos fuentes luminosas coherentes (igual pulsación angular  $\omega$  y diferencia de fase  $\varphi$ ).

En el caso de un sistema de medición de antenas se considera un frente de onda plano correspondiente al rayo directo de amplitud  $E_D$  que incide normalmente en la antena bajo ensayo y un frente de onda plano correspondiente al rayo reflejado con amplitud  $E_R$  que incide con un ángulo  $\theta$  con respecto a la normal.

En la figura 2.9 se pueden ver los dos frentes de onda plano que inciden sobre el área determinada por la apertura  $D$  de la antena.

Para cualquier instante de tiempo  $t$ , la fase del frente de onda directo a través del área de apertura es constante por lo que siguiendo con la notación fasorial utilizada en el Capítulo 1, la magnitud de campo correspondiente al rayo directo estará dada por:

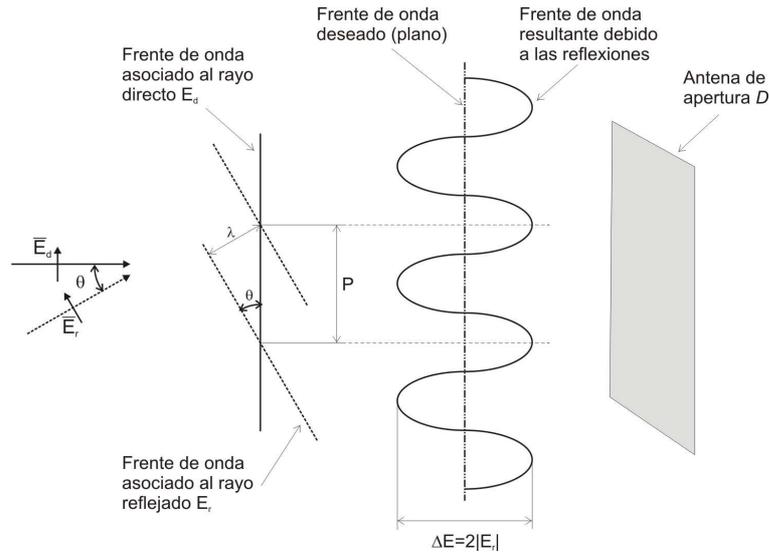


Figura 2.9: Efecto de las reflexiones en el frente de onda plano incidente en la antena bajo ensayo (AUT)

$$E_D = E_D e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.10)$$

y para el rayo reflejado proveniente de cualquier punto de los alrededores se tiene que:

$$E_R = E_R e^{j(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \text{sen}\theta)} \quad (2.11)$$

De esta forma, la magnitud el campo medido resultante a partir del principio de superposición estará dada por:

$$E = E_D + E_R \text{sen} \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \text{sen}\theta \right). \quad (2.12)$$

La distancia  $P$  entre dos picos sucesivos como se muestra en la figura 2.9 será:

$$P = \frac{\lambda}{\text{sen}\theta} \quad (2.13)$$

Por lo tanto, se tienen variaciones espaciales en el campo medido a medida que se recorre el área de apertura de la antena. Las variaciones pico a pico de dichas fluctuaciones son constantes y proporcionales a

$$\Delta E = E_{max} - E_{min} = (E_D + E_R) - (E_D - E_R) = 2E_R \quad (2.14)$$

como se muestra en la figura 2.9.

Por lo general, estos resultados se expresan en dB y se define el nivel de reflectividad como

$$\frac{E_R}{E_D} = 20 \log \left( \frac{(-1 + 10^{(\sigma/20)})}{(1 + 10^{(\sigma/20)})} \right) [dB] \quad (2.15)$$

donde

$\sigma = E_{max}/E_{min}$  [dB] es la relación entre el campo máximo y mínimo medido.

Si bien en la vida real ninguno de los frentes de onda incidentes serán estrictamente planos, es evidente que existirán fuentes de señales que perturbarán el campo que realmente se quiere medir por lo que el nivel de reflectividad es una especificación del campo de medida. El mismo condicionará tanto las dimensiones de la cámara como los requerimientos de los paneles absorbedores a utilizar.

En el caso de la cámara anecoica del IAR, el grupo de diseño impuso la siguiente especificación:

- $\frac{E_R}{E_D}$  [dB] = -45 dB @  $\sigma = 0,1$  dB pico a pico.

### 2.6.2 Cámaras Anecoicas. Qué son. Tipos de Cámaras Anecoicas.

Una cámara anecoica es un recinto especialmente diseñado para reducir la reflexión indeseada de energía que, como se mostró en la sección anterior, degrada la exactitud de la medida llevada a cabo. En este caso, una cámara anecoica diseñada para ondas electromagnéticas tiene como objetivo poder realizar medidas simulando condiciones de espacio libre con un aceptable grado de exactitud minimizando las reflexiones mediante el revestimiento de sus paredes interiores con material absorbente de ondas electromagnéticas.

La ventaja de utilizar una cámara anecoica es que las medidas de antenas pueden llevarse a cabo bajo condiciones específicas controladas, por ejemplo independientemente de las condiciones climáticas, protegidas de señales espurias y trabajar en regiones libres de reflexiones.

Otra ventaja adicional es que se puede mantener el sistema de medida hasta finalizar la misma lo cual no siempre es posible cuando se trabaja al aire libre.

### 2.6.3 Tipos de Cámaras Anecoicas.

Existen dos esquemas básicos el diseño de cámaras anecoicas:

1. Cámara Anecoica Rectangular.
2. Cámara Anecoica Estrecha.

Las características básicas de cada una se describen a continuación:

#### Cámara Anecoica Rectangular.

Generalmente se diseñan para simular condiciones de espacio libre. Se encuentran revestidas en el interior con material absorbente (diseñado para trabajar a la frecuencia de interés) que evita que las ondas reflejadas en los laterales y paredes posteriores incidan en la zona de medida (donde se ubica la antena bajo ensayo) y así reducir el nivel de energía reflejada no deseado. Sus dimensiones se ajustan para que el ángulo de incidencia en las paredes laterales sea menor a 60 grados respecto de la normal dependiendo de la magnitud del error que se pretenda en la medida. En el caso de las cámaras rectangulares se impone la siguiente restricción para el ancho (y alto) de la misma:

$$W > \frac{R}{2,75} \quad (2.16)$$

donde  $R$  es la separación entre la antena de referencia y la antena bajo ensayo y  $W$  es el ancho o altura de la cámara.

Las dimensiones de la cámara y el tipo de absorbedores a utilizar dependerán del error máximo permitido en las medidas por lo tanto juegan un papel importante en el diseño. Además, limitarán las dimensiones de la antena a ensayar y el rango de frecuencias que garantizan el error de medida especificado por los diseñadores. Principalmente deberá evitarse que el lóbulo principal de la antena incida en las paredes laterales, el techo y el piso de la cámara.

En la figura 2.10(a) se muestra como influyen los rayos reflejados en la zona de medida para una cámara rectangular.

### **Cámara Anecoica Estrecha.**

Se le da esta denominación debido a su forma de bocina piramidal que va desde una extremo angosto (donde se ubica la antena de referencia) hasta una región rectangular de ensayo (ver Fig. 2.10(b)).

Este tipo de cámaras tiene dos modos de funcionamiento:

1. En el rango inferior de frecuencias para las cuales la cámara fue diseñada es posible ubicar la antena de referencia en el ápice de la región estrecha como se muestra en la figura 2.10(b) tal que las reflexiones en las paredes laterales contribuyen directamente al campo que ilumina la antena bajo ensayo dado que la diferencia de fase entre el rayo directo y el rayo reflejado es despreciable (distinto a lo que sucede en la cámara anecoica rectangular).
2. A medida que se aumenta la frecuencia, resulta más difícil ubicar la antena de referencia en el ápice de la cámara por lo que los rayos reflejados comienzan a interferir con los rayos directos afectando la medida. En este caso la antena de referencia se aparta de la zona estrecha y la cámara se utiliza como una cámara rectangular.

La desventaja de este tipo de cámaras es el elevado costo de construcción.

- *El tipo de cámara a construir en el IAR es del tipo rectangular.*

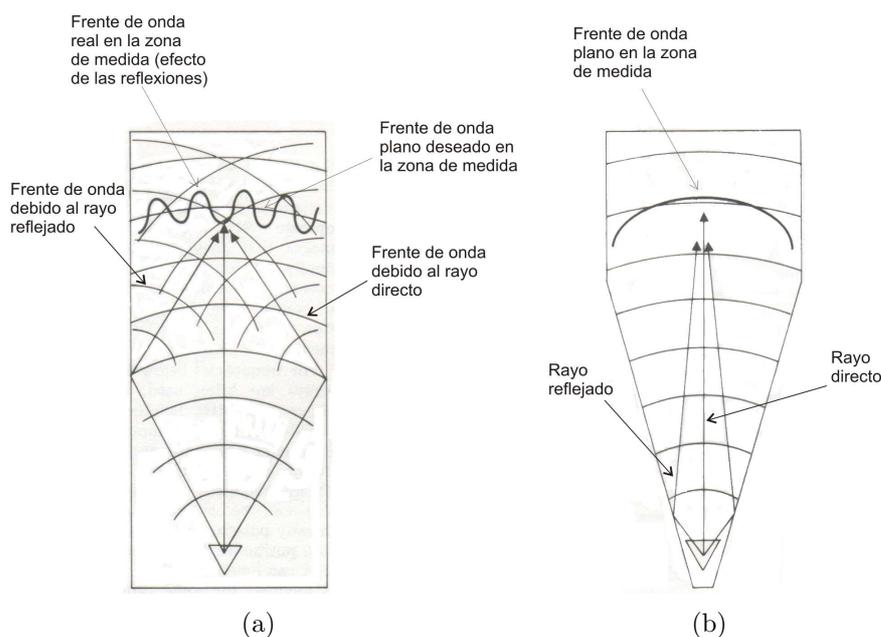


Figura 2.10: a) Cámara rectangular. Efecto de los rayos Reflejados que inciden en la zona de medida. Deformación del frente de onda. b) Cámara estrecha. Conformación del frente de onda plano.

### 2.6.4 Componentes de una cámara anecoica.

La instrumentación de una cámara anecoica para medir antenas es la misma que define el estándar para los campos abiertos como se mostró en la sección 2.2 con el agregado que sus paredes internas se encuentran revestidas con paneles absorbedores cuya forma y tamaño dependen del propósito de la cámara y de la frecuencia de operación.

En el rango de las microondas se utilizan absorbedores de forma piramidal compuestos por goma espuma a base de uretano embebida con una solución que contiene carbón sólido y químicos que retardan el fuego. Los mismos son de color negro y tienen una capa de pintura azul para mejorar la reflexión de la luz.

Los absorbedores utilizados en la cámara anecoica del IAR pueden observarse en la imagen de la figura 2.11.

Como puede observarse, los absorbedores con forma piramidal se utilizan para este tipo de aplicaciones ya que atenúa señales en un ancho de banda grande y con las mismas características ya sea para ángulos de incidencia grandes o perpendiculares. Estos se caracterizan por su nivel de *reflectividad* para un ángulo de incidencia normal y se expresa en  $[-dB]$ , que depende de su grosor y del ángulo de incidencia de la señal con valores típicos entre los -30 a -50 dB.



Figura 2.11: Panel absorbedor utilizado en el interior de la cámara anecoica del IAR

## 2.7 Características de la Cámara Anecoica construida en el predio del IAR. Consideraciones de diseño.

El diseño típico de un campo lejano de medida requiere del cumplimiento los siguientes criterios de diseño (algunos ya mencionados en las secciones anteriores):

1. Condición de fase:  $R > 2D^2/\lambda$ .  $R$ : Separación entre ambas antenas.
2. Condición de iluminación:  $d > \lambda R/4D$ .  $d$ : Apertura de la antena de referencia.
3. Condición de no iluminación del suelo: determina la altura respecto al piso donde deben colocarse las antenas. Esta condición establece que
  - (a) Para el lóbulo principal:  $h_t = h_r \geq 4D$ .
  - (b) Y para el lóbulo secundario:  $h_t = h_r \geq 6D$ .

En la figura 2.12 se indican la relación de estos parámetros con el campo de medida. Como es evidente, las condiciones anteriores tendrán influencia directa en las dimensiones que deberá tener la cámara anecoica.

Como se anticipó en la sección 2.6.3 la cámara anecoica a implementar en el IAR será del tipo rectangular por lo que para su diseño también se tuvieron en cuenta los siguientes factores:

4. La ecuación del campo lejano,  $2D^2/\lambda$  la cual asegura la uniformidad de la fase en el plano de medida.
5. Las frecuencias mínimas y máximas de las antenas que se planea medir.
6. La incertidumbre permitida en la medida debido a:

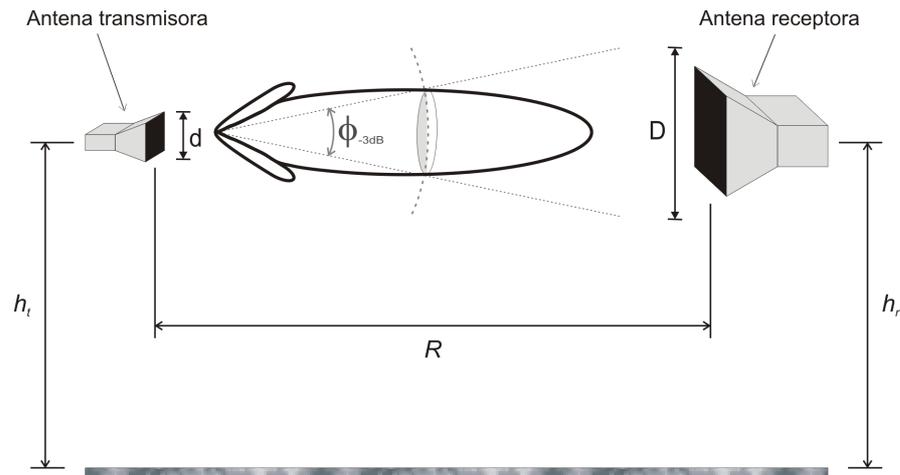


Figura 2.12: Parámetros que determinan las dimensiones del campo de medida

- La directividad de la antena fuente y la performance de las paredes absorbentes que determinan, en primera instancia, el nivel de señales “extrañas” que establecen la incertidumbre de la medida.
- La finitud en la distancia que separa ambas antenas.

Teniendo en cuenta los parámetros de diseño mencionados en el punto anterior el objetivo del grupo a cargo del diseño de la cámara anecoica es establecer una *región de prueba* o “*zona quieta*” dentro de la cámara donde se garantice el error de medida especificado. Una vez determinadas las dimensiones de la cámara se procede a la selección de los paneles absorbedores ya que dependiendo de la ubicación de cada panel en la cámara el nivel de reflectividad que lo caracteriza puede ser distinto.

Para el diseño de la cámara anecoica del IAR se estableció en primer lugar el rango de frecuencias de operación teniendo en cuenta los diseños de antenas presentes y futuros. Esto determinó las siguientes especificaciones (Ver cuadro 2.1).

Cuadro 2.1: Apertura D típica de las antenas que se Ensayaran en la cámara anecoica del IAR.

| Frecuencia típica | Apertura D de la antena a considerar |
|-------------------|--------------------------------------|
| 400 Mhz           | $D = 2m$                             |
| 1.275 Ghz         | $D = 1m$                             |
| 2-2.4 Ghz         | $D = 0,8m$                           |
| 8-8.4 Ghz         | $D = 0,4m$                           |

A lo que se suma la siguiente especificación de incertidumbre en la medida:

- Incertidumbre < 0.1 dB @ 2 GHz

Como se mencionó anteriormente el parámetro  $D$  es la dimensión del plano de apertura de la antena a medir. Una vez determinado el valor de  $D$  y la frecuencia de operación se determina la distancia  $R$  para la condición de campo lejano  $R > 2D^2/\lambda$ . El próximo parámetro a determinar es el ancho  $W$  de la cámara que debe cumplir  $W > R/2,75$  según se estableció en (2.16). Estas relaciones aseguran que el ángulo de incidencia de cualquier frente de onda en las paredes, techo y piso sea menor a 60 grados obteniéndose una zona quieta del orden de:

$$\text{Diámetro de la zona quieta} \simeq W/3 \quad (2.17)$$

Esta zona es el volumen de la cámara donde la reflectividad es especificada y debe ser mayor en diámetro que la antena bajo prueba.

En resumen, las dimensiones de la cámara deben cumplir las especificaciones listadas en el cuadro 2.2.

Cuadro 2.2: Resumen de los parámetros de diseño que debe cumplir el diseño de la cámara anecoica.

| Parámetro                  | Especificación    |
|----------------------------|-------------------|
| Condición de campo lejano  | $R > 2D^2\lambda$ |
| Ancho de la cámara         | $W > R/2,75$      |
| Diámetro de la zona quieta | $W/3$             |

A partir de las especificaciones del cuadro 2.1 y de los parámetros de diseño del cuadro 2.2 se concluye que la cámara deberá tener las siguientes dimensiones que se muestran en el cuadro 2.3.

Cuadro 2.3: Dimensiones de la cámara anecoica del IAR.

| Parámetro                          | Valor            |
|------------------------------------|------------------|
| Para la condición de campo lejano: | $R = 10$ metros. |
| Longitud total de la cámara:       | $L = 12$ metros. |
| Ancho de la cámara:                | $W = 6$ metros.  |
| Altura de la cámara:               | $h = 6$ metros.  |
| Diámetro de la zona quieta:        | $d = 2$ metros.  |

### 2.7.1 Absorbedores: Distribución dentro de la Cámara Anecoica.

Una vez determinadas las dimensiones de la cámara, el próximo paso en el diseño es la selección de los paneles absorbedores dependiendo de su ubicación dentro del campo de medida para lograr los niveles de reflectividad especificados donde *un requerimiento*

común para microondas es una reflectividad máxima de  $-40\text{dB}$  a la menor frecuencia de operación[5].

Determinado el nivel de reflectividad, los requerimientos de los absorbedores se determinan teniendo en cuenta los siguientes criterios:

1. La pared receptora (iluminada por la antena de referencia) recibe el frente de onda incidente de forma normal por lo tanto el nivel de reflectividad se determina directamente de las características del absorbedor.
2. La pared transmisora (pared ubicada detrás de la antena de referencia) posee absorbedores de la mitad de altura que la pared receptora ya que la potencia incidente es mínima debido a que la antena de referencia se diseña con una relación *front-to-back* que permita absorbedores con menor reflectividad.
3. Los absorbedores de las paredes, techo y piso son determinados por el ángulo de iluminación desde la antena fuente y estimando la atenuación debido al camino especular de la señal. Es decir, la reflectividad de los absorbedores puede ser distinta dependiendo de si los rayos reflejados inciden o no en la zona quieta. Estos niveles son restados del valor de reflectividad requerido y así queda establecido el requerimiento de estos absorbedores.
4. Luego, una vez determinada la reflectividad se especifica el área y la forma de las regiones donde los rayos reflejados inciden en la zona quieta. En el caso de la cámara anecoica del IAR, el grupo de diseño determinó áreas hexagonales con absorbedores de mayor reflectividad (más altos) cuyas dimensiones junto con la reflectividad del absorbedor se determinaron en base al nivel de máximo de potencia permitido en la zona quieta.

Los absorbedores utilizados poseen las siguientes características (cuadro 2.4):

Cuadro 2.4: Resumen de las características técnicas de los paneles absorbedores.

| Características técnicas de los absorbedores<br>utilizados en la cámara anecoica IAR. |
|---|
| Marca: ETS Lindgren.  |
| Modelo 1: Microwave Absorber EHP 12 PCL.<br>Reflectividad:- 40 dB @ 2 GHz             |
| Modelo 2: Microwave Absorber EHP 18 PCL.<br>Reflectividad:- 45 dB @ 2 GHz             |

Y se encuentran distribuidos en la cámara como se muestra en la figura 2.13.<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Para más información sobre como se distribuyen los paneles ver [5] Apéndice A.

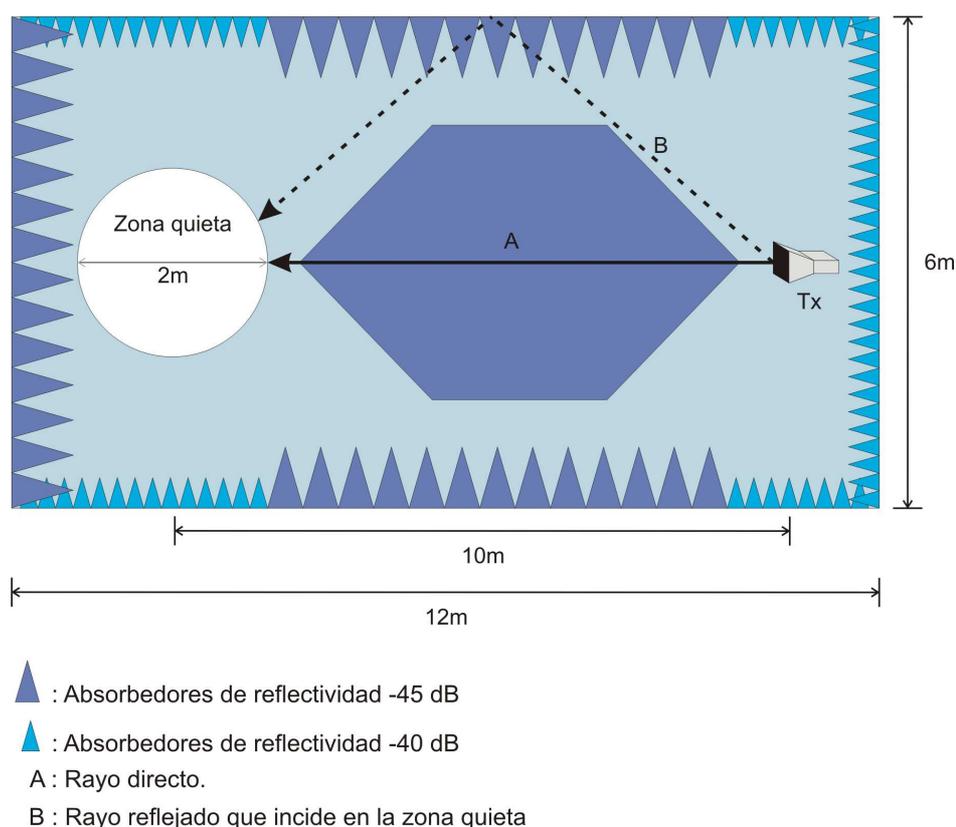


Figura 2.13: Vista en planta de la cámara anecoica del IAR que muestra la disposición de los paneles absorbentes

### 2.7.2 Construcción de la cámara anecoica. Características.

La estructura de la cámara es del tipo prefabricada y arquitectural (según define la bibliografía). Las paredes de la misma son de madera revestidas internamente con placas de hierro galvanizado por lo que también funciona como jaula de Faraday.

Los paneles absorbentes se hallan pegados sobre las placas de hierro como se observa en la figura 2.14(b) y 2.14(c), y la jaula se halla puesta a tierra por cuestiones de seguridad.

En la figura 2.14 se muestran imágenes de la construcción de la cámara así como de la distribución de los paneles absorbentes según se explicó en la sección anterior. También puede verse la ubicación del posicionador de antena para dar una idea más clara del sistema de medida.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2.14: a) Espacio destinado a la construcción de la cámara. b) y c) Construcción de la Jaula de Faraday y pegado de los paneles absorbentes. d) y e) Distribución de los absorbentes. f) Ubicación del posicionador de antena dentro de la cámara.

## 2.8 Resumen.

En este capítulo se mostró la estructura básica de un campo de medida así como las distintas configuraciones que se desprenden a partir de ella enfocándose principalmente en la cámara anecoica del tipo rectangular donde será implementado el sistema automático de medida.

Si bien el diseño de campos de medida no es el objetivo principal de este trabajo, tener una mínima idea de cómo están compuestos ayudará a comprender las especificaciones del sistema que se detallarán en el Capítulo 3.

La división en subsistemas del sistema de medida completo será tomada en cuenta a la hora de dividir las tareas de este proyecto siendo el desarrollo de un control eficaz del posicionador de antena la tarea fundamental y el desafío más grande.

# Capítulo 3

## Requerimientos del Sistema a Implementar.

### 3.1 Introducción.

Como lo indica el título, este proyecto consiste en el estudio y desarrollo de un sistema confiable capaz de medir los parámetros de campo lejano de las antenas sometidas a ensayo en un ambiente confinado como lo es una cámara anecoica. El mismo deberá ser capaz de ser controlado por una unidad de procesamiento central (CPU) la cual estará encargada tanto del control automático de las partes mecánicas en juego así como de la adquisición de datos usando técnicas de instrumentación virtual.

El proyecto será llevado a cabo según requisitos de costo, tiempos acotados para cada etapa y disponibilidad de materiales según se dispuso en el informe inicial presentado a la Cátedra de Trabajo Final.

En este capítulo se muestra el diseño conceptual del sistema a implementar y las especificaciones que deberá cumplir.

### 3.2 Motivación y origen del proyecto.

En los capítulos 1 y 2 se describieron los principios físicos involucrados en la medición de antenas así como una breve introducción a las técnicas de medición. También se mostró la estructura básica de un sistema de medición de antenas según establece la norma IEEE 149-1979 y que se repite en la figura 3.1.

A la fecha el Instituto Argentino de Radioastronomía cuenta con un sistema de medición de antenas automatizado con las siguientes características (Ver figura 3.2):

- Tipo de campo: Lejano
- Implementación: Abierto del tipo *fixed line of sight*.
- Movimiento controlado: Azimut.
- Electrónica de control del posicionador: provista por el fabricante del posicionador. Modificada para adaptarse al sistema.

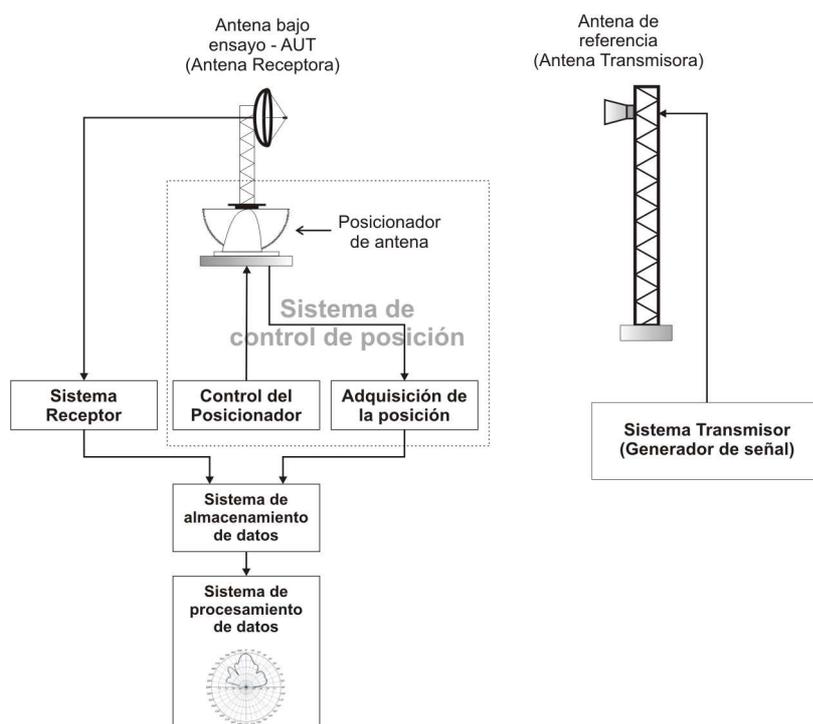


Figura 3.1: Estructura general de un sistema de medición de antenas.

Comparando con la figura 3.1 es evidente que el sistema cumple con la estructura propuesta por la norma.

Si bien el sistema mostrado se halla actualmente en funcionamiento, la idea es mejorar en el nuevo campo aquellos aspectos que resulten limitantes en el campo ya implementado.

A partir de la experiencia del trabajo con el campo de medida actual, entre los factores limitantes destacan:

- La no existencia de lazo de control que permita, entre otras cosas mantener la velocidad de giro constante. La computadora encargada del control enciende y apaga la electrónica que controla los motores pero la velocidad de giro es seteada manualmente.
- Otra consecuencia es que en algunas posiciones existe pérdida de torque en los motores ya que el sistema solamente sensa la posición.
- El sistema es sensible a variaciones de carga grandes.

Esto, sumado a que **el posicionador actual no está provisto de la electrónica necesaria para el control de sus motores** permite la posibilidad de un rediseño del sistema completo.

Es por lo anterior que se propone para el campo cerrado de medida la estructura que se muestra en la figura 3.3.

El sistema mostrado en la figura 3.3 permitirá descentralizar el control del posicionador permitiendo implementar un controlador dedicado. El algoritmo de control a implementar se verá con detalle en el Capítulo 6.

A partir de la figura 3.3 se establece que la automatización del sistema requerirá:

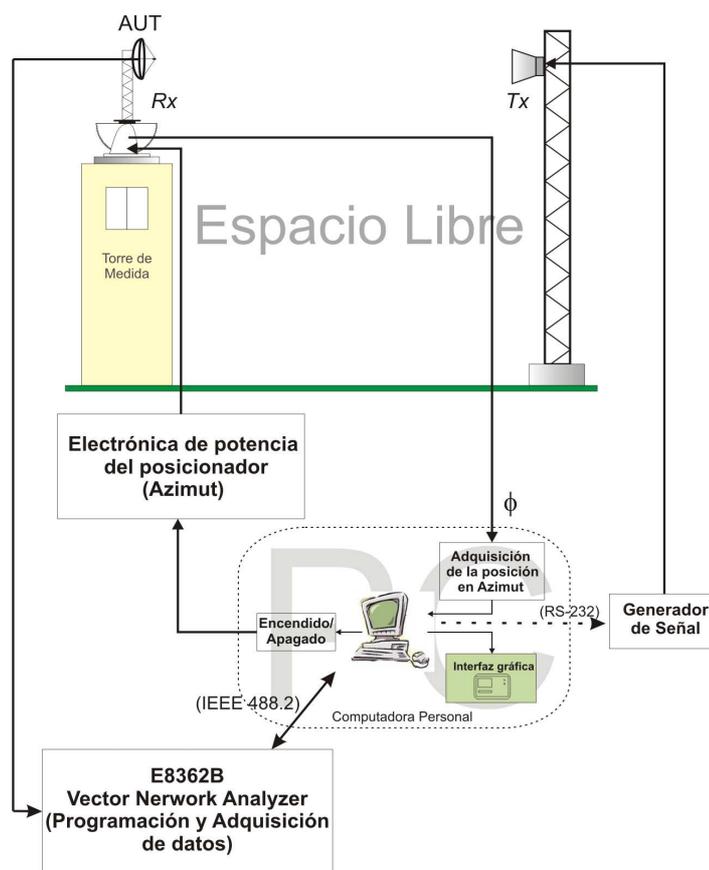


Figura 3.2: Estructura del sistema de medida actual en las instalaciones del IAR.

- La selección y diseño de una unidad que concentre la electrónica de potencia necesaria para garantizar el funcionamiento correcto y seguro de los motores que permiten el movimiento en azimut y elevación (teniendo en cuenta la ampliación futura del sistema de medida).
- La selección, y si es necesario, diseño del hardware necesario para la adquisición de las variables a controlar.
- El desarrollo de un controlador digital cuya función principal sea la implementación de un algoritmo de control y que además transmita en tiempo real el dato de posición adquirido.
- La adaptación de la aplicación de instrumentación virtual actualmente utilizada sobre una computadora personal encargada de recolectar el dato de posición proveniente del controlador digital y el valor de potencia medido por el analizador de redes para determinar el diagrama de radiación de la antena bajo ensayo.

De esta forma, el proyecto puede dividirse en dos tareas principales a cumplir:

1. Control del posicionador de antena e implementación de una estrategia de control implementando una unidad de control dedicada.

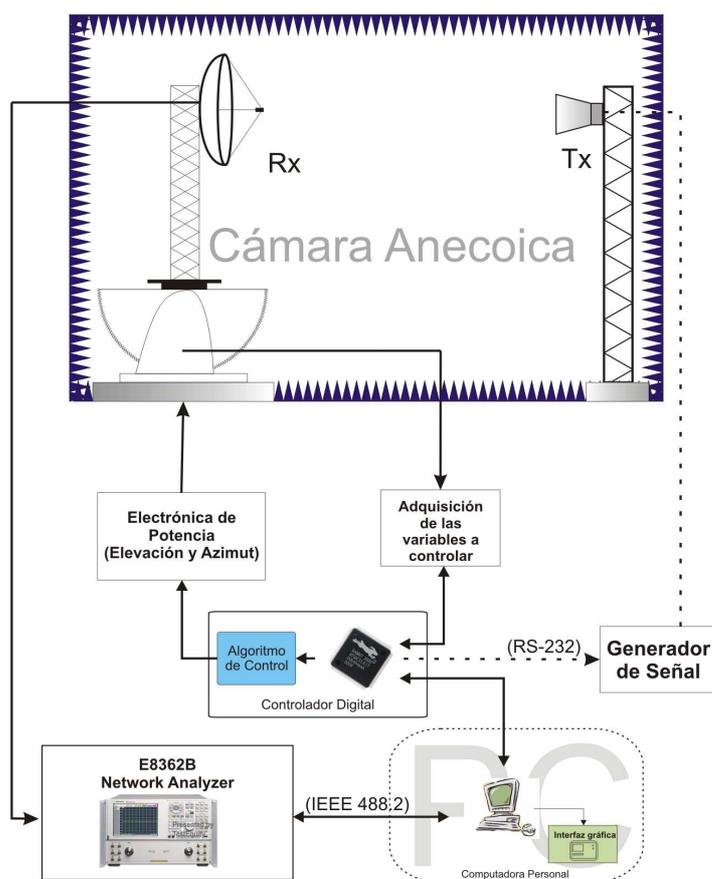


Figura 3.3: Estructura propuesta del sistema de medida a implementar en la cámara anecoica del IAR.

2. Sincronizar el dato de posición adquirido con el valor de potencia medido por el analizador de redes. Esto se implementará en una computadora personal mediante una aplicación de instrumentación virtual.

### 3.3 Especificaciones técnicas del proyecto.

Las especificaciones técnicas fueron determinadas por el personal del IAR encargado del diseño, construcción y medida de antenas bajo la dirección del Ing. Juan Sanz.

Las mismas no involucran el diseño del campo de medida ni la selección de otros instrumentos como los que se listan en la sección siguiente sino que se limitan a aquellos requerimientos dentro del marco de este proyecto.

#### 3.3.1 Requerimientos técnicos del sistema.

La automatización del sistema deberá permitir:

- Control total de la posición y velocidad del posicionador de antena por parte del operador para el sentido de movimiento en azimut mediante una interfaz gráfica con la posibilidad de ampliar el sentido de movimiento a elevación también.

- Resolución angular en azimut y elevación de  $0.1^\circ$ .
- Visualización de los datos de potencia en diagrama polar ó  $XY$ .
- Presentación de los datos adquiridos en forma de planilla de cálculo.
- Aplicaciones de software que permitan al operador la configuración de los instrumentos de medida también mediante una interfaz gráfica. Las mismas deberán ser capaces de establecer la frecuencia y potencia del generador de señal utilizado en el campo de medida.
- Escalabilidad del sistema. Es decir, el diseño del sistema deberá permitir futuras modificaciones, dentro de un margen razonable, para adaptarse a posibles nuevos requerimientos.

### 3.3.2 Requerimientos adicionales del sistema.

A modo de complemento el sistema deberá:

- Adaptar su diseño a los componentes predefinidos del sistema y sus características ya que toda modificación de las mismas deberá ser evitada.
- Completar una única revolución para un determinado sentido de giro en el movimiento de azimut. Es decir, el sentido de giro deberá alternarse entre una medida y la otra.
- Adaptarse a modificaciones de sus parámetros físicos, por ejemplo, grandes variaciones en la carga del posicionador. Esto condicionará la estrategia de control a implementar.
- Control del Receptor mediante el bus GPIB.

## 3.4 Componentes definidos del proyecto.

Los componentes predefinidos del sistema se listan a continuación:

- Posicionador Scientific Atlanta Mod.:53050<sup>1</sup>.
- Receptor: Agilent E8362B Vector Network Analyzer.
  - i Rango de frecuencias de medida: 10MHz a 20Ghz.
  - ii Interfaz GPIB provista de fábrica.
- Generador de señal: Comunicación con el CPU mediante una interfaz serie. El desarrollo del mismo no corresponde a este proyecto.
- Control remoto del receptor: Mediante la utilización del bus GPIB bajo la norma IEEE 488.2. Para esto se utilizaran adaptadores comerciales que permitan la comunicación del instrumento con el CPU.

---

<sup>1</sup>Se describirá con más detalle en el Capítulo 4.

## 3.5 Actividades a realizar en el marco del proyecto.

Como puede observarse las especificaciones del sistema de medida a implementar se refieren al sistema en general pero no condicionan el método ni los componentes a utilizar para cumplir con las mismas. Haciendo uso de esta libertad que se presenta a la hora del diseño, las actividades a llevar a cabo no solo involucrarán la utilización de las herramientas disponibles, sino que también la búsqueda, estudio y selección de soluciones que resuelvan problemas de hardware, control y comunicaciones entre los diversos componentes.

Es por esto que las actividades a realizar pueden dividirse en las siguientes etapas:

### I ETAPA INICIAL

- Estudio de los requerimientos del sistema en forma global.
- Estudio del software y hardware dedicados a la implementación de técnicas de instrumentación virtual.
- Estudio y ensayo del posicionador Scientific Atlanta.
- Estudio y selección de la estrategia de control a implementar.
- Estudio y selección del hardware que permita el control del posicionador Scientific Atlanta y la implementación del algoritmo de control seleccionado.
- Análisis de la posibilidad de obtener un modelo matemático del posicionador en forma directa que permita la simulación y diseño asistido por computadora. En caso de no ser posible se estudiarán técnicas alternativas para conseguir este objetivo.
- Elección del hardware que permita determinar la posición del posicionador (y desarrollo en caso de ser necesario).
- Estudio de las características del receptor Agilent E8362B en lo que respecta a la comunicación con el resto de los componentes del sistema.
- Elección de la CPU que mejor se adapte a los requerimientos del sistema.

### II ETAPA INTERMEDIA

#### Del control del posicionador:

- Implementación en el posicionador y ensayos del sistema de detección de posición.
- Determinación del modelo matemático del posicionador.
- Diseño, simulación e implementación del sistema de control del posicionador.
- Implementación del sistema de control mediante la CPU. Desarrollo del software necesario.
- Pruebas de control del posicionador (posición y velocidad).

#### Del receptor:

- Desarrollo de aplicaciones de software que permitan el control automático del receptor mediante el bus GPIB.
- Prueba de dichas aplicaciones.

Del sistema en general:

- Implementación del sistema completo.
- Prueba del sistema en conjunto.
- Corrección de errores en caso de ser necesario.

### III ETAPA FINAL

Del sistema de medida:

- Implementación de una interfaz gráfica que permita al usuario final la utilización del sistema.
- Pruebas de campo:
- Prueba del sistema de medida utilizando antena de parámetros conocidos.
- Corrección de errores.
- Depuración de los algoritmos implementados para el control y corrección de los datos obtenidos durante la medida.

## 3.6 Resumen.

En este capítulo se pusieron de manifiesto las motivaciones que dieron origen a este proyecto. Se presentó un esquema conceptual del sistema a implementar a modo de comparación con el sistema de medida actualmente funcionando en las instalaciones del IAR y lo establecido por el estándar de la IEEE.

También se resumieron las actividades a llevar cabo en el marco del proyecto estando estas limitadas a la disposición de recursos y tiempo.

El capítulo siguiente comienza ya con la parte específica del proyecto comenzando con el análisis en detalle del funcionamiento del posicionador de antena con el objetivo de establecer los problemas que deberán resolverse para la implementación del control del mismo.

# Capítulo 4

## Posicionador de Antena. Análisis de su funcionamiento. Lineamientos para el planteo de un Modelo Dinámico.

### 4.1 Introducción.

En el Capítulo 3 se mostraron aquellos elementos que motivaron a este proyecto así como el diagrama conceptual del sistema a implementar.

Como se dijo anteriormente, un sistema de medición de antenas puede dividirse en varios subsistemas que deben funcionar de forma conjunta.

En este capítulo se analizarán las especificaciones y requerimientos del subsistema que representa el desafío más grande de este proyecto: el control del posicionador de antena.

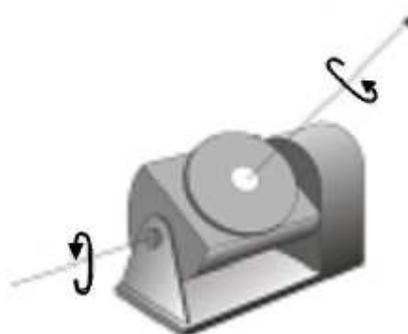
### 4.2 Sistema Posicionador de Antena.

En el Capítulo 2 se mostraron diferentes configuraciones de posicionadores de antena aunque desde del inicio del proyecto se sabía que la configuración a utilizar sería del tipo *Azimet-sobre-Elevación*.

El posicionador a utilizar es de la firma Scientific Atlanta y se muestra en la figura 4.1(a) junto con los sentidos de movimiento (grados de libertad) que permite (figura 4.1(b)).

El movimiento en cada sentido se obtiene a través de dos motores de corriente continua cada uno asociado en forma independiente a cada uno de los ejes siendo el uso de este tipo de motores bastante común para este tipo de aplicaciones debido a que proveen torque instantáneo.

Las especificaciones provistas por el fabricante se muestran en el cuadro 4.1.



(a) Posicionador Scientific Atlanta 53050a (b) Movimientos en azimut y elevación.

Figura 4.1: Posicionador de antena a utilizar en el campo de medida.

Cuadro 4.1: Características técnicas del posicionador Scientific Atlanta 53050A

| Parámetro   |                        | Valor          |
|---|------------------------|----------------|
| Momento flector total [ft/lbs]                                  |                        | 600            |
| Carga vertical máxima [lbs]                                     |                        | 800            |
| Potencia motor  | Elevación [HP]         | 1/3            |
|   | Azimut [HP]            | 1/15           |
| Tacómetro   |                        | Si             |
| Torque provisto   | Elevación [ft/lbs]     | 800            |
|   | Azimut [ft/lbs]        | 100            |
| Withstand torque  | Elevación [ft/lbs]     | 800            |
|   | Azimut [ft/lbs]        | 200            |
| Máxima velocidad de operación                                   | Elevación [grados/min] | 200 (0.55 rpm) |
|   | Azimut [rpm]           | 1.2            |
| Exactitud en la posición  | Elevación [grados]     | 0.05           |
|   | Azimut [grados]        | 0.05           |
| Backlash del sistema reductor                                   | Elevación [grados]     | 0.08           |
|   | Azimut [grados]        | 0.20           |
| Recorrido máximo en Elevación [grados]                          |                        | +95 a -45      |
| Diámetro del plato de giratorio [pulgadas]                      |                        | 16             |
| Diámetro del hueco central de acceso [pulgadas]                 |                        | 3              |
| Base de montaje   |                        | Si             |
| Altura total a 0° de elevación con la base removida [pulgadas]  |                        | 21             |
| Altura total a 0° de elevación con la base instalada [pulgadas] |                        | 26             |
| Peso Total [libras]   |                        | 390            |

Los motores junto con la parte mecánica asociada hacen que cada uno de los sentidos de movimiento esté compuesto por:

- Un motor de corriente continua (motor DC).
- Dos poleas vinculadas mediante una correa dentada que vinculan el motor DC con la caja reductora.
- Una caja de engranajes reductora.

Esto se puede apreciar en las imágenes de la figura 4.2 donde se puede ver que la estructura mecánica implementada en cada tipo de movimiento es similar.

Las figuras 4.2(a) y 4.2(b) muestran la parte mecánica correspondiente al movimiento en azimut. Las figuras 4.2(c) y 4.2(d), en cambio, muestran la mecánica asociada a al movimiento en elevación.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.2: a) y b) Conjunto electromecánico que permite el movimiento en azimut. c) y d) Conjunto electromecánico que permite el movimiento en elevación.

En ambas figuras se observa también que se encuentran implementados transductores de posición (encoders) y velocidad (tacómetros) por lo que la estructura para cada sentido de movimiento se puede representar en el diagrama en bloques de la figura 4.3.

Debe prestarse atención al hecho que los tacómetros se encuentran acoplados al eje de los motores de manera que no reflejan la velocidad de giro en azimut y elevación, sino que

la indican la velocidad de giro de los motores DC ya que se encuentran ubicados antes del sistema reductor. Esto se ve más claramente en la figura 4.3 donde se indican los puntos de los cuales se pueden obtener datos del posicionador.

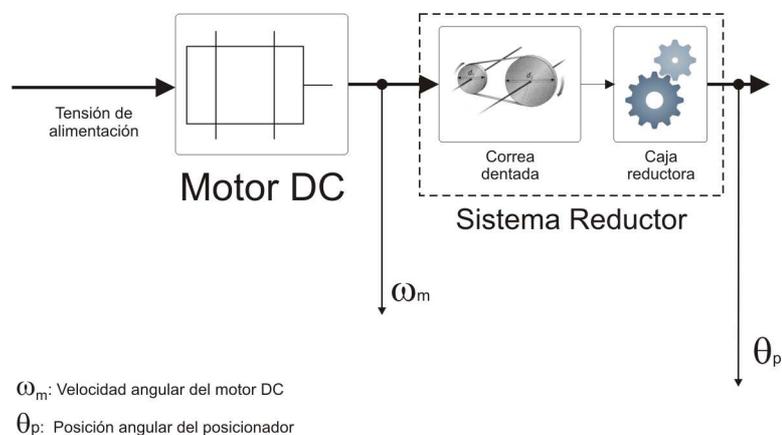


Figura 4.3: Diagrama en bloques válido para ambos sentidos de movimiento. Se indican también los puntos accesibles de medida.

La anterior es una estructura válida para ambos sentidos de movimiento por lo tanto, el mismo razonamiento aplicado al análisis de la automatización para un sentido de movimiento puede repetirse para el otro (con las modificaciones necesarias, por ejemplo, teniendo en cuenta que la potencia que maneja cada motor DC es distinta).

- *En la primera etapa del proyecto será prioridad automatizar el sentido de movimiento en azimut.*

### 4.3 Subsistemas relacionados con el Posicionador de Antena.

Los bloques relacionados con el control del posicionador de antena se muestran en la figura 4.4. Estos son:

- A. El controlador digital.
- B. La electrónica de potencia.
- C. Adquisición de datos.

cuyo diseño y especificaciones estarán basados en los requerimientos del posicionador.

En el caso del movimiento en azimut, conceptualmente el lazo de control tendrá la siguiente estructura básica que se muestra en la figura 4.5.

Como se sabe de la teoría de control, el diseño de un controlador requiere de un modelo matemático de la planta a controlar. En este caso, el modelo matemático de cada sentido de movimiento deberá describir la dinámica del conjunto motor más todas las componentes

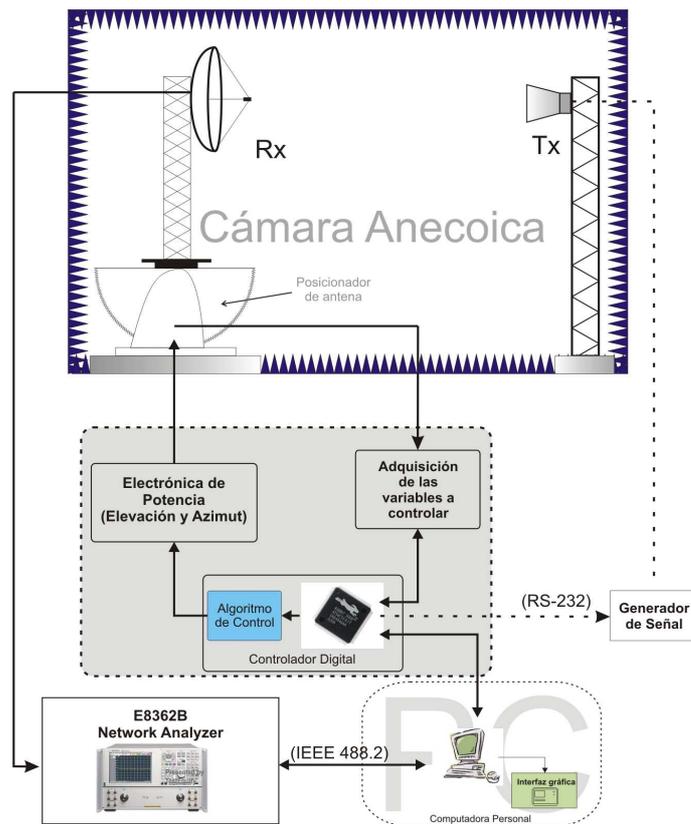


Figura 4.4: Bloques del sistema de medida a implementar relacionados directamente con el posicionador de antena.

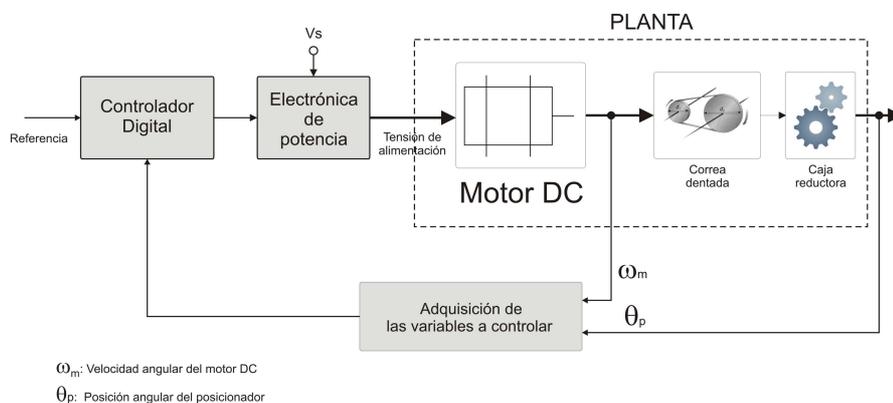


Figura 4.5: Esquema básico del lazo de control a implementar.

mecánicas que componen la planta lo que exige no solo conocer el comportamiento de cada bloque sino también como interactúan entre sí.

Además del controlador digital es necesario contar con una etapa capaz de proveer la potencia necesaria para el funcionamiento de los motores. Esto es lo que se denomina como *Electrónica de Potencia* en la figura 4.5.

Finalmente, y de acuerdo a los fundamentos básicos de la teoría de control deberán realimentarse aquellas variables que se deseen controlar. Para esto se utilizarán canales de

adquisición encargados del acondicionamiento y conversión analógico-digital de las señales en cuestión.

En las secciones siguientes se analizarán todos los aspectos relacionados con la parte electromecánica que permitirá definir los requerimientos de cada uno de los bloques asociados. El diseño de cada uno se verá más adelante conforme el avance del proyecto.

## 4.4 Motor de Corriente Continua.

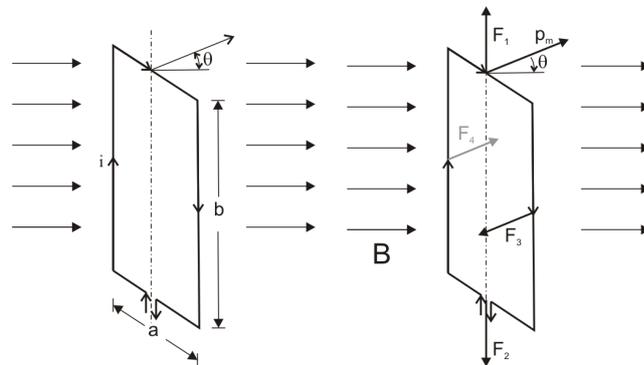
### 4.4.1 Principio de funcionamiento.

Básicamente, un motor de corriente continua está compuesto por un estator con polos salientes excitado por uno o más devanados de campo los cuales generan una distribución de flujo magnético en el entrehierro simétrica respecto al eje de los polos de campo.

El principio de funcionamiento es el mismo que rige al comportamiento de una espira rectangular uniforme por la que circula una corriente  $i$  dentro de un campo magnético por lo que en principio se analizará este fenómeno.

Dada una espira cuyo eje se encuentra perpendicular a la dirección del campo de inducción magnética  $\vec{B}$  se puede demostrar que la fuerza neta sobre la espira es nula y que sobre las caras laterales de la misma aparece un par.

En la figura 4.6(a) puede observarse una espira rectangular en un campo magnético uniforme cuya normal forma un ángulo  $\theta$ .



(a) Espira rectangular en un campo magnético uniforme por la que circula una corriente  $i$ .  
 (b) Fuerzas que actúan sobre la espira.

Figura 4.6: Fuerzas sobre una espira rectangular en un campo magnético uniforme.

Si por la espira circula una corriente  $i$ , la fuerza en los lados superior e inferior de longitud  $a$  estará dada por (Ley de Lorentz):

$$F = i.a \times B \quad (4.1)$$

o lo que es lo mismo:

$$F = i.a.B.\text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = i.a.B.\text{cos} \theta \quad (4.2)$$

donde, por ser un producto vectorial, las fuerzas sobre cada cara tendrán igual dirección pero sentidos opuestos como se observa en la figura 4.6(b) (fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ ).

Aplicando el mismo razonamiento a los lados verticales de longitud  $b$  se tiene que la fuerza resultante sobre cada lado estará dada por:

$$F = i.b \times B = i.b.B.\text{sen}(\varphi) \Rightarrow F = i.b.B \quad (4.3)$$

siendo iguales pero de sentido opuesto (fuerzas  $F_3$  y  $F_4$ ).

De esta forma, en la figura 4.6(b) se observa que aparece un par sobre la espira dado por:

$$\tau = i.b.B.\text{sen}(\theta). \quad (4.4)$$

Si se tratara de una bobina de  $N$  vueltas (como es el caso del bobinado del rotor de un motor DC) se tiene que el par está dado por:

$$\tau = Ni.a.b.B.\text{sen}(\theta) = Ni.A.B.\text{sen}(\theta) \quad (4.5)$$

donde  $A = a.b$  es el área de la espira.

La ecuación (4.4) muestra que se logra el par es máximo cuando el campo  $\vec{B}$  es paralelo al plano de la espira y nulo cuando la posición de la espira es perpendicular.

La forma adecuada de la ecuación (4.4) es:

$$\tau = N.I.A \times B \quad (4.6)$$

Donde  $p_m = N.I.A$  se denomina momento magnético dipolar y puede considerarse como una magnitud vectorial situada en el centro de la espira en la dirección del flujo de inducción magnética generado por la misma.

El concepto de momento magnético dipolar es bastante útil para entender como funcionan los motores de corriente continua ya que:

- Al representar  $N.I.A$  con  $p_m$  es evidente que el par no depende de la forma de la espira.
- Se demuestra que un campo magnético aplicado exteriormente tiende a orientar el momento magnético dipolar en la misma dirección que el campo magnético aplicado.

#### 4.4.2 Estructura básica de un Motor DC.

Basándose en el principio de funcionamiento visto en la sección anterior, un motor de corriente continua consiste en un estator (parte fija del motor) de polos salientes que contienen lo que se denomina el bobinado de campo encargado de generar un flujo magnético uniforme y un rotor (parte móvil) que contiene  $N$  espiras bobinadas que forman la armadura de la máquina y que se hallan conectadas a un conmutador compuesto por escobillas que actúa como rectificador mecánico.

En la figura 4.7 se muestra un diagrama esquemático de un motor DC. Se observa que la bobina deja de hacer contacto con el circuito de alimentación cuando se encuentra en la zona neutra (a medio camino de los polos del campo).

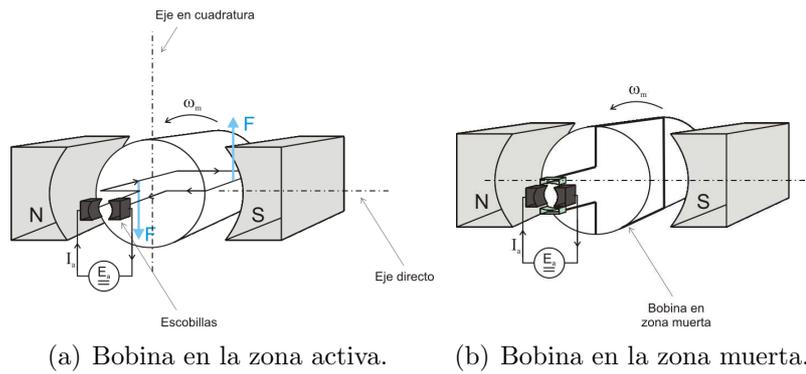


Figura 4.7: a) Bobina en la zona activa. Los extremos están en contacto con las escobillas y aparece el par. b) Bobina en la zona muerta. Los extremos no están en contacto con las escobillas.

A partir de la ecuación (4.5), es evidente que a medida que la bobina gira alrededor de su eje la cupla es cada vez menor hasta anularse cuando  $\theta = 90$  grados. De esta forma la cupla que se obtiene con un esquema como el de la figura 4.7 no es constante y dejará de funcionar casi enseguida a medida que avanza la alineación de los ejes.

Una forma de superar esta dificultad es utilizar un arrollamiento tal que cuando la parte giratoria ejerce cupla y gira un determinado ángulo el punto de alimentación cambie alimentando otros puntos del bobinado con el fin que el ángulo de cupla no cambie. De esta forma, los puntos de alimentación del bobinado se encuentran conectados a segmentos de cobre adyacentes aislados uno de otro denominados *delgas* y el conjunto se denomina *conmutador*. Esquemáticamente esto puede verse en la figura 4.8.

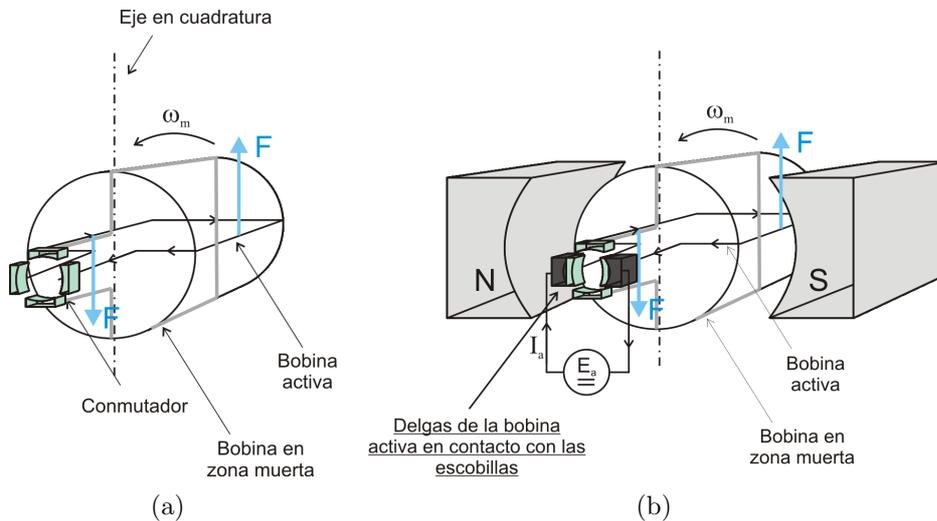


Figura 4.8: a) Disposición de dos bobinas a 90 grados. b) Efecto del conmutador.

En la figura 4.8(a) se representa de forma esquemática dos bobinas independientes dispuestas a 90 grados. Como puede verse, los extremos de cada bobina se hayan conectados al conmutador. En la figura 4.8(b) se observa como las escobillas solo hacen contacto con un par de delgas por vez a medida que gira el rotor de la máquina.

En un motor real, la parte giratoria está compuesta por un arrollamiento distribuido de forma tal que el ángulo entre las fuerzas magnetomotrices generadas por cada arrollamiento sea distinto de cero.

Luego, fijando las escobillas adecuadamente se puede obtener el ángulo de cupla que se desee. Es evidente por lo visto anteriormente que el mejor ángulo es  $\theta = 90^{\circ}$ <sup>1</sup> ya que se consigue la cupla electromagnética máxima.

En la figura 4.9 puede verse esquemáticamente en un corte transversal como se conectan las bobinas en el rotor de una máquina de corriente continua, la acción del conmutador y el sentido de circulación de la corriente donde los puntos indican el sentido hacia afuera de la página y las cruces hacia adentro.

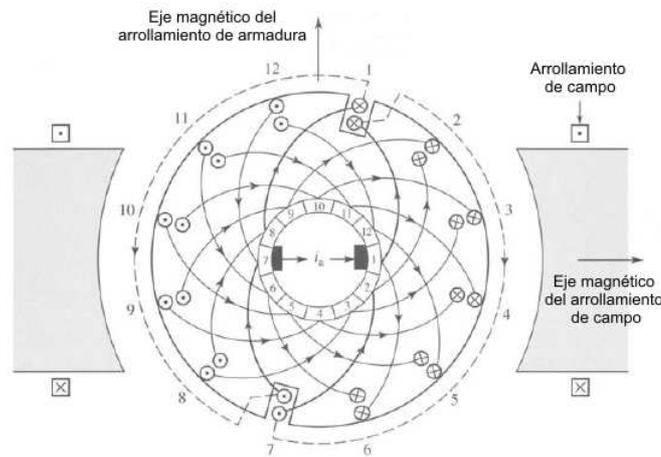


Figura 4.9: Corte transversal del arrollamiento de un motor DC.

Con un arrollamiento distribuido como el mostrado se logra el mismo efecto que una bobina enrollada en la armadura con su eje magnético vertical de forma tal que se ejerce un par constante que tiende a linear ambos ejes (ya que el ángulo de cupla no cambia cuando se produce la rotación).

También que existe un arrollamiento de campo encargado de generar el campo magnético que atraviesa la armadura (bobinado de campo).

La representación esquemática de una máquina de corriente continua se tiene en las figuras 4.10(a) y 4.10(a)

Finalmente, dependiendo de como se conectan los bobinados se obtienen las diferentes configuraciones que se muestran en la figura 4.11.

Siendo la configuración con excitación independiente la que se utilizará en el posicionador de antena para ambos sentidos de movimiento (ver sección 4.6).

<sup>1</sup>Por lo general se consideran grados eléctricos ya que el motor puede tener más de un par de polos.

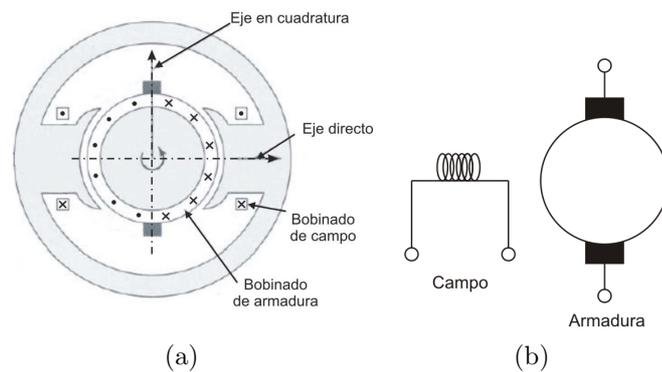


Figura 4.10: a) Disposición de los bobinados de campo y armadura en una máquina DC. b) Representación esquemática de una máquina DC.

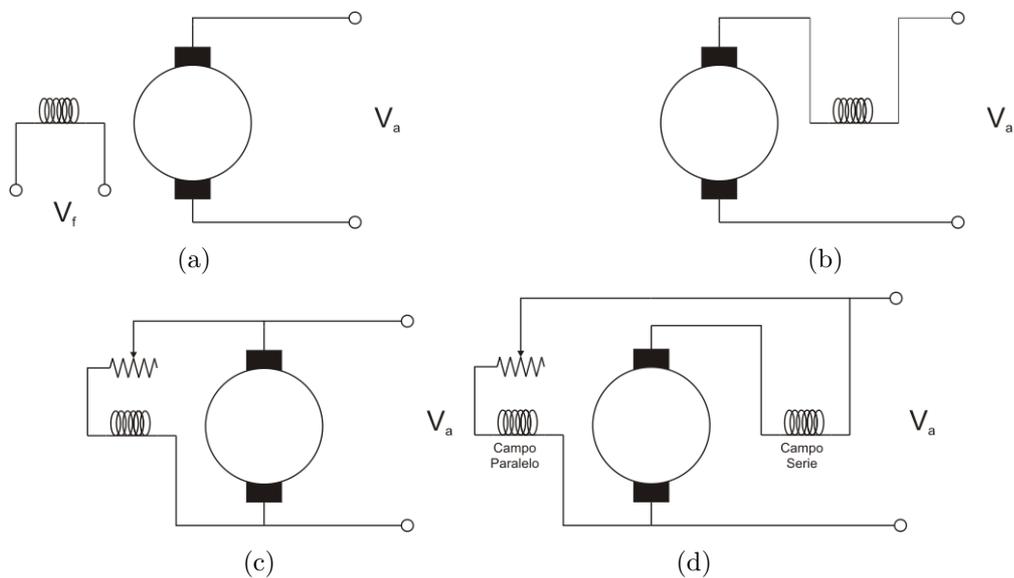


Figura 4.11: a) Excitación independiente. b) Conexión serie. c) Conexión paralelo. d) Conexión paralelo/serie.

## 4.5 Ecuaciones de un Motor de Corriente Continua. Primer Paso a un Modelo Matemático del Posicionador de Antena.

Como se dijo anteriormente, una de las tareas más importantes en el diseño lazos de control es modelado matemático que permitirá comprender como se comporta el sistema, simularlo y principalmente diseñar el lazo de control.

El modelo matemático de un motor de corriente continua ha sido ampliamente estudiado y puede encontrarse en cualquier libro de control. En el caso de un motor con excitación de campo independiente el modelo más general es el de la figura 4.12.

Como se mostró en la sección anterior, en un motor de corriente continua el flujo  $\theta_f$  es generado por el estator y puede obtenerse mediante la utilización de imanes permanentes

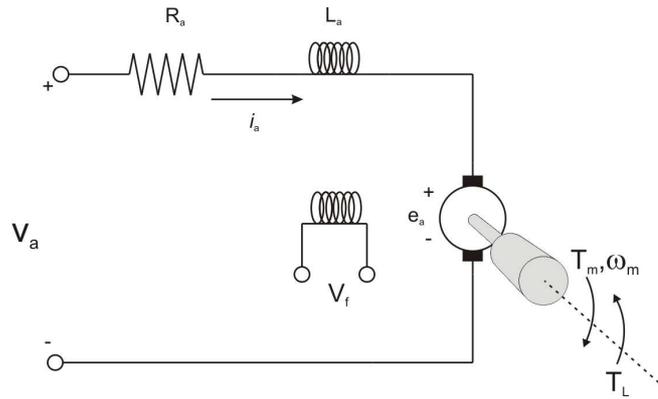


Figura 4.12: Modelo de un motor DC con excitación de campo independiente.

o a través de un bobinado como se muestra en la figura 4.10 donde una corriente de campo  $I_f$  controla al flujo  $\theta_f$ .

La relación entre ambas magnitudes está dada por:

$$\theta_f = K_f \cdot I_f = cte \quad (4.7)$$

Donde  $K_f [Wb/A]$  se denomina *constante de proporcionalidad de campo* y depende de la cantidad de espiras y de la reluctancia del camino magnético por lo que depende exclusivamente de los parámetros constructivos del motor.

A partir de lo adelantado en la sección anterior el flujo  $\theta_f$  se considerará **constante**.

Si ahora se considera el rotor de la máquina que contiene al bobinado de armadura por el que circula una corriente  $i_a$ , la cupla electromagnética generada estará dada por:

$$T_{em}(t) = K_t(t)\theta_f i_a(t) \quad (4.8)$$

donde  $K_t$  es la *constante de torque* y depende del número de polos del motor, el número de ramas en paralelo y el número de bobinas concatenadas. Por lo tanto, también es un parámetro propio del diseño.

Luego, si  $\theta_f$  es constante entonces puede escribirse:

$$T_{em}(t) = K_i i_a(t) \quad (4.9)$$

donde  $K_i = K_t \theta_f$  se denomina constante del par.  $[Nm/A]$ .

Volviendo al esquema de la figura 4.12, la tensión  $e_a$  que aparece en el bobinado de armadura se debe a que dado que el rotor está compuesto por espiras que giran en un campo magnético se inducen corrientes en el mismo y se tiene entonces una Fem en el bobinado de armadura conocida como *reacción del inducido* cuya magnitud está dada por la siguiente ecuación:

$$e_a = K_b \omega_m(t) \quad (4.10)$$

donde

- $K_b$  es la constante de fuerza contraelectromotriz.  $[V \cdot s/rad]$ .

- $\omega_m$  es la velocidad de giro angular del motor en  $[rad/s]$  y como  $\theta_f$  es constante, entonces  $K_b = K_e\theta_f$ .

La corriente de armadura  $i_a$  se obtiene aplicando una tensión controlada conocida como tensión de armadura  $v_a$ . (figura 4.12).

La armadura está modelada como un circuito con resistencia  $R_a$  en serie con una inductancia  $L_a$  y una fuente de tensión  $e_a$  que representa la fuerza contraelectromotriz. Resolviendo la malla que representa al circuito de armadura se tiene la ecuación

$$v_a(t) = e_a(t) + R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} \quad (4.11)$$

que muestra la relación entre la tensión de armadura, la corriente de armadura y la fuerza contraelectromotriz.

Agrupando las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11) se tienen lo que se denomina las *ecuaciones eléctricas del motor de corriente continua*:

$$\begin{aligned} T_{em}(t) &= K_i i_a(t) \\ e_a &= K_b \omega_m(t) \\ v_a(t) &= e_a(t) + R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Luego, si se analiza la parte mecánica del modelo aplicando la extensión de las ecuaciones de Newton para el movimiento rotacional se tiene que:

$$\sum T_i(t) = J.\alpha \quad (4.13)$$

donde

- $T_i(t)$  son los momentos o pares alrededor de un eje fijo.  $[Nm]$ .
- $J$  es el momento de inercia de la masa alrededor del eje de rotación.  $[Kg.m^2]$ .
- $\alpha$  es la aceleración angular.  $[rad/seg^2]$ .

Por lo tanto, modelando la fricción viscosa de las partes mecánicas con el coeficiente de fricción  $B_m$  se tiene la ecuación que vincula la cupla electromagnética  $T_{em}$  con la cupla de carga  $T_L$  obteniéndose como resultado la ecuación mecánica del motor de corriente continua:

$$T_{em}(t) - T_L(t) - B\omega_m(t) = J.\frac{d\omega_m(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

Agrupando las ecuaciones (4.12) y (4.14) se tiene que las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de un motor de continua son (en notación Newtoniana<sup>2</sup>):

$$e_a = K_b \omega_m \quad (4.15)$$

$$T_{em} = K_i i_a \quad (4.16)$$

$$v_a = e_a + R_a i_a + L_a \dot{i}_a \quad (4.17)$$

$$T_{em} - T_L - B\omega_m = J.\dot{\omega}_m \quad (4.18)$$

---

<sup>2</sup>En la notación Newtoniana la derivada de una variable se escribe de la forma  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ .

donde se observa que sustituyendo (4.15) y (4.17) en (4.16) y (4.18) respectivamente las ecuaciones se reducen a:

$$\dot{i}_a = \frac{1}{L_a}v_a - \frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{K_b}{L_a}\omega_m \quad (4.19)$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{K_i}{J_m}i_a - \frac{1}{J_m}T_L - \frac{B}{J_m}\omega_m \quad (4.20)$$

que son dos ecuaciones diferenciales de primer orden las cuales serán utilizadas más adelante para determinar el modelo matemático de cada sentido de movimiento del posicionador (ver Capítulo 5).

## 4.6 Motores DC. Configuración con Excitación Independiente de Campo. Justificación de su utilización.

En la sección anterior se presentó el modelo de un motor de corriente continua junto con las ecuaciones que describen su funcionamiento. Ahora, el desarrollo anterior se basa en la premisa que el flujo de campo  $\theta_f$  es constante cosa que no es casual en los casos en los que se quiere establecer un control de velocidad o posición.

A partir de las ecuaciones (4.12) y (4.14) la velocidad angular en estado estacionario estará dada por la siguiente expresión:

$$\omega_m = \frac{v_a}{k_e\theta_f} - \frac{R_a}{k_t\theta_f}T_{em} \quad (4.21)$$

de donde puede concluirse que en un motor DC con excitación de campo independiente la velocidad puede ajustarse mediante  $v_a$  y  $\theta_f$ .

La alternativa más común consiste en mantener  $\theta_f$  constante a su valor nominal. De esta manera se logra:

1. Que exista una relación lineal entre la tensión de armadura  $v_a$  y la velocidad de giro del motor (observar que  $\omega_m$  es inversamente proporcional a  $\theta_f$ ).
2. Que el motor trabaje en lo que se denomina región de torque constante (ya que la corriente de armadura es constante).

Esta condición de funcionamiento requiere que cada variable se encuentre dentro de los límites de funcionamiento nominal como se muestra en la figura 4.13.

En la figura 4.13 se muestra también otra región donde la velocidad  $\omega_m$  aumenta por encima de su valor nominal denominada *región de debilitamiento de campo* donde ahora el control se realiza mediante  $\theta_f$  y debido a que la potencia interna de la máquina es:

$$V_a I_a = \omega_m T_{em} \quad (4.22)$$

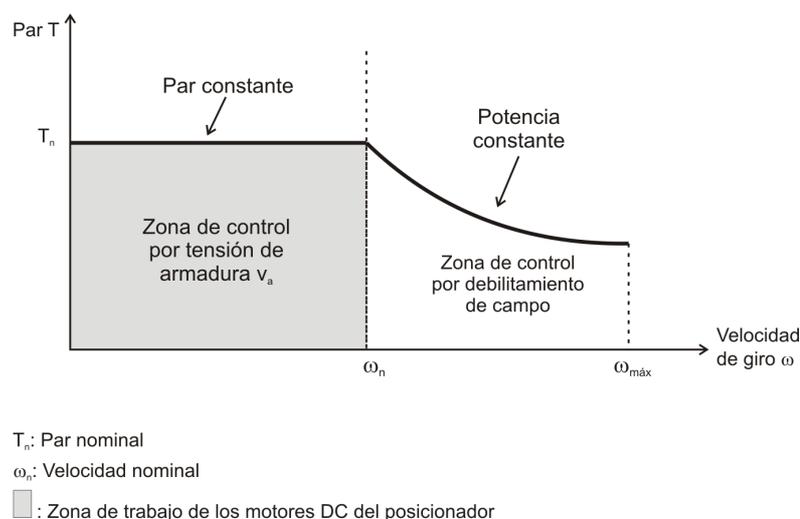


Figura 4.13: Regiones de funcionamiento de un motor DC.

y que tiene un límite máximo, de manera que ni la tensión ni la corriente de armadura pueden exceder sus valores máximos permitidos lo que no deja otra opción que reducir la cupla electromagnética. Esto se consigue debilitando el campo  $\theta_f$  por lo que el control de la velocidad pasa a ser **no lineal**.

Debido a que un control no lineal no es sencillo de implementar y además, el sistema no requiere desarrollar velocidades mayores a las nominales se establece que:

- *El control se hará mediante la tensión de armadura respetando los valores nominales y con el campo generado de forma independiente y alimentado con una tensión fija según las especificaciones de chapa del motor.*

## 4.7 Características de los motores a utilizar. Especificaciones de la Electrónica de Potencia a implementar.

Como se mostró al principio de este capítulo, la estructura electromecánica utilizada en cada sentido de movimiento es la misma con la salvedad que la potencia requerida para el sentido de movimiento en elevación es mayor. Es por esto que el diseño de la automatización de cada eje puede realizarse mediante el mismo procedimiento.

Cuando los niveles de potencia que se deben manejar exceden aquellos capaces de ser manejados por la electrónica del controlador, es necesario utilizar convertidores de potencia capaces de entregar la potencia requerida según lo establece el controlador digital para un determinado modo de funcionamiento.

El tipo de convertidor a utilizar deberá ser capaz de asegurar el correcto y seguro comportamiento de los motores de corriente continua por lo que la selección se hará de acuerdo a aquel convertidor que cumpla con las especificaciones técnicas de los motores que equipan al posicionador (ver Capítulo 8).

### 4.7.1 Azimut. Especificaciones técnicas del motor DC.

Cuadro 4.2: Características técnicas del motor DC utilizado para el movimiento en azimut.

| Especificación | Valor              |
|----------------|--------------------|
| Marca          | Bodine Electric    |
| Modelo         | Series 400 HSN-34. |
| Alimentación   | 115 VDC@0,75 A.    |
| Potencia       | 1/15 HP.           |
| Rpm            | 1725.              |

### 4.7.2 Elevación. Especificaciones técnicas del motor DC.

Cuadro 4.3: Características técnicas del motor DC utilizado para el movimiento en elevación.

| Especificación        | Valor                      |
|-----------------------|----------------------------|
| Marca                 | Reliance(www.reliance.com) |
| Modelo                | BC56H.                     |
| Alimentación          | Campo 115 VDC@0,4 A.       |
|                       | Armadura 115 VDC@3.4 A.    |
| Potencia              | 1/3 HP.                    |
| Rpm                   | 1725.                      |
| Factor de forma       | 1.5                        |
| Clase de aislación    | H                          |
| Estándar de Seguridad | NEMA-MG2.                  |

### 4.7.3 Electrónica de potencia.

A partir de las especificaciones de los motores DC que deben controlarse es evidente que no puede hacerse con niveles lógicos, sino que es necesario contar con una etapa de potencia como se mostró en la figura 4.5.

El problema de la etapa de potencia puede dividirse en dos:

1. El diseño de la fuente  $V_s$  que provea la potencia necesaria para el funcionamiento de los controladores de potencia (*power drives*).
2. La selección de los convertidores de potencia capaces de ser controlados por el controlador digital mediante una interfaz compatible y que además sean capaces de proveer a los motores con la potencia necesaria provista por  $V_s$  para el modo de funcionamiento deseado.

Si bien el diseño de la etapa de potencia se dejará para los siguientes capítulos, las especificaciones generales que deberán cumplirse son:

- Tensión de alimentación: 115VDC.
- Potencia provista: debe ser capaz de alimentar ambos motores funcionando al mismo tiempo a plena carga.
- Alimentación independiente para los bobinados de campo y de armadura.

El diseño de la etapa de potencia se retomará en el Capítulo 8.

## 4.8 Análisis de la Parte Mecánica del Posicionador de Antena. Sistema de Poleas. Caja Reductora.

Si bien el principal componente del sistema a controlar son los motores DC, la planta está formada también por el sistema reductor que inevitablemente va a interactuar con el motor.

Dado que el principal objetivo es obtener un modelo del sistema completo en esta sección se analizará el comportamiento del sistema reductor por separado para establecer como interacciona con el motor de corriente continua y como afecta a la dinámica general del sistema.

En un primer paso se considerará lo siguiente:

- El análisis estará enfocado al movimiento en azimut por tener prioridad en el proyecto.
- El conjunto *correa dentada-caja reductora* será modelado como un **sistema reductor único equivalente** compuesto puramente por engranajes acoplados directamente al eje del motor de corriente continua (cadena cinemática) como se muestra en la figura 4.14 caracterizado por una reducción  $R_{AZ}$  siendo la anterior una suposición válida ya que una correa dentada unida a dos poleas tiene el mismo propósito que un tren de engranajes pero permite transferir la energía sobre una distancia mayor sin utilizar un número excesivo de piezas mecánicas.
- Se tendrá en cuenta que solamente se pueden medir en forma directa la velocidad de giro del motor DC y la posición del plato giratorio en azimut.

En la figura 4.14 se muestra el modelo equivalente del sistema reductor donde

- $T_m$  es el par ejercido por el motor.
- $T_L$  es el par ejercido por la carga visto desde el eje del motor.
- $T$  es el par ejercido sobre la carga (montada sobre el plato de azimut).
- $\omega_m$  es la velocidad de giro del eje del motor.
- $\theta_m$  es la posición instantánea del eje del motor.
- $\theta_p$  es la posición instantánea de la carga.
- $N_i$  números de dientes en cada engranaje que da lugar a la reducción  $R_{AZ}$ .

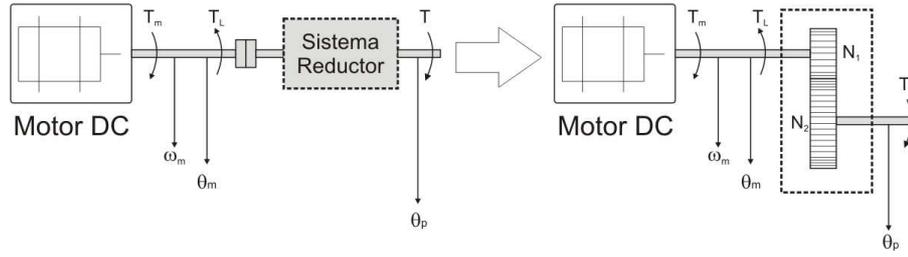


Figura 4.14: Modelo equivalente del sistema reductor correa dentada-caja reductora.

Luego, en primer lugar se analizará el funcionamiento de dos engranajes acoplados y las relaciones que se pueden establecer a partir de los mismos.

El objetivo principal de la caja reductora es transmitir la energía mecánica en el eje del motor mediante el acoplamiento mecánico para tener un mayor rendimiento. A partir del estudio del sistema de la figura 4.14 se puede obtener la relación entre el par, el desplazamiento y la velocidad angular en los ejes del sistema de engranajes de donde se obtienen los siguientes hechos:

1. El número de dientes  $N$  de cada engranaje es proporcional al radio  $r$  de los engranajes, por lo tanto:

$$r_1 N_1 = r_2 N_2. \quad (4.23)$$

2. La distancia sobre la superficie que viaja cada engranaje es la misma, entonces:

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2. \quad (4.24)$$

3. Por el principio de conservación de la energía, el trabajo realizado por cada engranaje es el mismo, por lo tanto:

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2. \quad (4.25)$$

Considerando la velocidad angular de cada engranaje y las ecuaciones anteriores se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.26)$$

donde, en el caso particular del posicionador, se tiene más de una etapa reductora cuyas especificaciones no son provistas por el fabricante por lo que, hasta ahora, constituyen una incógnita.

Observando con detalle la figura 4.14, si  $N_1$  es el número de dientes del engranaje asociado al eje del motor entonces es evidente que se cumple que  $N_1 < N_2$ . Por lo tanto si se denomina  $R_{AZ}$  a la reducción de la caja reductora utilizada para el movimiento en azimut es de esperar que  $R_{AZ} > 1$  lo que verifica que:

$$\boxed{\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{R_{AZ}}} \quad (4.27)$$

cumpliéndose las siguientes relaciones:

1.

$$\frac{\theta_{AZ}}{\theta_m} = \frac{1}{R_{AZ}} \Rightarrow \theta_{AZ} = \frac{\theta_m}{R_{AZ}} \text{ con } R_{AZ} > 1 \quad (4.28)$$

donde

- $\theta_{AZ}$  es la posición angular en azimut.
- $\theta_m$  es la velocidad del giro del eje del motor.

Por lo tanto, el ángulo recorrido por el eje del motor es mucho mayor que el ángulo recorrido por el plato asociado al movimiento de azimut.

2.

$$\frac{\omega_{AZ}}{\omega_m} = \frac{1}{R_{AZ}} \Rightarrow \omega_{AZ} = \frac{\omega_m}{R_{AZ}} \text{ con } R_{AZ} > 1 \quad (4.29)$$

donde

- $\omega_{AZ}$  es velocidad angular de giro en azimut.
- $\omega_m$  es la velocidad del giro del eje del motor.

Por lo tanto, la velocidad de giro del eje del motor es mucho mayor que la velocidad de giro del plato asociado al movimiento de azimut.

3.

$$\frac{T_m}{T_{AZ}} = \frac{1}{R_{AZ}} \Rightarrow T_{AZ} = R_{AZ}T_m \text{ con } R_{AZ} > 1 \quad (4.30)$$

donde

- $T_{AZ}$  es la cupla que se tiene en el extremo del sistema reductor.
- $T_m$  es la cupla en el eje del motor.

De ésta forma se concluye que:

- *Al utilizar una reducción mayor que uno, el sistema mecánico permite obtener una mayor cupla a expensas de una menor velocidad de giro en cada sentido de movimiento.*

*Observando la hoja de datos del motor asociado al movimiento en azimut, la velocidad de giro nominal es de 1725 rpm, cuando el posicionador especifica 1.2 rpm como velocidad de giro nominal. Esto puede traducirse en un valor estimado de  $R_{AZ}$  de 1438 veces aunque este valor no es exacto ya que no se dispone de información sobre las características técnicas del sistema reductor utilizado por parte del fabricante.*

Si bien en el párrafo anterior se obtienen algunos resultados interesantes que permiten conocer un poco más sobre el funcionamiento del posicionador, no debe perderse de vista que el objetivo es hallar un modelo matemático del mismo.

Continuando con el análisis del sistema reductor, es de esperar que cuando un motor acciona determinada carga a través de un sistema de engranajes, poleas, correas, etc., la formulación de las ecuaciones que expresan el comportamiento de la planta (sistema

completo) estén referidas a un único eje. En este caso **se referirán todas las variables al eje del motor** por ser un punto de medida.

Un resultado interesante para la estimación del modelo se obtiene del análisis de una cadena cinemática, es decir, varios engranajes acoplados con distintas reducciones. Este análisis permitirá entender mejor el modelo lineal de una caja reductora.

Considerando el caso particular de un sistema accionado por un motor se puede suponer el esquema de la figura 4.15.

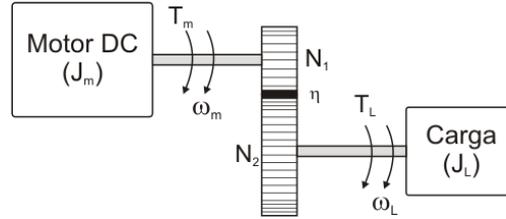


Figura 4.15: Modelo de una carga vinculada a un motor a través de un sistema reductor.

Para este caso se tiene que:

$$T_m \omega_m \eta = T_L \omega_L \quad (4.31)$$

donde, al igual que en el caso de la figura 4.15 se tiene que:

- $T_m$  es el par desarrollado por el motor.
- $\omega_m$  es la velocidad del giro del eje del motor.
- $T_L$  es el par obtenido en la carga.
- $\omega_L$  es la velocidad de giro de la carga.
- $\eta$  es el rendimiento de la transmisión.

Por lo tanto, si  $R = \omega_m / \omega_L$  es la relación de transmisión, el par motor de la carga referido al eje del motor es el par en la carga dividido por la relación de transmisión y el rendimiento de la misma:

$$T_m = \frac{T_L}{R \cdot \eta} \quad (4.32)$$

de forma que:

- *A mayor reducción y mayor rendimiento, la cupla reflejada en el eje del motor es menor.*

Otro fenómeno de interés para determinar el modelo del sistema completo es analizar el momento de inercia visto por el motor, es decir, referido a su eje.

Cuando se tiene una cadena cinemática compuesta por  $n$  acoplamientos o transmisiones se tiene que:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n \quad (4.33)$$

y la reducción total está dada por:

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \dots \cdot R_n \quad (4.34)$$

Para ver que sucede con el momento de inercia se parte del principio de conservación de la energía. La energía cinética que se tiene cuando el eje gira a velocidad  $\omega_m$  está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 \quad (4.35)$$

donde  $J_m$  es el momento de inercia del motor.

Si se considera un sistema de transmisión compuesto por una etapa reductora como en la figura 4.15, la energía generada en cada extremo es la misma y por lo tanto se cumple:

$$E_c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_L \omega_L^2. \quad (4.36)$$

Si en cambio se supone un sistema con momento de inercia equivalente  $J_{eq}$  que representa la masa de la cadena de engranajes referida al eje del motor y que por lo tanto girará a una velocidad  $\omega_m$ , la energía cinética en el eje del motor será igual a la suma de las energías en cada una de las  $n$  etapas reductoras de forma que la energía cinética total almacenada en el sistema tendrá la siguiente expresión:

$$E_{Cinética\ Total} = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \dots + \frac{1}{2} J_n \omega_n^2 \quad (4.37)$$

Y despejando  $J_{eq}$  de 4.37 se tiene que:

$$\Rightarrow \boxed{J_{eq} = J_m + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_1^2 \cdot R_2^2} + \dots + \frac{J_n}{R_1^2 \cdot R_2^2 \dots R_n^2}} \quad (4.38)$$

Ecuación de la que se obtiene un resultado interesante ya que se verifica que:

- *Si la mayor reducción se tiene en las primeras etapas (fundamentalmente en la primera), el momento de inercia visto por el motor será lo más próximo a su propio momento de inercia. Esto es de especial interés ya que la reducción que se utiliza en el posicionador de antena supera las mil veces en apenas dos etapas (correa dentada y caja reductora).*

## 4.9 Modelo Matemático de un Sistema Reductor.

El modelo matemático de un sistema reductor como el propuesto se encuentra descrito por las ecuaciones de Newton para el movimiento rotacional alrededor de un eje fijo como se describió en la sección 4.5.

En los sistemas reales, los engranajes tienen inercia y fricción entre los dientes acoplados que puede o no ser despreciada. En la mayoría de los casos se considera un tren de engranajes con inercia, fricción viscosa y fricción de Coulomb. Un modelo que supone parámetros concentrados de esta suposición de muestra en la figura 4.16.

Donde, al igual que en los casos anteriores:

- $T_m$  es el par aplicado (en este caso sería el par desarrollado por el motor DC).
- $T_1$  y  $T_2$  son los pares transmitidos.
- $B_1$  y  $B_2$  son los coeficientes de fricción viscosa.

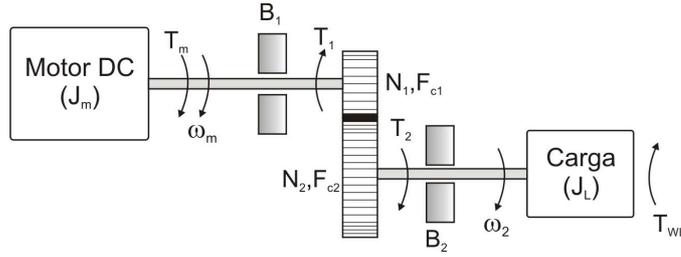


Figura 4.16: Modelo de un sistema de engranajes considerando los efectos que causan pérdidas.

- $F_{c1}$  y  $F_{c2}$  es la magnitud de la fricción de Coulomb.

De esta forma, la ecuación para el par aplicado del lado 1 será:

$$T_m(t) = J_1 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + F_{c1} \operatorname{sgn}(\omega_1(t)) + T_1(t) \quad (4.39)$$

y, para el lado 2:

$$T_2(t) = J_2 \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + B_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt} + F_{c2} \operatorname{sgn}(\omega_2(t)) \quad (4.40)$$

Luego, a partir de los resultados de la sección anterior, es posible reflejar la ecuación (4.40) al lado primario, por lo tanto, a partir de las relaciones halladas en la ecuación (4.26) se puede escribir:

$$T_1(t) = \frac{1}{R} T_2(t) = \frac{1}{R^2} J_2 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{R^2} B_2 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + \frac{1}{R} F_{c2} \operatorname{sgn}(\omega_2(t)). \quad (4.41)$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.41) en (4.39) se tiene:

$$T_m(t) = \left( J_1 + \frac{J_2}{R^2} \right) \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + \left( B_1 + \frac{B_2}{R^2} \right) \frac{d\theta_1(t)}{dt} + F_{c1} \operatorname{sgn}(\omega_1(t)) + \frac{1}{R} F_{c2} \operatorname{sgn}(\omega_2(t)) \quad (4.42)$$

y se observa que tanto como el momento de inercia, el coeficiente fricción viscosa y la fuerza de Coulomb pueden reemplazarse por un parámetro equivalente siendo válida la siguiente ecuación para la cupla aplicada al sistema:

$$T_m(t) = J_{eq} \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_{eq} \frac{d\theta_1(t)}{dt} + F_{eq} \quad (4.43)$$

donde:

- $J_{eq} = J_1 + \frac{J_2}{R^2}$ .
- $B_{eq} = B_1 + \frac{B_2}{R^2}$ .
- y  $F_{eq} = F_{c1} \operatorname{sgn}(\omega_1(t)) + \frac{1}{R} F_{c2} \operatorname{sgn}(\omega_2(t))$ .

En caso de poder despreciarse la fuerza de roce de Coulomb, se tiene una buena aproximación a un modelo lineal que se puede representar con un modelo del sistema de engranajes que contemple la inercia y la fricción viscosa de las partes mecánicas. Por lo tanto, si se considera el sistema de engranajes de la figura 4.16 se puede escribir que:

$$T_m(t) = J_{eq} \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_{eq} \frac{d\theta_1(t)}{dt} \quad (4.44)$$

Esta suposición será considerada en el Capítulo 5 a la hora de determinar aquellos parámetros del modelo lineal que se pretende obtener.

## 4.10 Utilización de los Modelos del Motor de Corriente Continua y del Sistema Reductor.

El análisis del motor de corriente continua y del sistema reductor referido a uno de los lados surgen de la necesidad de contar con un modelo matemático para el diseño del lazo de control.

Si bien el modelo del motor de corriente continua es bien conocido y puede encontrarse en cualquier libro referido al control automático, el sistema que se está considerando cuenta con el agregado de un sistema reductor como se mostró en la figuras 4.2(a) y 4.3.

A esto se le suma el hecho de que no todos los puntos del sistema son accesibles, por ejemplo, no es posible medir de forma directa la velocidad instantánea al final de la cadena reductora que indicaría la velocidad en el sentido de azimut o elevación sino que solamente se puede medir la velocidad de giro del eje del motor por lo que referir toda la dinámica del sistema reductor suponiendo un momento de inercia equivalente  $J_{eq}$  y coeficiente de fricción viscosa  $B_{eq}$  **referidos al eje del motor** será de utilidad a la hora de utilizar un modelo cuya variable de control sea la velocidad angular  $\omega_m$ .

Además, deberán tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- *El modelo a utilizar, ya sea una transferencia en el dominio de Laplace o un modelo de estados, estará caracterizado por parámetros cuyo valor es desconocido ya que no se tienen como dato del fabricante. Por ejemplo, el valor de la resistencia o la inductancia de armadura en el modelo del motor DC o la reducción, el momento de inercia equivalente o el coeficiente de fricción viscosa equivalente en el modelo de la caja reductora se desconocen.*
- *El modelo a utilizar deberá representar el sistema completo, de forma que, así se conocieran los modelos de cada una de las partes involucradas, el modelo obtenido debería reflejar también la interacción entre ellas, información con la que tampoco se cuenta.*
- *Las variables que tendrá en cuenta el modelo, particularmente el modelo de estados, deberán ser aquellas a las cuales se tiene acceso, por ejemplo,  $\omega_m$  y  $\theta_p$  de forma que deberá referirse la dinámica a un lado u otro del sistema reductor.*

Estas consideraciones se tomarán como punto de partida en el desarrollo del Capítulo 5.

## 4.11 Resumen.

Hasta aquí se ha presentado la complejidad que presenta la planta a controlar a lo que se le suma la falta de un modelo dinámico que permita el diseño del lazo de control.

En este capítulo se presentaron los conceptos básicos que rigen el funcionamiento de motor de corriente continua así como las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del mismo cuando funciona controlado por la tensión de armadura con excitación de campo independiente.

También, en forma separada, se buscó un modelo dinámico del sistema reductor con el objetivo de referir toda la dinámica de la parte mecánica al eje del motor ya que como se expuso en la sección 4.10 es un punto accesible de medida que permitiría cerrar un lazo de control.

Quedan por delante las siguientes tareas:

- La obtención de un modelo de parámetros concentrados que represente la dinámica del posicionador (para el sentido de movimiento en azimut).
- Selección de un algoritmo de control.
- Asignación de valores a los parámetros que representen al sistema real y validen el modelo propuesto.

Estas tareas se desarrollaran en los capítulos 5, 6 y 7.

# Capítulo 5

## Modelo Matemático del Posicionador de Antena. Función de Transferencia. Modelo de Estados.

### 5.1 Introducción.

En el Capítulo 4 se analizaron por separado los modelos del motor de corriente continua y del mecanismo de reducción obteniéndose modelos dinámicos que representan el funcionamiento de cada bloque por separado.

El objetivo de este capítulo será unir dichos resultados para obtener el modelo del sistema completo o lo que es lo mismo, un modelo matemático del posicionador para uno de los sentidos de movimiento (azimut).

En primer lugar se buscará obtener la función transferencia y el modelo de estados del posicionador. Si bien para el diseño del lazo de control se utilizará solo uno de ellos (dependiendo de la estrategia de control a implementar), el conocimiento de ambos permitirá entender aún más el funcionamiento del posicionador, caracterizarlo y lo más importante: determinar el valor de los parámetros desconocidos en base a experimentos.

#### 5.1.1 Función Transferencia y Modelo de Estados.

Es bien sabido que el modelado matemático es una de las tareas más importantes a la hora del diseño de un sistema de control dado que las conclusiones a partir de las herramientas de análisis y diseño estarán basadas en dicho modelo. La ventaja que ofrecen los modelos matemáticos es que mediante ecuaciones y fórmulas se puede predecir como los procesos en cuestión responderán ante diferentes excitaciones, por ejemplo: en el capítulo 4 se obtuvieron las ecuaciones que describen como un motor DC responde a cambios en la tensión de armadura aplicada al mismo.

En el caso de los sistemas lineales existen dos métodos de modelado y análisis tradicionales: la *función transferencia* y el *modelo de estados*.

## 5.2 Función Transferencia de un Sistema Lineal.

La función transferencia es una de las aplicaciones más importantes de la transformada de Laplace y se utiliza en el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo y se define como *la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema con todas las condiciones iniciales igualadas a cero* [10].

De esta forma, la transformada de Laplace de la entrada  $u(t)$  y de la salida  $y(t)$  del sistema están relacionadas de la siguiente forma:

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \quad (5.1)$$

Siendo  $H(s)$  la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema y cuyo diagrama en bloques se muestra a continuación:

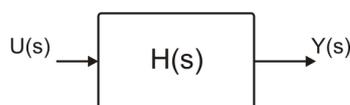


Figura 5.1: Representación en diagrama de bloques de un sistema modelado por su función transferencia.

Si bien la definición anterior se obtuvo en base a la respuesta al impulso del sistema (ya que conocida ésta se conoce la respuesta del sistema a cualquier entrada  $u(t)$ ), no debe olvidarse que el comportamiento dinámico de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo está descrito por una ecuación diferencial cuyo grado depende del sistema en cuestión y partir de la cual se puede obtener la expresión de  $H(s)$ .

En su forma más general, la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante en el tiempo puede escribirse como una ecuación diferencial de orden  $n$  (donde  $n$  depende del sistema) con coeficientes reales constantes. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  son constantes y reales. Luego, determinada la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$  y las condiciones iniciales de  $y(t)$  y sus sucesivas  $n$  derivadas en  $t = t_0$  puede resolverse la ecuación (5.2) y obtener la respuesta del sistema  $y(t)$  para  $t \geq t_0$ .

Sin embargo, el procedimiento anterior resulta bastante complicado para el análisis y diseño de un sistema cualquiera y es ahí donde entran en juego las funciones de transferencia.

Como se dijo anteriormente, la función transferencia relaciona la transformada de Laplace de la salida  $Y(s)$  con la transformada de Laplace de la entrada  $U(s)$ . Ésta se puede obtener de la ecuación (5.2) aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros y suponiendo **condiciones iniciales nulas** de donde se obtiene (por propiedad de derivación de la transformada de Laplace) la siguiente ecuación:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) \quad (5.3)$$

de donde

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5.4)$$

Por lo tanto, conocidos los valores de los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  y el orden  $n$  de la ecuación diferencial que caracteriza al sistema, puede determinarse la función transferencia que permitirá analizar al mismo aplicando las herramientas asociadas principalmente al control clásico.

Las propiedades de la función transferencia se resumen a continuación:

- Se encuentra definida solamente para sistemas lineales, invariantes en el tiempo.
- Puede definirse como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema o como la transformada de Laplace del cociente entre la transformada de Laplace de la salida y de la entrada del sistema.
- Supone que las condiciones iniciales del sistema son nulas.
- Es independiente de la entrada del sistema.
- Para sistemas continuos se expresa en función de la variable compleja  $s$ . Para sistemas discretos se escribe en función en  $z$  y es la transformada de una ecuación en diferencias.
- En los sistemas físicos reales,  $n > m$  o lo que es lo mismo, el número de polos es mayor que el número de ceros.

Como se vio en el capítulo 4, tanto el motor DC como el sistema reductor están caracterizados por ecuaciones diferenciales de orden dos. Por lo tanto, será posible establecer una función de transferencia para cada bloque por separado y para el conjunto completo. Esto se verá más adelante.

### 5.3 Modelo de Estados de un Sistema.

El modelo de estados parte de la premisa que establece que la evolución futura de un sistema está enteramente determinada por su estado actual, por lo tanto el “estado” de un sistema puede definirse *como el conjunto de cantidades físicas cuya especificación (en ausencia de excitaciones externas) determinan completamente la evolución del mismo* [13].

Dichas variables físicas que definen el estado de un sistema en un determinado instante de tiempo no son únicas (distintos juegos de variables de estado pueden aplicarse a un mismo sistema), aunque sí lo es su número ya que se corresponde con el orden de dicho sistema.

El modelo de estados se obtiene a partir del hecho que una ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden como (5.2) puede descomponerse en  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden donde solo aparece la variable física y su derivada. Dichas variables que aparecen en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden resultante es lo que se denomina como variables de estado y se definen como *el conjunto mínimo de variables cuyo*

conocimiento en cualquier instante  $t_0$ , y el conocimiento de la excitación aplicada al sistema posteriormente, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier instante de tiempo  $t > t_0$  [8].

Dicho de otra forma, conociendo el valor actual de las variables de estados y la forma de la señal de entrada aplicada al sistema, es posible determinar la evolución futura del mismo. Las ecuaciones (4.19) y (4.20) son un ejemplo de ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el comportamiento dinámico del motor DC.

De forma más general, el comportamiento de un sistema de orden  $n$  descrito por  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden tendrá  $n$  variables de estado que pueden denominarse  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Si además se considera que tiene  $l$  entradas  $u_1, u_2, \dots, u_l$  entonces matemáticamente puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2 \dots x_n, u_1, u_2 \dots u_l, t) \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2 \dots x_n, u_1, u_2 \dots u_l, t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2 \dots x_n, u_1, u_2 \dots u_l, t) \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde queda expresado que la derivada de cada variable de estado puede depender de si misma y de las otras variables de estado, de las entradas al sistema y (eventualmente) del tiempo<sup>1</sup>.

Una diferencia importante a tener en cuenta con respecto a la función transferencia es que **las ecuaciones de estado se resuelven en el dominio del tiempo** mientras que en el otro caso se resuelve en el dominio de Laplace.

La forma más común de escribir la ecuación (5.5) es agrupar las variables de estado en vectores donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

y se denomina **vector de estados** y

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

se denomina **vector de entradas**.

Así, la ecuación (5.5) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \tag{5.8}$$

---

<sup>1</sup>Debe tenerse en cuenta que tanto las variables de estados, sus derivadas y las entradas dependen del tiempo por lo que deberían escribirse  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  y  $u(t)$ .

que será la notación utilizada a lo largo de este informe y de la cual no debe perderse de vista que se trata de magnitudes vectoriales.

Otro aspecto a tener en cuenta es que en (5.8) la función  $f$  depende del tiempo  $t$  lo cual se da en sistemas variantes en el tiempo y además puede ser una función no lineal de las variables  $x$ ,  $u$  o  $t$ , por lo tanto el modelo puede aplicarse también a sistemas no lineales que varían o no en el tiempo.

Si bien todos los sistemas físicos son no lineales, es posible obtener buenas aproximaciones mediante sistemas lineales para determinados rangos de operación.

Como puede verse en el Capítulo 4, las no linealidades fueron dejadas de lado por lo tanto, como punto de partida en la búsqueda de un modelo del posicionador, se tomará la siguiente condición:

- *El modelo a utilizar para describir el comportamiento del posicionador será un modelo lineal.*

En el caso de tener un modelo lineal invariante en el tiempo, las ecuaciones de estado de (5.5) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \dots + b_{1l}u_l \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \dots + b_{2l}u_l \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 \dots + b_{nl}u_l \end{aligned} \quad (5.9)$$

que matricialmente puede escribirse así:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u \quad (5.10)$$

siendo  $A$  una matriz de  $n \times n$  y  $B$  una matriz de  $n \times l$  que en el caso de sistemas con una única entrada es un vector de  $n \times 1$ . Ésta última ecuación puede considerarse como el equivalente lineal invariante en el tiempo de la ecuación (5.8) si los coeficientes de las matrices  $A$  y  $B$  son constantes.

Finalmente, el modelo queda definido por como los estados influyen en la salida del sistema que a fin de cuentas será lo que también le interesará al diseñador del lazo de control de forma que, para un sistema de  $m$  salidas, la influencia de los estados se escribe de la siguiente forma:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = C \cdot x + D \cdot u \quad (5.11)$$

donde  $C$  es una matriz de  $m \times n$  y  $D$  es una matriz de  $m \times l$ .

De esta forma se llega a la expresión general del modelo de estados para sistemas lineales invariantes en el tiempo<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u \end{aligned} \quad (5.12)$$

y cuya representación general en diagrama en bloques se muestra en la figura 5.2 donde puede observarse que la matriz  $D$  representa una conexión directa entre la entrada  $u_i$  y la salida  $y_j$  cosa que no es común en la mayoría de los sistemas.

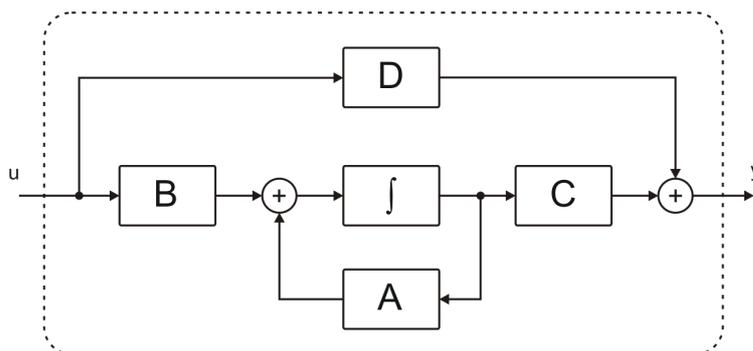


Figura 5.2: Representación en diagrama de bloques del modelo de estados de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Para el caso del posicionador de antena puede realizarse la siguiente simplificación:

- Dado que no existe forma de cambiar cualquiera de las salidas consideradas de forma directa cambiando solamente la tensión de armadura  $v_a$  se tiene entonces que  $D = [0]$  y el modelo de estados a utilizar tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{aligned} \quad (5.13)$$

El modelo de estados ofrece ventajas respecto a la función transferencia algunas de las cuales se listan a continuación:

- En primer lugar pueden suponerse condiciones iniciales no nulas lo cual es bastante ventajoso a la hora de la simulación.
- Con respecto al diseño de lazos realimentados, los polos del sistema a lazo cerrado pueden ubicarse en cualquier lugar del plano complejo con solamente modificar las ganancias del lazo de realimentación, es decir, sin tener que agregar polos y ceros en el lazo (como sucede, por ejemplo, cuando se implementa un controlador PI).
- Permite implementar técnicas de análisis como el plano de fase que será utilizado en el Capítulo 6.

<sup>2</sup>Si bien por simplicidad se adopta la representación (5.12) no debe olvidarse que las variables dependen del tiempo, por lo tanto la expresión correcta es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}$$

- Es aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales.
- Es posible anticipar algunos efectos en las etapas intermedias antes que dichos efectos aparezcan a la salida. Por ejemplo, en el caso del posicionador es posible detectar un incremento no deseado en la corriente de armadura sin tener que esperar a que se transfiera a la salida como un incremento brusco en la posición.

Si bien lo anterior parece bastante favorable, debe tenerse en cuenta que cuando se utiliza el modelo de estados deben realimentarse todas las variables de estado lo cual agrega complejidad a la hora de la implementación práctica. Si además no es posible medir en forma directa una variable de estado, será necesario agregar al diseño un *observador de estados* (para más información ver [8])

Aunque la diferencia entre ambos modelos es bastante clara ya que la función transferencia analiza el sistema en el dominio de la frecuencia y el modelo de estados en el dominio del tiempo, ambos se complementan entre sí y es ésta propiedad la que será explotada en este proyecto permitiendo, entre otras cosas, entender como funciona el sistema mediante la función transferencia y el diseño del lazo de control utilizando el modelo de estados.

Además, no debe olvidarse que **se trata del mismo sistema**, por lo tanto, debe llegarse a los mismos resultados cuando se analiza un modelo u otro.

Un resultado interesante consiste en que a partir del modelo de estados puede obtenerse la función transferencia del sistema. Esto se logra aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de (5.13) de donde operando se llega a que:

$$Y(s) = C \cdot (S \cdot [I] - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \quad (5.14)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = C \cdot \frac{[Adj(S \cdot [I] - A)]^T}{|S \cdot [I] - A|} \cdot B \quad (5.15)$$

donde el denominador de la función transferencia (que determina la ubicación de los polos del sistema) es el polinomio característico de la matriz  $A$ .

En las secciones siguientes se obtendrán ambos modelos con el objetivo de obtener de cada uno la información necesaria para el diseño del controlador.

## 5.4 Modelo de Estados Discreto de un Sistema.

Analizar el modelo de estados para sistemas discretos es de interés para este proyecto por dos razones:

1. El controlador a utilizar es del tipo discreto de manera que, en el caso de implementar un control digital, para el diseño deberá utilizarse un modelo discreto del sistema continuo del posicionador que surgirá a partir de operaciones de muestro y retención.
2. Para calcular los parámetros del modelo se utilizarán técnicas de Identificación de Sistemas (ISIS) cuyos modelo se obtienen a partir de la adquisición y procesamiento de las señales de entrada y salida del sistema de manera que es evidente que se tratará de señales discretas y que por lo tanto el modelo obtenido será discreto.

Es por estas dos razones que es de interés saber como se obtiene un modelo discreto a partir de un modelo continuo y viceversa ya que se prevé trabajar con ambos.

### 5.4.1 Matriz de Transición de Estados.

Si se considera el modelo de estados de un sistema cualquiera como se vio en la sección 5.3, suponiendo  $D = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t)\end{aligned}\tag{5.16}$$

Como se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden será posible obtener una solución de dicho sistema que muestre la evolución de vector  $x(t)$  a partir de un estado inicial  $x(t_0)$  en el instante  $t_0$ . Dado que  $x(t) \in R^n$  es un vector de orden  $n$  se estaría calculando la evolución temporal de cada una de  $x_i(t), i = 1, \dots, n$  variables de estado.

La matriz que describe la evolución de las variables de estado se conoce como *matriz de transición de estados*  $\phi(t)$  y es la matriz que satisface la ecuación de estados homogénea (observar que se considera  $u(t) = 0$ ):

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t)\tag{5.17}$$

de manera que  $\phi(t)$  verifica que:

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t)\tag{5.18}$$

y puede calcularse aplicando la transformada de Laplace inversa a la ecuación (5.18) de donde se obtiene que

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]\tag{5.19}$$

o sino proponer una solución como en los métodos clásicos para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas de donde se verifica que la solución

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots\tag{5.20}$$

es también solución de (5.17) y es la serie de potencias de la matriz  $e^{At}$ <sup>3</sup>.

Así, la evolución de los estados  $x(t)$  del sistema a partir de un estado inicial  $x(t_0)$  estará dada por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) = \phi(t - t_0) \cdot x(t_0) \quad \forall t > t_0\tag{5.21}$$

que representa la respuesta libre del sistema.

Si ahora se considera una entrada  $u(t) \neq 0$  se puede demostrar que la evolución de los estados estará dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau \quad \forall t > t_0\tag{5.22}$$

---

<sup>3</sup>Recordar que por ser  $A$  una matriz todas las expresiones están en notación matricial.

donde el término integral representa la respuesta forzada del sistema.

A partir de la ecuación (5.22) es que se obtendrá el modelo discreto de un sistema continuo.

### 5.4.2 Modelo de Estados Discreto de un Sistema Continuo.

Supóngase el diagrama en bloques de la figura 5.3 donde se tiene un sistema continuo cuyo modelo de estados está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

al cual ingresan señales de control discretas (por ejemplo, provenientes de un microprocesador) de manera que será necesario introducir un reconstructor de orden cero y que sus salidas son muestreadas utilizando conversores A/D. El intervalo de muestreo es  $T_s$ .

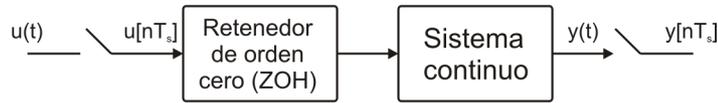


Figura 5.3: Sistema continuo con datos de entrada/salida muestreados.

Suponiendo las siguientes condiciones:

- I. La señal de entrada  $u$  solo puede cambiar en los instantes de muestreo (para esto se incorpora el reconstructor de orden cero).
- II. El período de muestro  $T_s$  es constante.

se verifica que

$$u[nT_s] = cte \text{ para } nT_s < t < (n+1)T_s. \quad (5.24)$$

Entonces, si se considera un intervalo entre dos instantes de muestreo tomando  $t_0 = nT_s$ , la evolución de los estados en dicho intervalo de muestreo será (de la ecuación (5.22)):

$$x(t) = \phi(t - nT_s)x(nT_s) + \int_{nT_s}^t \phi(t) \cdot B \cdot u(nT_s) d\tau \quad \forall nT_s \leq t \leq (n+1)T_s \quad (5.25)$$

donde  $u(nT_s) = cte$ .

Y si  $t = (n+1)T_s$  entonces la ecuación (5.25) será de la forma:

$$x[n+1] = A_D \cdot x[n] + B_D \cdot u[n] \quad (5.26)$$

ya que:

$$x((n+1)T_s) = \phi(T_s)x(nT_s) + \left[ \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} \phi((n+1)T_s - \tau) \cdot B d\tau \right] \cdot u(nT_s). \quad (5.27)$$

Tomando  $\delta = \tau - nT_s$  se puede escribir como:

$$x((n+1)T_s) = \phi(T_s)x(nT_s) + \left[ \int_{0_s}^{T_s} \phi(\delta) \cdot B d\delta \right] \cdot u(nT_s) \quad (5.28)$$

de manera que, si el modelo de estados discreto tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_D \cdot x[n] + B_D \cdot u[n] \\ y[n] &= C_D \cdot x[n] \end{aligned} \quad (5.29)$$

comparando la ecuación (5.29) con (5.28) se tiene que:

$$\boxed{\begin{aligned} A_D &= \phi(T_s) \\ B_D &= \int_{0_s}^{T_s} \phi(\delta) \cdot B \cdot d\delta \\ C_D &= C \end{aligned}} \quad (5.30)$$

obteniéndose el modelo discreto de un sistema continuo muestreado cada  $nT_s$  segundos. Observar que para obtener el modelo discreto es necesario conocer la matriz de transición de estados del sistema continuo.

Como es de esperar a partir del modelo (5.29) es posible obtener una función de transferencia  $z$  de forma análoga al caso continuo. La transferencia de entrada salida para el sistema discreto estará dada por:

$$T(Z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C_D(zI - A_D)^{-1}B_D. \quad (5.31)$$

El modelo de estados discreto será de utilidad para identificar el modelo del posicionador.

## 5.5 Función Transferencia del Posicionador de Antena para el Sentido de Movimiento en Azimut.

El modelo a partir de la función transferencia permitirá individualizar el origen de los polos que caracterizan a la planta. Además, el hecho de obtener un modelo en diagrama de bloques que permita dividir al sistema en diferentes etapas será útil para diseñar distintos experimentos que permitirán, entre otras cosas, estimar la ubicación de los polos, ancho de banda del sistema, frecuencias de muestro para ensayos de identificación, etc. que permitirán estimar los parámetros que caracterizan tanto al modelo de estados como a la función transferencia.

Para en análisis se utilizarán los resultados del Capítulo 4. Si bien está basado en el modelo clásico de un motor DC, lo que se buscará ahora es incorporar el sistema reductor para modelar completamente el movimiento en azimut.

Las ecuaciones que describen el funcionamiento del motor DC obtenidas en el Capítulo 4 se repiten a continuación:

$$e_a = K_b \omega_m \quad (5.32)$$

$$T_{em} = K_i i_a \quad (5.33)$$

$$v_a = e_a + R_a i_a + L_a \dot{i}_a \quad (5.34)$$

$$T_{em} - T_L - B\omega_m = J\dot{\omega}_m \quad (5.35)$$

donde  $T_L$  es la cupla de carga vista por el motor que se supone nula y  $T_{em}$  es la cupla electromagnética generada por el motor.

Luego, del análisis del sistema reductor, y considerando que el mismo se encuentra acoplado al eje del motor como se estudió en la sección 4.9, la ecuación de la cupla generada por el motor con el sistema referido a su propio eje hace que la ecuación (4.18) se transforme en (suponiendo  $T_L = 0$ ):

$$T_{em}(t) = J_{eq} \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_{eq} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (5.36)$$

donde

- $J_{eq}$  es el momento de inercia equivalente de toda la parte mecánica referida al eje del motor.
- $B_{eq}$  es el coeficiente de fricción viscosa equivalente de toda la parte mecánica referida también al eje del motor.

Sustituyendo (4.16) en (4.18) y (4.17) en (5.36) la ecuaciones se reducen a

$$v_a(t) = K_b\omega_m(t) + R_a i_a(t) + L_a \dot{i}_a(t) \quad (5.37)$$

$$K_i i_a(t) - B_{eq}\omega_m(t) = J_{eq}\dot{\omega}_m(t) \quad (5.38)$$

Despejando  $i_a$  de (5.38) y derivando respecto a  $t$  se tiene

$$i_a(t) = \frac{J_{eq}}{K_i} \dot{\omega}_m(t) + \frac{B_{eq}}{K_i} \omega_m(t) \quad (5.39)$$

Por lo tanto

$$\dot{i}_a(t) = \frac{J_{eq}}{K_i} \ddot{\omega}_m(t) + \frac{B_{eq}}{K_i} \dot{\omega}_m(t) \quad (5.40)$$

Luego, sustituyendo (5.39) y (5.40) en (5.38) se tiene la ecuación diferencial que describe la dinámica del movimiento en azimut:

$$\left( \frac{L_a J_{eq}}{K_i} \right) \ddot{\omega}_m(t) + \left( \frac{R_a J_{eq} + B_{eq}}{K_i} \right) \dot{\omega}_m(t) + \left( \frac{R_a B_{eq}}{K_i} + K_b \right) \omega_m(t) = v_a(t) \quad (5.41)$$

donde puede observarse la similitud con la ecuación general (5.2).

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros y suponiendo condiciones iniciales nulas se tiene:

$$s^2 \left( \frac{L_a J_{eq}}{K_i} \right) \Omega_m(s) + s \left( \frac{R_a J_{eq} + L_a B_{eq}}{K_i} \right) \Omega_m(s) + \left( \frac{R_a B_{eq}}{K_i} + K_b \right) \Omega_m(s) = V_a(s) \quad (5.42)$$

ecuación a partir de la cual se puede determinar la transferencia entre la tensión de entrada del motor DC y la velocidad de giro del eje del motor con el sistema reductor acoplado, que se denominará  $H_1(s)$  ya que la salida de interés es la posición del plato de azimut. Por lo tanto, la función de transferencia **parcial** es

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_{eq} s^2 + (R_a J_{eq} + L_a B_{eq}) s + (R_a B_{eq} + K_i K_b)}. \quad (5.43)$$

Ahora, suponiendo que es posible independizar la parte mecánica de la parte eléctrica, las ecuaciones (5.34) y (5.35) toman la siguiente forma:

- Ecuación de la parte eléctrica:

$$u_e = v_a - e_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a \quad (5.44)$$

a la cual aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros se tiene la siguiente función de transferencia:

$$U_e(s) = V_a(s) - E_a(s) = R_a I_a(s) + s L_a I_a(s) \Rightarrow \frac{I_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{R_a + s L_a} \quad (5.45)$$

donde  $\tau_e = L_a/R_a$  es la constante de tiempo de la parte eléctrica que determina cuanto tiempo tarda en establecerse la corriente de armadura. De (5.45) se desprende que la parte eléctrica tiene un único polo ubicado en  $s_e = R_a/L_a$ .

La representación en diagrama en bloques se muestra en la figura 5.4.

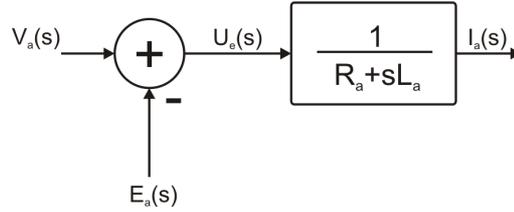


Figura 5.4: Representación en diagrama de bloques de la función transferencia de la parte eléctrica del sistema electromecánico asociado al movimiento en azimut.

Procediendo de igual manera para la parte mecánica:

- Ecuación de la parte mecánica:

$$T = T_{em} - T_L = B_{eq} \omega_m + J_{eq} \dot{\omega}_m \quad (5.46)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$T(s) = T_{em}(s) - T_L(s) = B_{eq} \Omega_m(s) + s J_{eq} \Omega_m(s) \Rightarrow \frac{\Omega_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{B_{eq} + s J_{eq}} \quad (5.47)$$

se obtiene de forma análoga una transferencia en  $s$  que denota la existencia de un polo mecánico ubicado en  $s_m = B_{eq}/J_{eq}$  que determina que la constante de tiempo de la parte mecánica esté dada por  $\tau_m = J_{eq}/B_{eq}$ .

Gráficamente se tiene el diagrama en bloques de la figura 5.5.

Observando el diagrama en bloques de la de la parte eléctrica (fig. 5.4) se observa que una de las entradas es la fuerza contraelectromotriz  $E_a$  que se sabe es proporcional a la

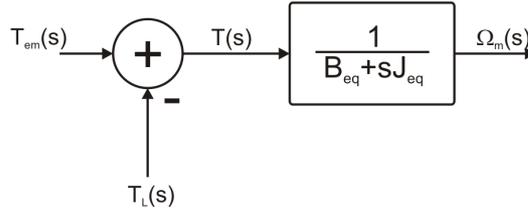


Figura 5.5: Representación en diagrama de bloques de la función transferencia de la parte mecánica del sistema electromecánico asociado al movimiento en azimut.

velocidad de giro  $\Omega_m$  que indefectiblemente proviene de la parte mecánica. Por lo tanto, existe un camino que relaciona la velocidad de giro con la parte eléctrica.

Luego, del diagrama en bloques de la parte mecánica, una de las entradas es la cupla electromotriz  $T_{em}$  generada por la parte eléctrica, por lo que, uniendo ambos diagramas, el diagrama en bloques del conjunto electromecánico tendrá la siguiente estructura:

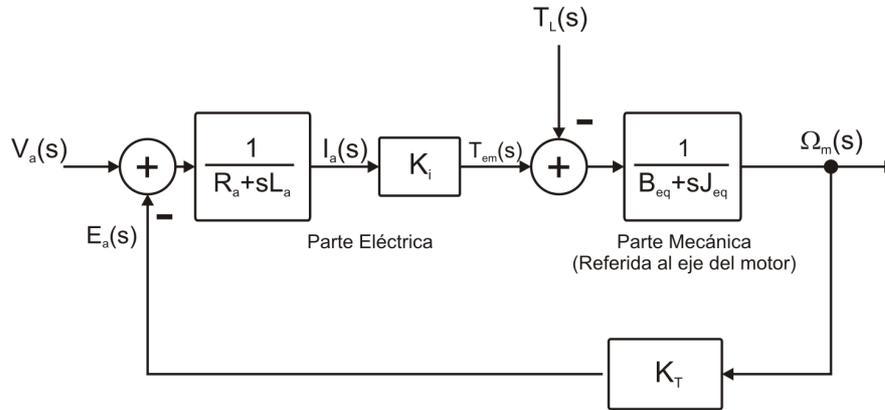


Figura 5.6: Diagrama en bloques del sistema electromecánico asociado al movimiento en azimut.

De la figura 5.6 se concluye que sistema posee una realimentación intrínseca debida exclusivamente a la estructura del motor de corriente continua. Por lo tanto, la función de transferencia  $H_1(s)$  obtenida en (5.43) es en realidad la función transferencia de un sistema a lazo cerrado de la forma

$$H_1(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta(s)} \quad (5.48)$$

por lo que no es casualidad que los polos de  $H(s)$  no coincidan con los polos  $s_e$  y  $s_m$  calculados anteriormente.

Sin embargo, existe la posibilidad de llevar a una forma más representativa donde uno de los polos está asociado al polo de la parte eléctrica y el otro al polo la parte mecánica. De esta forma se propone llevar la transferencia  $H_1(s)$  hallada en (5.43) a la siguiente forma:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K'}{(sK_E + 1) \cdot (sK_M + 1)} \quad (5.49)$$

donde

- $K_E$  se encuentra asociada al polo eléctrico ( $s_1 = 1/K_E$ ).
- $K_M$  se encuentra asociada al polo mecánico ( $s_2 = 1/K_M$ ).

El procedimiento consiste en partir de la ecuación (5.43) y llegar a la ecuación (5.49) y se resume en el Apéndice A.

Como resultado final se tiene que

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right) \cdot (s\tau_E + 1) \cdot \left(s \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} + 1\right)} \quad (5.50)$$

de forma que, suponiendo que polo eléctrico es mucho más rápido que el polo mecánico (Ver Apéndice A) se obtienen las siguientes igualdades:

- $K' = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right)}$
- $K_E = \tau_E$
- $K_M = \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}}$

Por lo que puede concluirse que:

- $K_E$  es la constante de tiempo asociada al polo eléctrico que coincide con la constante de tiempo de la parte eléctrica, por lo tanto, uno de los polos del sistema está ubicado en

$$\boxed{s_1 \equiv s'_e = -\frac{1}{K_e} = -\frac{R_a}{L_a}} \quad (5.51)$$

*El resultado anterior es de gran interés para los capítulos siguientes.*

- $K_M$  es la constante de tiempo asociada al polo mecánico aunque en este caso no coincide exactamente con el polo mecánico de la parte mecánica a lazo abierto y que toma el siguiente valor:

$$\boxed{s_2 = -\frac{1}{K_m} = -\frac{1}{\tau_m} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right)} \quad (5.52)$$

*Donde en 5.52 se observa que  $|s_2| > |s_m|$ .*

Por lo tanto la distribución de polos y ceros de esta primera aproximación al modelo del posicionador de antena para su movimiento en azimut se observa en la figura 5.7.

Es importante destacar la importancia del resultado anterior:

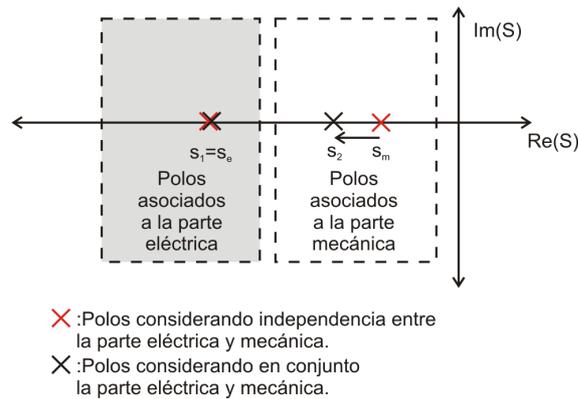


Figura 5.7: Ubicación de los polos asociados a la parte eléctrica y a la parte mecánica del posicionador para el movimiento en azimut.

- *El polo más rápido del sistema está dado por el polo eléctrico ubicado en*

$$s_1 = -\frac{R_a}{L_a}$$

Hasta aquí se modeló el sistema considerando la salida del mismo como la velocidad en el eje del motor. Si bien el desarrollo es válido no representa al sistema real que se está analizando ya que la salida de interés es la posición de la carga en azimut representada por  $\theta_p$ , por lo tanto, el modelo completo estará dado por el agregado de una etapa integral que además tenga en cuenta la reducción de de la parte mecánica que, dado que toda la dinámica ya fue referida al eje del motor puede representarse como una ganancia lineal de valor  $1/R_{AZ}$ .

El diagrama en bloques resultante se muestra en la figura 5.8.

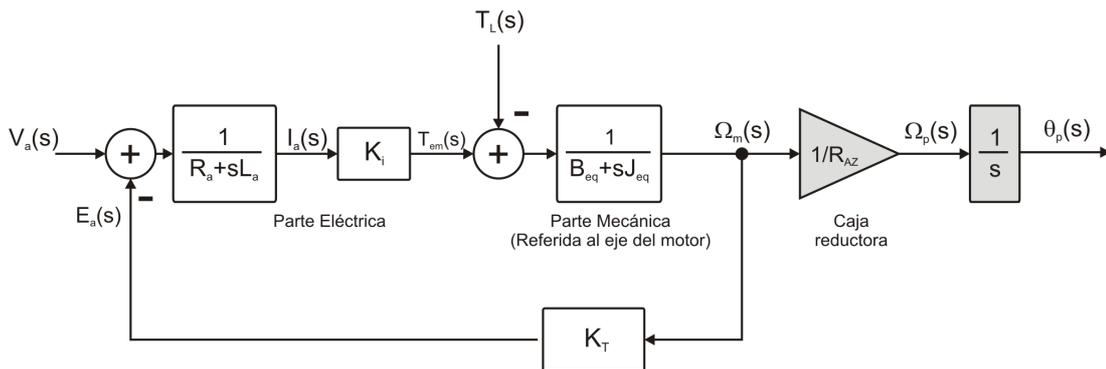


Figura 5.8: Representación en diagrama de bloques de la función de transferencia del posicionador de antena.

Y la función de transferencia tendrá la siguiente expresión correspondiente a un sistema de orden 3.

$$H(s) = \frac{\theta_p(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{R_{AZ}} \cdot \frac{K'}{s \cdot (sK_E + 1) \cdot (sK_M + 1)} \quad (5.53)$$

El análisis anterior permitirá, entre otras cosas, determinar el valor de cada parámetro a partir de resultados experimentales.

Analizando el diagrama en bloques de la figura 5.8 y comparando con los puntos accesibles de medida que ofrece el posicionador donde

- $\omega_n$  y  $\theta_p$  son puntos accesibles de medida como se mostró en el Capítulo 4.
- La corriente de armadura  $i_a$  podría medirse utilizando un sensor adecuado.

se tiene entonces el diagrama de la figura 5.9 a partir del cual se pueden establecer algunos puntos de partida para el análisis bastante interesantes.

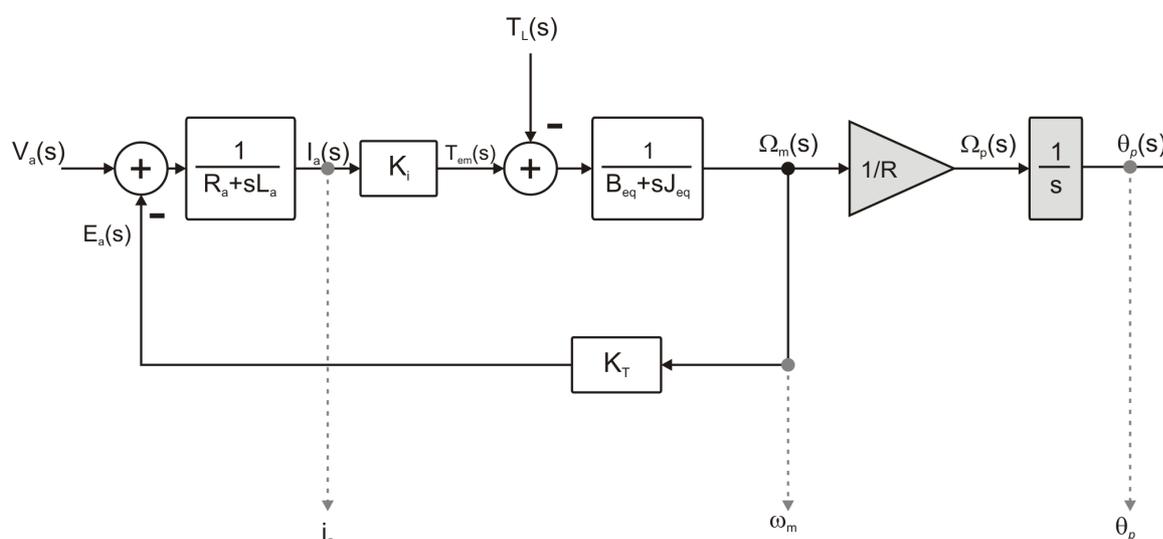


Figura 5.9: Representación en diagrama de bloques de la función transferencial del posicionador de antena indicando los puntos accesibles de medida.

Por ejemplo, dado que el valor de uno de los parámetros del modelo está dado por la relación  $\tau_e = L_a/R_a$ , observando el diagrama 5.9 puede verse que para  $\omega_m = 0$  se tiene una transferencia de primer orden entre la tensión de armadura aplicada y la corriente de armadura que circula por el motor. Dicha constante de tiempo puede obtenerse mediante el análisis de la respuesta al escalón del sistema. Estudiar la evolución de dicha respuesta permitirá:

- Determinar en forma aproximada el valor del parámetro  $R_a/L_a$ .
- Determinar la ubicación del polo más rápido del sistema (polo eléctrico) lo cual permitirá estimar el ancho de banda del mismo permitiendo establecer un valor de frecuencia de muestreo del lazo de control que cumpla con el teorema del muestreo.
- Obtener un modelo discreto del sistema (que será utilizado durante el proceso de identificación. Ver Capítulo 7).

En la siguiente sección se obtendrá el modelo de estados para el mismo sistema.

## 5.6 Modelo de Estados del posicionador de antena para el sentido de movimiento en azimut.

El planteo del modelo de estados permitirá:

- *El diseño del lazo de control mediante realimentación de estados.*
- *La identificación del sistema mediante la utilización de técnicas de identificación paramétricas.*

A partir de la breve introducción de la sección 5.3 se sabe que es posible determinar el modelo de estados a partir de las ecuaciones de estado de la forma

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

que representa su forma más general.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el comportamiento del sistema son las ya obtenidas ecuaciones de la parte eléctrica y mecánica. Las mismas se repiten a continuación:

$$v_a(t) = K_b\omega_m(t) + R_a i_a(t) + L_a \dot{i}_a(t) \quad (5.54)$$

$$K_i i_a(t) - B_{eq}\omega_m(t) = J_{eq}\dot{\omega}_m(t) \quad (5.55)$$

y pueden llevarse a la forma  $\dot{x} = f(x, u, t)$  despejando  $\dot{i}_a(t)$  y  $\dot{\omega}_m(t)$ :

$$\dot{i}_a(t) = -\frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{K_b}{L_a}\omega_m(t) + \frac{1}{L_a}v_a(t) \quad (5.56)$$

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{K_i}{J_{eq}}i_a(t) - \frac{B_{eq}}{J_{eq}}\omega_m(t) \quad (5.57)$$

donde es evidente que las variables de estado del sistema en cuestión (*motor DC + caja reductora*) son la corriente de armadura  $i_a(t)$  y la velocidad de giro del motor  $\omega_m(t)$ <sup>4</sup>.

Si además se agrega un estado integral (ya que la variable de interés es la posición en el sentido de azimut) aparece una tercera variable de estado dada por

$$\dot{\theta}_p = \frac{1}{R_{AZ}}\omega_m(t) \quad (5.58)$$

donde

- *La ecuación diferencial se escribe en función de  $\omega_m(t)$  ya que es un punto accesible de medida del sistema y por lo tanto puede utilizarse para cerrar uno de los lazos de realimentación.*

---

<sup>4</sup>Cabe aclarar que son las mismas variables de estado que se obtienen cuando se estudia el modelo general de un motor DC. La diferencia radica en que en vez de considerar el momento de inercia  $J$  y el coeficiente de roce  $B$  propios del motor, en este caso se está considerando todo el sistema reductor como parte del motor con su dinámica referida al eje del mismo, por lo tanto se consideran los parámetros  $J_{eq}$  y  $B_{eq}$  que es lo que interesa modelar en este proyecto.

- Para cumplir con lo anterior se tiene en cuenta la reducción del sistema reductor.

De esta forma, las tres ecuaciones de estado pueden llevarse a la forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{aligned}$$

obtenida la sección 5.3 para un sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K_b/L_a & 0 \\ K_i/J_{eq} & -B_{eq}/J_{eq} & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (5.59)$$

Luego, dado que la salida de interés es la posición en azimut  $\theta_p$ , la ecuación que determina la salida y completa el modelo es:

$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + [0] \cdot u \quad (5.60)$$

Se verifica entonces que existen 3 variables de estados que describen por completo al sistema propuesto, por lo tanto puede decirse que es un sistema de orden 3 que verifica el resultado obtenido en el cálculo de la función transferencia.

Así, el modelo de estados propuesto para el análisis del movimiento en azimut será:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K_b/L_a & 0 \\ K_i/J_{eq} & -B_{eq}/J_{eq} & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (5.61)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

Si bien el modelo propuesto se considerará como punto de partida para el análisis, es decir, que con el avance del proyecto y del conocimiento del sistema puede sufrir modificaciones, algunas propiedades propias del modelo de estados se mantendrán y vale la pena que sean recalçadas:

- La información sobre la dinámica del sistema se encuentra contenida en la matriz  $A$  cuyos coeficientes  $a_{ij}$  son parámetros desconocidos hasta el momento.
- La matriz  $B$  también está compuesta por parámetros desconocidos.

Este problema se tratará en el Capítulo 7.

## 5.7 Resumen.

En este capítulo se dio una breve introducción a la función transferencia y al modelo de estados mencionando algunos conceptos relacionados como la matriz de transición de estados y el modelo de estados discreto que serán necesarios más adelante.

Se obtuvo la función transferencia y el modelo de estados del conjunto electromecánico para el movimiento en azimut con el objetivo de aumentar el conocimiento sobre el sistema y además poder proponer experimentos sobre el mismo.

Una vez obtenido cada modelo se planteó la necesidad de resolver la incertidumbre que se tiene hasta ahora sobre los parámetros que componen cada modelo. Esto será solucionado en base a experimentos sobre el sistema para determinar también si los modelos propuestos en este capítulo son válidos.

# Capítulo 6

## Control de sistemas por Modo Deslizante.

### 6.1 Introducción.

En los capítulos anteriores se mencionó la necesidad de contar con un modelo de estados del posicionador de antena para la implementación de un control por modo deslizante sin profundizar en que consiste este tipo de técnica de control.

En este capítulo se dará una introducción teórica a los regímenes deslizantes junto con algunos ejemplos que permitirán entender mejor su origen, funcionamiento y justificar el por qué de su utilización en este proyecto.

No se pretende desarrollar toda la teoría del control por modo deslizante ni de los sistemas de estructura variable sino desarrollar solamente aquellos aspectos que permitan entender y justificar su utilización y además generar nuevos requerimientos y herramientas de análisis sobre el sistema.

### 6.2 Por qué utilizar un control por modo deslizante en este proyecto.

La idea de utilizar un control por modo deslizante surge de la búsqueda de una estrategia de control que resuelva los dos problemas con los que se cuenta hasta ahora:

1. Incertidumbre en los parámetros propios del posicionador (ya que no son provistos por el fabricante).
2. Incertidumbre en el tipo de carga a utilizarse.

Para ejemplificar el segundo punto puede observarse la figura 6.1 donde se muestran los distintos tamaños y tipos de antenas que se miden en el Instituto Argentino de Radioastronomía. En las figuras se observa que el tipo de carga a utilizar no es siempre la misma variando de forma significativa la geometría y el peso.

Además, basándose en la experiencia de la implementación del sistema de medida al aire libre actualmente en funcionamiento se detectaron problemas de falta de torque en posicionador utilizado (tener en cuenta que el sistema actual no es capaz de realizar



Figura 6.1: Ejemplos de antenas que se diseñan y miden en el Instituto Argentino de Radioastronomía.

correcciones en tiempo real). Si además se suma la posibilidad de medidas que usen distintos grados de elevación, es posible que el sistema experimente cambios en el momento de inercia o en los coeficientes de roce además de introducir no linealidades.

Si a esto se le suma

- *La necesidad de un control de simple implementación, robusto y a corto plazo.*
- *La posibilidad de implementar realimentación de estados.*

se concluye que el control por modo deslizante resulta una de las opciones más prometedoras.

Luego, dado que el origen del control por modo deslizante se encuentra en los sistemas de estructura variable se comenzará el estudio con una breve introducción a estos últimos.

### 6.3 Sistemas de Estructura Variable (SEV). Introducción.

El diseño de un control eficiente principalmente cuando se trata con sistemas no lineales y variantes en el tiempo es una tarea difícil. El control implementado debe garantizar la estabilidad del sistema en cualquier condición de operación y buenas respuestas dinámicas y estáticas en lo que respecta a cambios en la entrada y perturbaciones externas, características que deben ser mantenidas incluso ante cambios en los parámetros del sistema (lo que se conoce como “robustez”).

La teoría del control por estructura variable tiene sus orígenes a fines de la década del ‘50 y principios de los ‘60 como una alternativa para el diseño de controladores más eficientes que los desarrollados hasta la época mediante las herramientas de control clásico (como los métodos de respuesta en frecuencia de Nyquist y Bode) principalmente cuando se está en presencia de procesos complejos, no lineales, variantes en el tiempo y con modelos matemáticos no tan bien definidos.

Por definición *un sistema de estructura variable se compone de dos o más subsistemas continuos y una lógica que realiza la conmutación entre ellos en función del estado del sistema*<sup>1</sup>. Definida la función de conmutación, se determina un subespacio o un conjunto de ellos, comúnmente llamados superficies de conmutación sobre los cuales se produce un cambio de estructura [14].

Por ejemplo, en la figura 6.2 se puede ver el diagrama en bloques de un sistema de estructura variable compuesto por  $n$  subsistemas cada uno con su correspondiente ganancia  $k_1, k_2 \dots k_n$  y cuya ganancia de lazo varía dependiendo en que posición se encuentra la llave  $L$ .

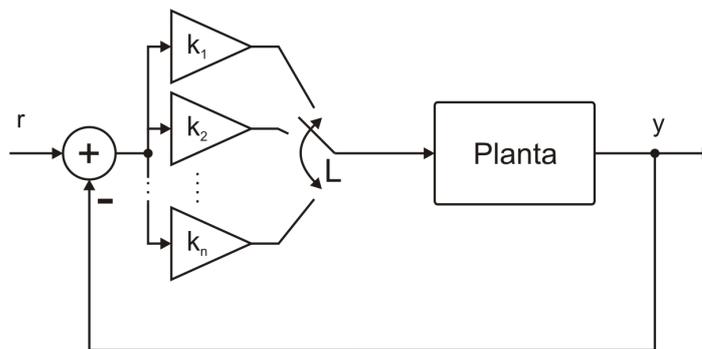


Figura 6.2: Ejemplo de un Sistema de Estructura Variable (SEV).

Lo que propone un sistema de estructura variable es conmutar la llave de manera inteligente y así obtener una mejor respuesta que si se tuviera cualquiera de los sistemas por separado.

<sup>1</sup>Entiéndase por estado la misma definición proporcionada en el análisis del modelo de estados en el Capítulo 5. El estado del sistema para un determinado instante queda determinado por el valor que toman las variables de estado en dicho instante.

### 6.3.1 Ejemplo 1: Sistema de estructura variable.

Tomando como punto de partida para el análisis de sistemas de estructura variable el sistema de la figura 6.2, puede suponerse en primer lugar un sistema lineal con un bloque de ganancia  $k$  variable como el de la figura 6.3.

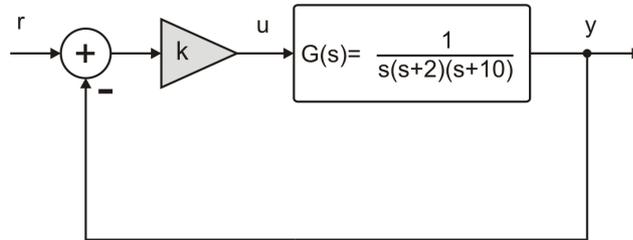


Figura 6.3: Sistema lineal con ganancia de lazo variable.

El sistema anterior no es un sistema de estructura variable, pero se puede analizar que sucede cuando la ganancia  $k$  toma distintos valores. Por el ejemplo, la respuesta a un escalón para distintos valores de  $k$  y el lugar de raíces se muestra a continuación:

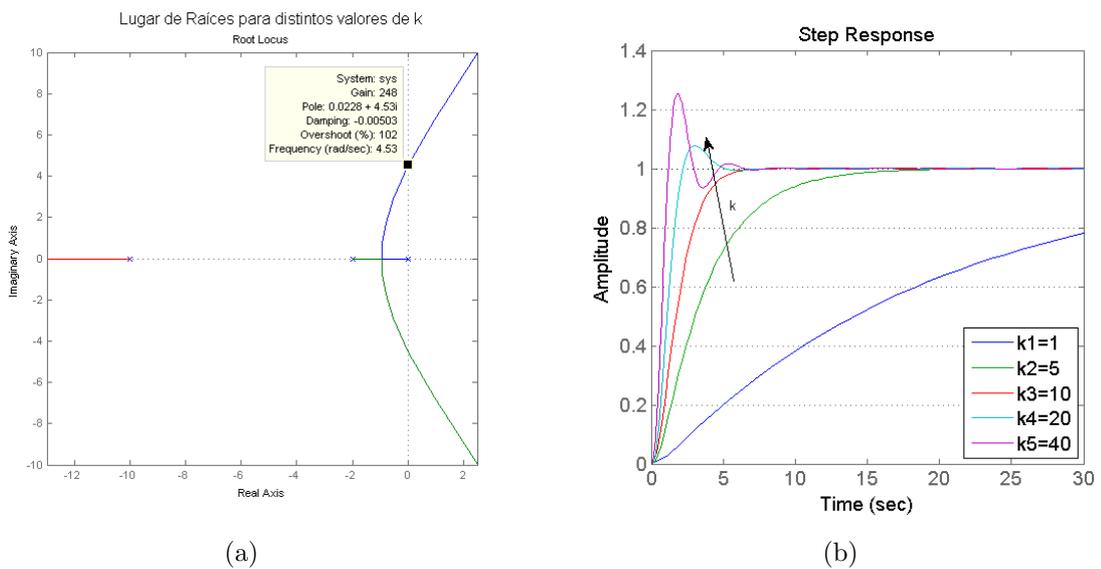
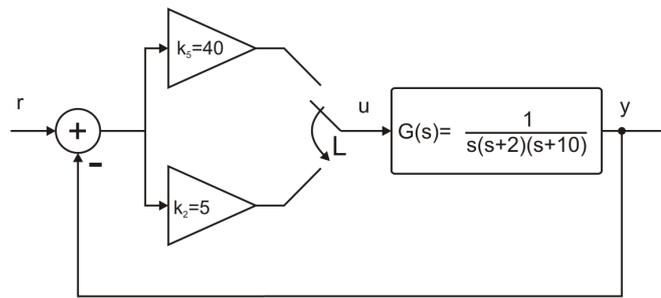


Figura 6.4: a) Lugar de raíces del sistema de la figura 6.3. b) Respuesta del sistema a lazo cerrado para distintos valores de  $k$ .

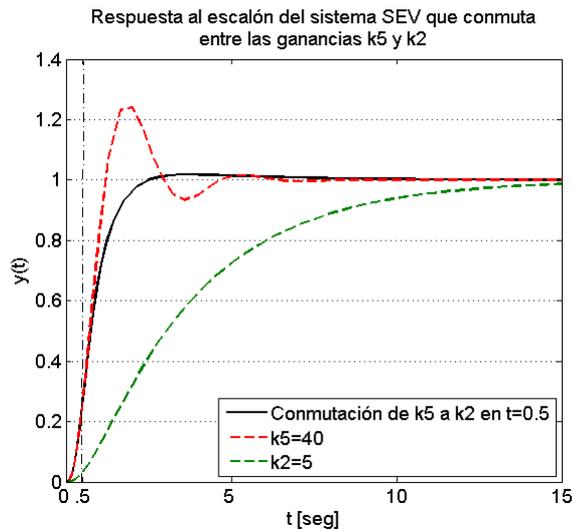
Como se puede observar a medida que aumenta el valor de  $k$  la respuesta del sistema se hace más rápida pero presenta oscilaciones ya que de tener polos reales pasa a tener polos complejos conjugados.

Ahora, si se deseara una respuesta rápida pero sin sobrepaso, de acuerdo a lo visto anteriormente, no es posible hallar un valor de  $k$  que permita dicha respuesta.

Una solución sería cambiar el valor de  $k$  en el momento indicado como se observa en la figura 6.5(a) conmutando el valor de  $k$ . La respuesta de este sistema se observa en la figura 6.5(b) donde se obtiene una respuesta más rápida y sin sobrepaso.



(a)



(b)

Figura 6.5: a) Sistema SEV capaz de conmutar entre dos valores posibles de  $k$ . b) Respuesta del sistema al escalón (negro) si se conmuta la posición de la llave  $L$ .

Se concluye entonces que la conmutación en el valor de la ganancia en el momento adecuado hace que el sistema llegue a su estado final de manera más rápida y disminuyendo el sobrepaso además de mantener la estabilidad. De la figura 6.4(a), el límite de estabilidad del sistema se tiene cuando  $k = 248$ . Si se conmutara a una ganancia igual o mayor a  $k = 248$  se tendría una respuesta inestable. Por lo tanto, un SEV puede ser o no beneficioso dependiendo si se conmuta de forma adecuada o no.

En las secciones siguientes se verán más ejemplos sobre esta cuestión.

### 6.3.2 Tipos de Sistemas de Estructura Variable (SEV).

Como se definió en la sección anterior, un sistema de estructura variable realiza una conmutación dependiendo del estado el sistema. Dependiendo de donde se ubica dicho bloque conmutador se obtienen dos tipos de estructuras SEV:

1. Sistemas con cambio en la realimentación. *El bloque conmuta entre dos o más realimentaciones posibles.* Ver diagrama en bloques de la figura 6.6(a).

2. Sistemas con cambio en la excitación. *El bloque conmuta entre dos ( $u_{max}$  y  $u_{min}$ ) o más acciones de control que ingresan al sistema. Ver figura 6.6(b).*

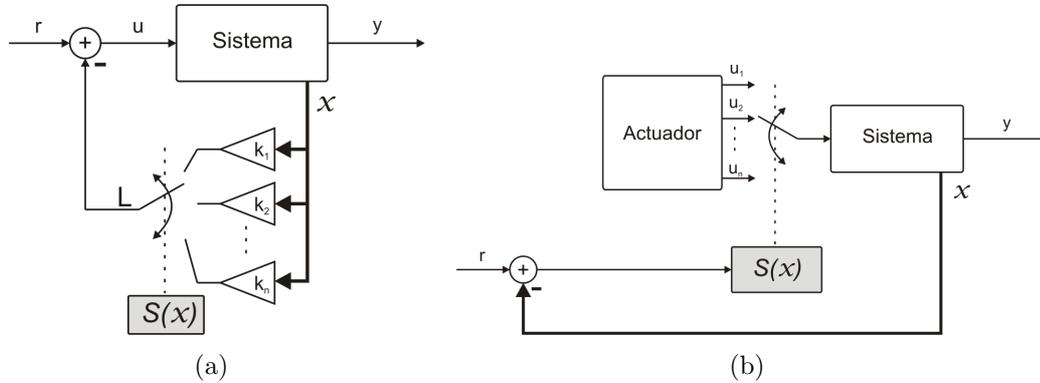


Figura 6.6: a) Sistema SEV con cambio en la realimentación. b) SEV con cambio en la excitación  $u$  del sistema.

En ambos casos  $S(x)$  es la función de conmutación que depende del estado  $x$  del sistema.

Comparando los diagramas de la figura 6.6 con el esquema de control propuesto en la figura 4.5 que se repite a continuación en la figura 6.7 se puede observar que el bloque asociado al lazo de realimentación consiste solamente en la adquisición de las variables a controlar por lo que el único bloque capaz de realizar una conmutación es el controlador digital. De esta forma se establece que

- *El control del sistema a lazo cerrado será del tipo SEV donde el bloque conmutador se implementará en el controlador digital.*

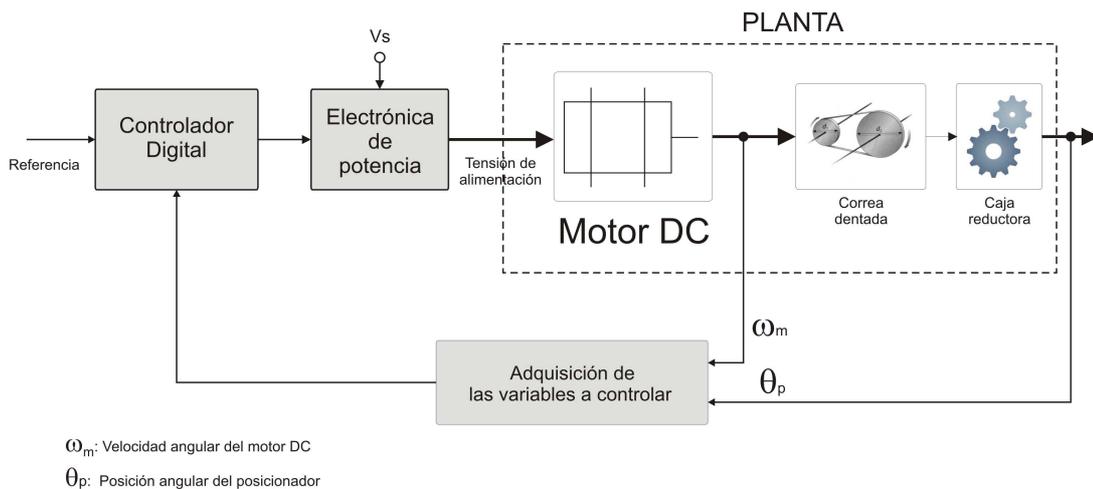


Figura 6.7: Lazo de control propuesto.

Cabe aclarar que el cambio en la excitación o lo que se denominó anteriormente como  $u_{max}$  y  $u_{min}$  desde el punto de vista de la planta es la señal proveniente de la electrónica de

potencia considerada como una ganancia lineal que no realiza ningún tipo de conmutación desde el punto de vista práctico.

Finalmente, queda aún por definir el tipo de SEV a implementar. Esto se verá con más detalle en las secciones siguientes.

## 6.4 El Modelo del Doble Integrador y su Relación con el Modelo del Posicionador de Antena.

En la sección anterior se dio una breve introducción a los sistemas de estructura variable y como, a través de un simple ejemplo, se concluye que a partir de la introducción de un bloque no lineal como lo es un conmutador controlado de forma inteligente se puede obtener una mejor performance del sistema.

Dado que el control por modo deslizante aparece como una consecuencia de conmutar un sistema de estructura variable, antes de comenzar con el desarrollo teórico sobre como analizar este tipo de estrategias de control se mostrarán algunos ejemplos que serán de utilidad para entender que sucede cuando se implementa este tipo de métodos de control.

Por último, cabe destacar que todos los ejemplos estarán basados en el modelo del “*doble integrador*” ya que el mismo puede considerarse como un modelo extremadamente simplificado de un control de posición que usa un motor DC que es justamente el tipo de control que se pretende implementar en el posicionador de antenas. Además, este modelo es bastante utilizado por la simplicidad que ofrece para interpretar los distintos resultados.

El método utilizado para visualizar los resultados será el método del plano de fase por lo que se refiere al lector al Apéndice B.

### 6.4.1 Análisis del modelo del Doble Integrador y su Relación con el Modelo del Posicionador de Antenas.

El doble integrador es un modelo de sistema compuesto por dos integradores en serie con una ganancia  $a$  cuyo diagrama en bloques se observa en la figura 6.8. Si bien a simple vista podría resultar bastante precario en comparación con el modelo de la planta ya obtenido, su análisis resulta de gran utilidad ya que por su simplicidad es bastante didáctico y los resultados obtenidos se pueden visualizar fácilmente en el plano de fase.

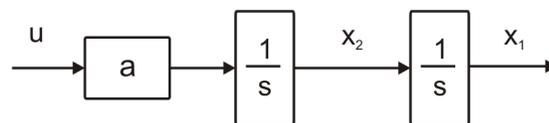


Figura 6.8: Diagrama en bloques de un doble integrador. Por lo general se considera  $a = 1$ .

En primer lugar, se debe considerar el modelo obtenido para el movimiento en azimut del posicionador obtenido en el Capítulo 5 correspondiente al modelo en bloques que se repite en la figura 6.9 (considerando la cupla de carga  $T_L = 0$ ).

Del diagrama de la figura 6.9 se tiene la siguiente función transferencia que relaciona la velocidad de giro con la tensión aplicada al motor:

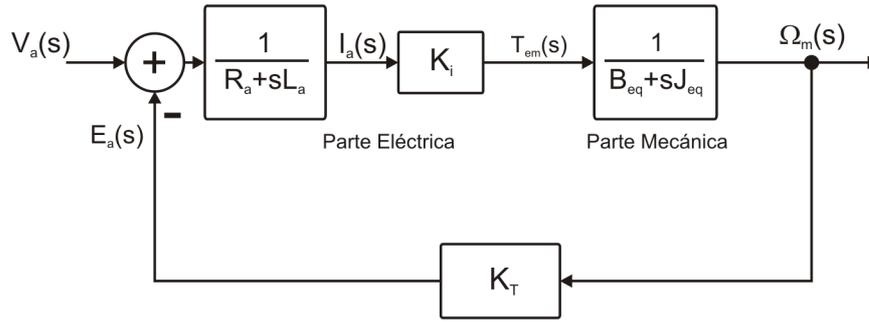


Figura 6.9: Diagrama en bloques del sistema electromecánico asociado al movimiento en azimut.

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right) \cdot (s\tau_E + 1) \cdot \left(s \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} + 1\right)} \quad (6.1)$$

La ecuación anterior puede simplificarse suponiendo lo siguiente:

1. Como se mencionó en el Capítulo 4, es válido suponer en la mayoría de los casos que se trabaja con motores en los que el polo eléctrico es más rápido que el polo mecánico o lo que es lo mismo que  $\tau_E \ll \tau_M$ . De esta forma el término que depende de  $\tau_E$  en  $H_1(s)$  es despreciable frente al resto de los términos por lo que es válido reducir la ecuación (6.1) a:

$$H_1(s) \simeq \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right) \left(s \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} + 1\right)} = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \tau_M \left(s + \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right) \cdot \frac{1}{\tau_M}\right)} \quad (6.2)$$

Si  $\tau_M = J_{eq}/B_{eq}$ , entonces la ecuación anterior queda:

$$H_1(s) = \frac{K_i}{R_a J_{eq} \left(s + \frac{R_a B_{eq} + K_b K_i}{J_{eq}}\right)} \quad (6.3)$$

2. Otra aproximación bastante común consiste en suponer que la parte mecánica es ideal y que no posee roce, por lo tanto  $B_{eq} = 0$ . Así, la ecuación (6.3) se reduce a:

$$H_1(s) = \frac{K_i}{R_a J_{eq} \left(s + \frac{K_b K_i}{J_{eq}}\right)} \quad (6.4)$$

Finalmente, y con el solo fin de simplificar el estudio:

3. Se supone  $K_i = K_b = 1$  ya que en la realidad son parámetros que dependen de la construcción del motor.

4. Se considera despreciable la realimentación interna del motor, por lo tanto  $e_a \ll v_a$ .

El modelo simplificado resultante se muestra en la figura 6.10 donde puede considerarse  $A = K_i/K_i R_a J_{eq}$ .

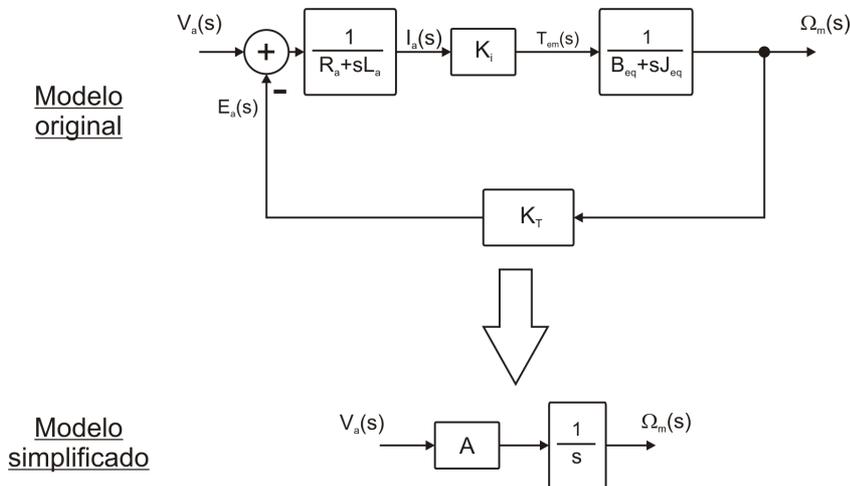


Figura 6.10: Simplificación del modelo del motor DC.

Luego, como la variable que se pretende controlar es la posición, entonces será necesario agregar un integrador a la salida del sistema original teniendo en cuenta la reducción  $R_{AZ}$  para el sentido de movimiento en azimut que propone el sistema mecánico (lo cual, como se vio anteriormente, puede modelarse como una ganancia de valor  $1/R_{AZ}$ ).

Así, el modelo simplificado toma la siguiente estructura:

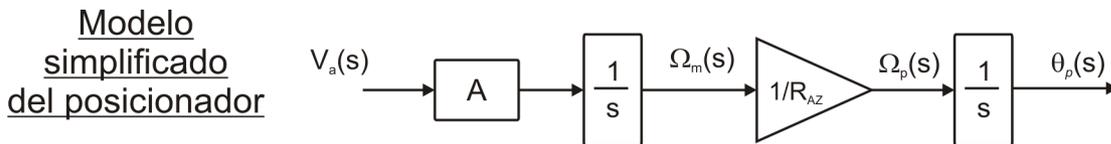


Figura 6.11: Diagrama en bloques del modelo simplificado del posicionador para el movimiento en azimut.

Que además, por tratarse de un sistema lineal puede llevarse a la siguiente forma más general:

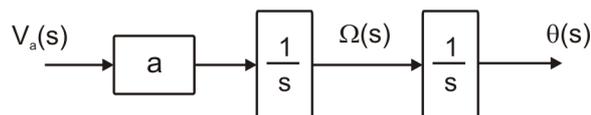


Figura 6.12: Posicionador de Antena como Doble Integrador.

Donde  $a = K_i/R_a J_{eq} R_{AZ}$ .

Si bien es una simplificación muy generosa del problema real, analizar los sistemas de estructura variable tomando como ejemplo este modelo es con fines puramente didácticos ya que

- Los resultados obtenidos pueden representarse fácilmente en el plano de fase.
- Facilita la interpretación de los resultados matemáticos.
- Muchas de las conclusiones a partir del análisis pueden trasladarse a modelos más complejos.

### 6.4.2 Modelo de Estados del Doble Integrador.

El modelo de Estados del Sistema a lazo abierto de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D u \end{aligned} \quad (6.5)$$

para el doble integrador con la asignación de estados de la figura 6.13.

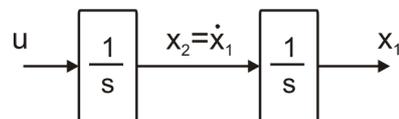


Figura 6.13: Asignación de las variables de estado del doble integrador.

está dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ [y] &= [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Luego, si se considera el caso de realimentar ambos estados con ganancias  $k_1$  y  $k_2$ , el lazo de control tendrá la siguiente estructura:

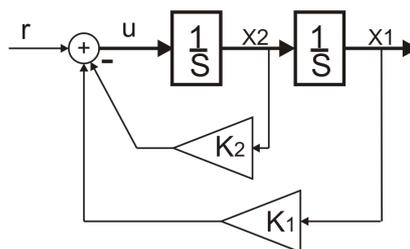


Figura 6.14: Doble Integrador. Realimentación de todos los estados.

Y el modelo de estados del sistema realimentado estará dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ [y] &= [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde, si bien la estructura del modelo es la misma, debe observarse las diferencias entre el modelo a lazo abierto y el modelo a lazo cerrado.

## 6.5 Sistemas de Estructura Variable (SEV) y Modos Deslizantes. Ejemplo 6.2: Sistema de Estructura Variable con cambio en la Realimentación.

Como se mencionó en la sección 6.3, los regímenes deslizantes son consecuencia de conmutar de determinada manera un sistema de estructura variable sin dar todavía ninguna explicación teórica sobre en qué consiste un régimen deslizante y bajo que condiciones se da el mismo. Esto se debe a que partir de un desarrollo matemático hace que resulte bastante difícil interpretar los resultados por lo que a la hora de escribir este documento se prefirió comenzar el desarrollo a partir de algunos ejemplos.

Como es bastante predecible, debido a que el interés de este documento se basa en el control de posición de sistemas, ambos ejemplos estarán basados en establecer un control del tipo SEV sobre el doble integrador cuyo modelo ya es conocido.

Cabe recalcar que en ambos ejemplos se tomaron como variables de estado a  $x_1$  y  $x_2$  para no perder generalidad aunque se sabe que dichas variables de estado pueden asociarse a la posición y velocidad del sistema a controlar respectivamente.

El primer ejemplo consiste en analizar y simular el siguiente sistema de control a lazo cerrado (fig. 6.15) capaz de variar la ganancia de realimentación dependiendo de la posición de la llave  $L$ .

La posición de la llave (A o B) estará controlada por la función  $S = f(x)$  siendo  $x = [x_1; x_2]$  el vector de estados del sistema.

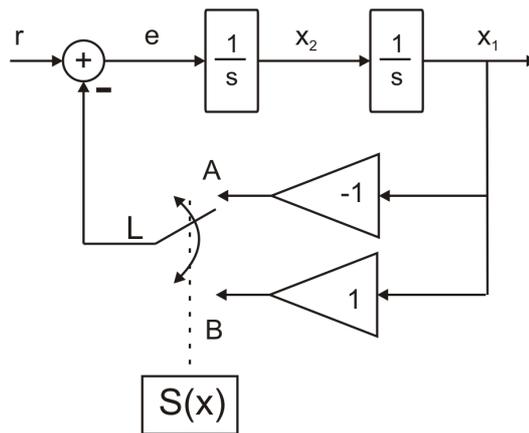


Figura 6.15: Ejemplo 6.2. Control a lazo cerrado con cambio en la realimentación.

El sistema será analizado en el plano de fase  $x_1 \perp x_2$  proponiendo distintas formas de conmutar la llave dependiendo de los valores que tome el vector de estados del sistema o lo que es lo mismo, en qué región del plano de fase se encuentre. Para esto, se definirán  $S_i$  superficies de conmutación sobre las cuales se verifica que  $S_i(x) = 0$  y que determinaran regiones en el plano de fase donde la llave  $L$  tomará la posición A o B.

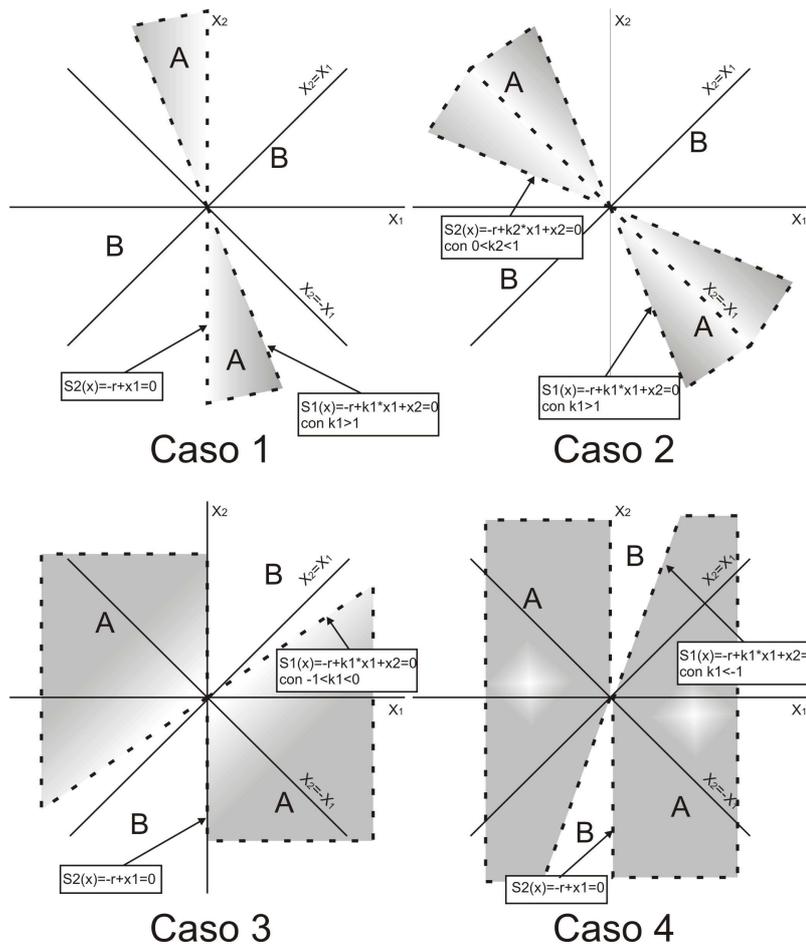


Figura 6.16: Regiones en el plano de donde la llave  $L$  toma el valor  $A$  o  $B$ . Se suponen cuatro casos distintos. Observar que la superficie en el plano de fase para cada posición está delimitada por una superficie de conmutación  $S_i(x)$ .

Las regiones propuestas para llevar a cabo el análisis se muestran en la figura 6.16.

Las simulaciones fueron llevadas en Simulink. Para esto se supuso que la referencia es nula ( $r = 0$ ), se asignó un valor de  $k$  que permitiera definir cada superficie de conmutación y se tomó un estado inicial del sistema ( $x(t_0) = [x_1(t_0); x_2(t_0)]$ ) distinto de cero. Luego de cada simulación se analizaron los resultados obtenidos.

### A. Análisis del sistema a controlar

Observando el sistema de control planteado, a simple vista consiste en un doble integrador realimentado con una ganancia que puede tomar dos valores posibles. Se verifica que dicho sistema es un Sistema de Estructura Variable con cambio en la realimentación.

El primer paso de análisis sería suponer al sistema como dos sistemas lineales independientes (uno con ganancia de realimentación positiva y otro negativa) que conviven en uno solo para entender como y por qué de la evolución del sistema cuando se conmuta la llave en cada una de las regiones propuestas. Esto se realizó en el Apéndice B sección B.3 donde se obtuvieron las trayectorias que describe en vector de estados en el plano de fase

para cada posición de la llave y para distintas condiciones iniciales. Dichas trayectorias se observan en la figura 6.17.

A partir de lo anterior, se concluyó que para cualquier posición de la llave el sistema es inestable. Gráficamente esto se verifica ya que no existe trayectoria que deposite al sistema en el punto de equilibrio único  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

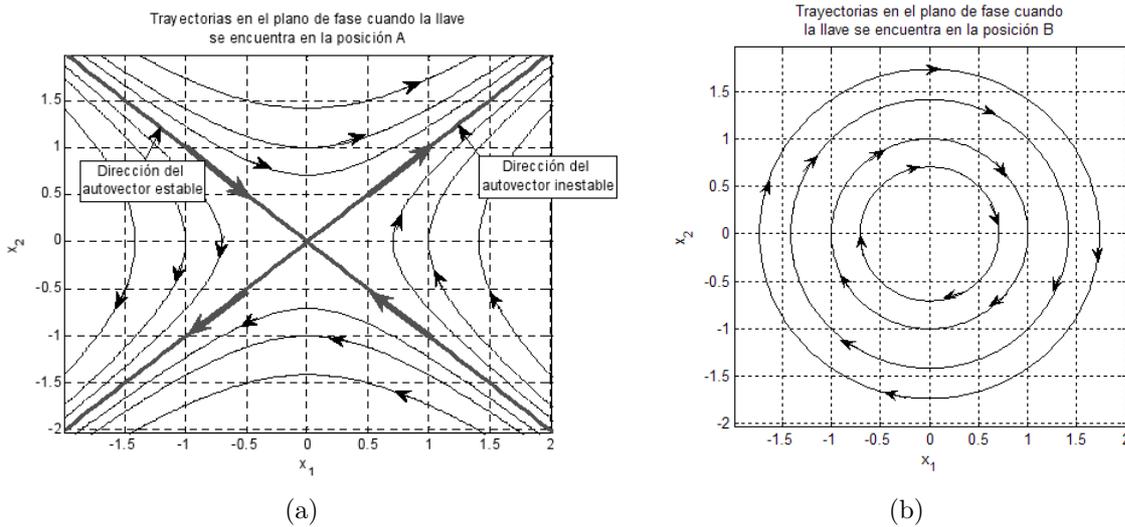


Figura 6.17: a) Trayectorias en el plano de fase para la llave en la posición A. b) Trayectorias en el plano de fase para la llave en la posición B.

El modelo utilizado en el simulador se muestra a continuación

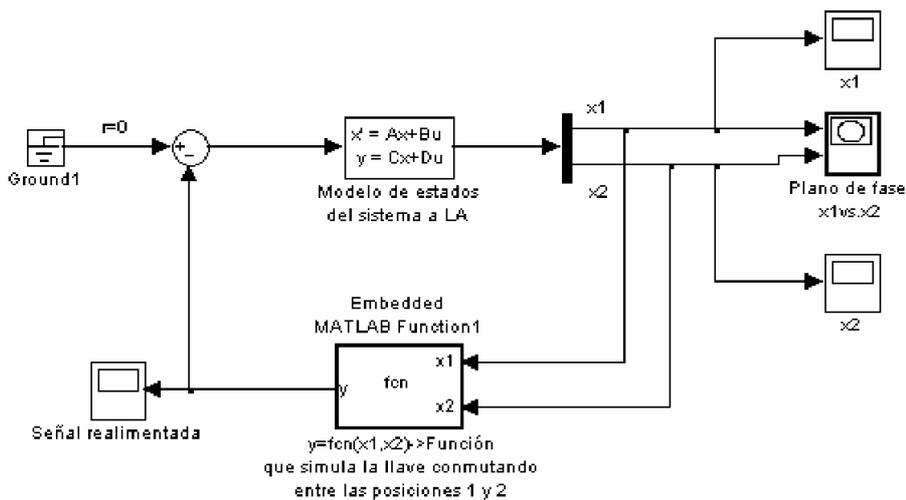


Figura 6.18: Diagrama en bloques del modelo introducido en el simulador.

Donde el bloque que contiene el modelo de estados del sistema a lazo abierto contiene el siguiente modelo definido en el Workspace de Matlab:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ [y] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.8)$$

que permite observar ambas variables de estado a la salida.

El bloque *fcn* ejecuta una función estableciendo una condición del tipo “*if-else*” que simula la llave conmutando entre las posiciones A y B. El esquema general del código implementado en este bloque para cada caso es el siguiente:

```
function y=fcn(x1,x2)\%El Funcionamiento de la
%llave depende del valor
%instantáneo de los estados.
r=0;
S1=f1(r,x1,x2);\%Define la primer superficie de conmutación
S2=f2(r,x1,x2);\%Define la segunda superficie de conmutación
S3=S1*S1; \%A partir del signo de S3 se determina la región en el
plano X1 y X2 que corresponde a una posición de la llave.
if('Condición');\%Dependiendo del signo de S3 se invierte el signo de la
%salida y=+/-x1

y =-1*x1;
else
y=x1;
end
```

Una vez definido el modelo se procedió a simular el modelo para cada caso y para distintas condiciones iniciales del sistema.

### I. Respuesta del sistema para el CASO 1

A partir del esquema de conmutación propuesto, se pueden definir dos superficies de conmutación  $S_1$  y  $S_2$  donde se propone  $k_1 = 2$ . (Fig. 6.19).

De la figura 6.19 se tiene que si se plantea una superficie  $S_3$  cuyo valor instantáneo está dado por  $S_3 = S_1 \times S_2$ , entonces a partir del signo de  $S_3$  se puede determinar una región en el plano  $x_1 \perp x_2$ . Para este caso, la llave se hallará en la posición A cuando  $S_3$  tome valores negativos (Observar en la figura 6.19 que los signos de  $S_1$  y  $S_2$  se oponen en dicha región) y en la posición B cuando tome valores positivos ( $S_1$  y  $S_2$  tienen igual signo).

El resultado de la simulación para las condiciones iniciales (-1,2) se muestra en la figura 6.20(a).

Se observa que cada vez que el sistema alcanza una de las superficies de conmutación pasa a evolucionar de acuerdo a la trayectoria correspondiente al tipo de realimentación según se analizó en el Apéndice B, es decir, en la zona correspondiente a la llave en la posición A el vector de estados del sistema evoluciona sobre hipérbolas así como en la zona correspondiente al punto de funcionamiento B el sistema evoluciona sobre circunferencias. Luego, la hipérbola o circunferencia sobre la cual evoluciona el sistema depende del valor

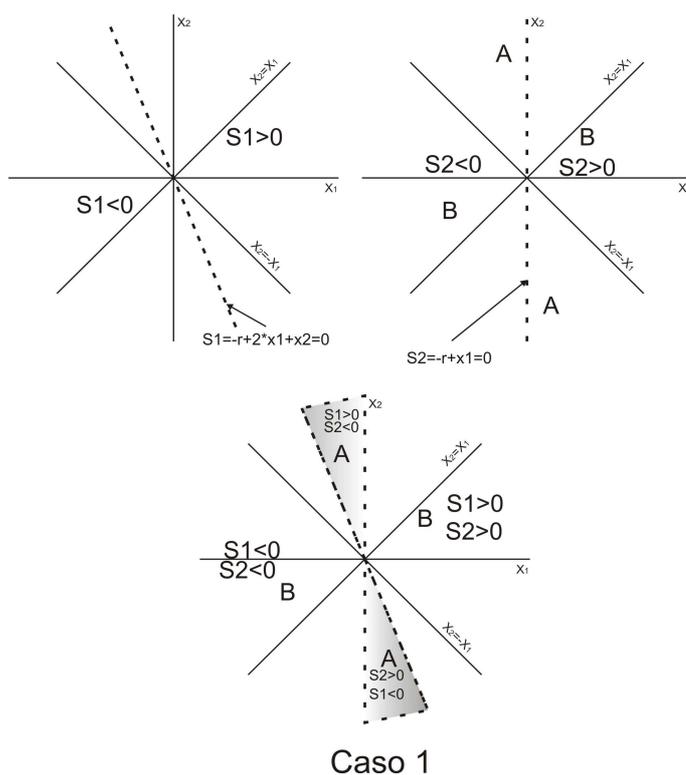


Figura 6.19: Superficies de conmutación para el Caso 1.

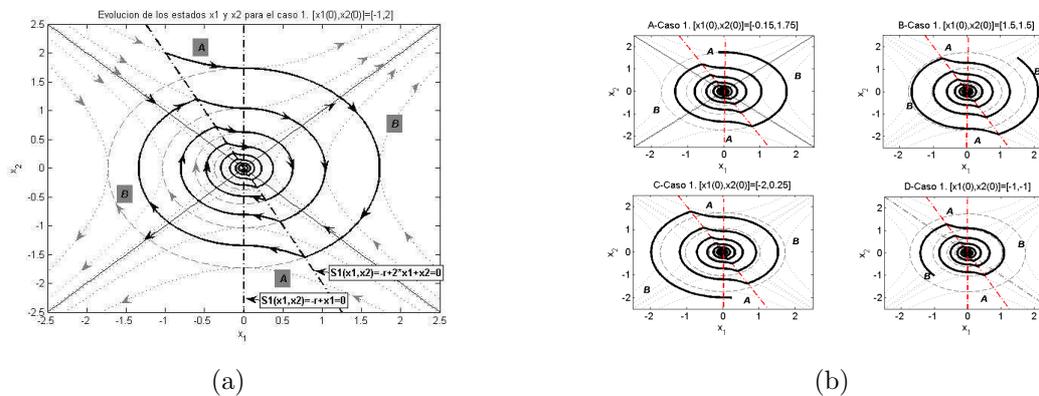


Figura 6.20: a) Trayectoria descrita por el sistema dependiendo de la posición de la llave. Observar que la trayectoria evoluciona hacia el origen del plano. b) Trayectorias descritas para distintas condiciones en el plano. Se verifica la estabilidad del sistema.

que tome el vector de estados  $x$  al momento de alcanzar la superficie de conmutación (esto se cumple para todos los casos).

Como consecuencia se tiene que el sistema ahora es capaz de alcanzar el punto de equilibrio, es decir, se tiene un sistema estable.

En la figura 6.20(b) se muestran las trayectorias descritas por el vector de estados para distintas condiciones iniciales del sistema lo que implica distintas posiciones de la llave  $L$ . En todos los casos se verifica que, debido a las conmutaciones en los instantes

correctos el sistema es capaz de alcanzar el equilibrio.

Entonces, a partir de un sistema inestable, conmutando el lazo de realimentación de forma correcta se obtuvo un sistema estable lo cual deja en evidencia las ventajas de los sistemas del tipo SEV.

## II Respuesta del sistema para el CASO 2

Al igual que en el caso anterior, a partir del esquema de conmutación propuesto, se definen dos superficies de conmutación  $S_1$  y  $S_2$ . Para este caso se proponen las siguientes pendientes de las rectas de conmutación:  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 0,5$ .

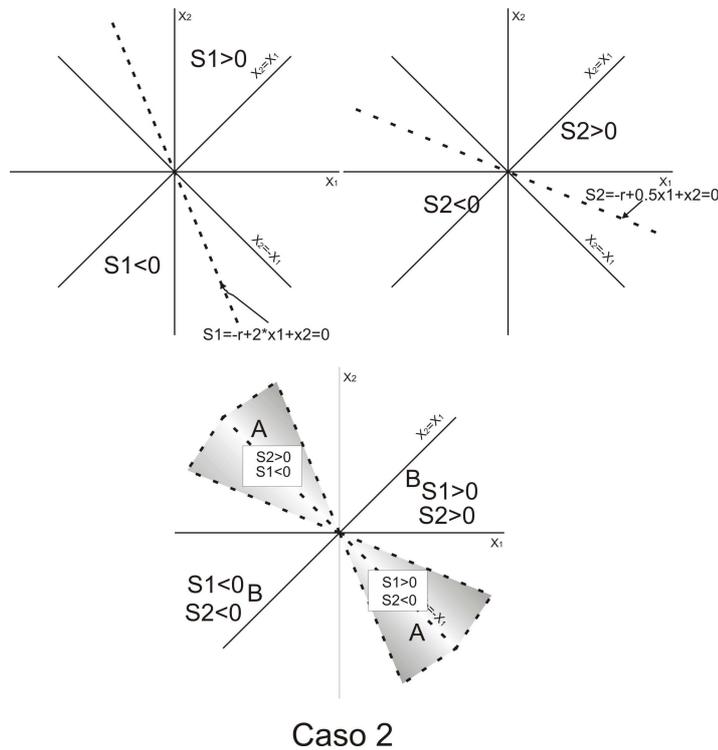


Figura 6.21: Superficies de conmutación para el Caso 2.

El procedimiento para establecer el instante de conmutación de la llave es el mismo que en el caso anterior estableciendo una superficie  $S_3 = S_1 \times S_2$  de forma que la llave se hallará en la posición A cuando  $S_3$  tome valores negativos y en la posición B cuando tome valores positivos.

El código introducido en el bloque *fcn* posee la misma estructura que en el caso anterior pero se modificó la expresión de  $S_1$  y  $S_2$  de acuerdo a las superficies de conmutación elegidas.

La evolución de los estados para este caso se observa en la figura 6.22(a). En ella puede verse que para la condición inicial propuesta el vector de estados evoluciona sobre una hipérbola (llave en la posición A). Cuando la trayectoria alcanza la superficie de conmutación  $S_1$  (punto  $P_1$ ) pasa a evolucionar sobre una circunferencia, que se corresponde con la llave en la posición B según se analizó en Apéndice B. Ahora, si se observa el punto  $P_2$ , cuando el sistema alcanza la superficie  $S_2$  no pasa a evolucionar sobre una hipérbola

correspondiente a la llave en A sino que permanece sobre la superficie de conmutación hasta alcanzar el punto de equilibrio (para más detalle ver figura 6.22(b)).

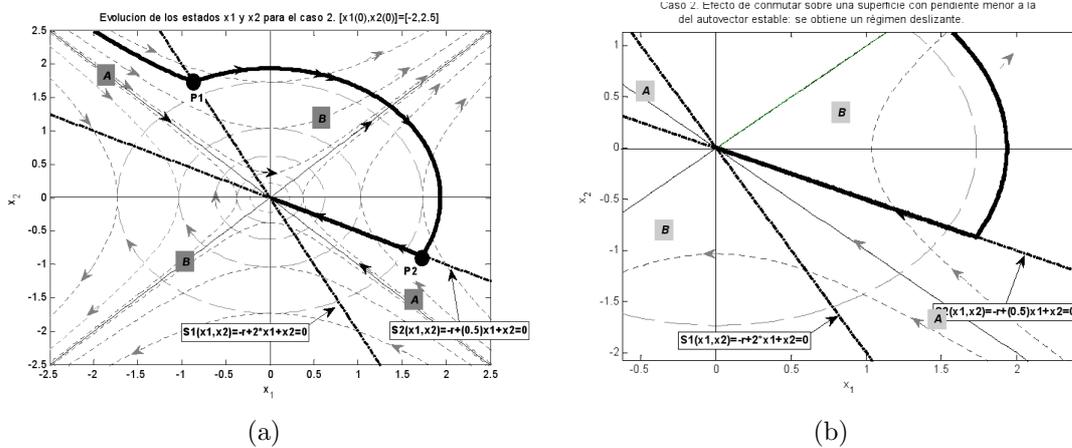


Figura 6.22: a) Trayectoria descrita por el sistema para el Caso 2. b) Establecimiento de un régimen deslizante.

Una vista ampliada del entorno del punto  $P_2$  permitirá entender mejor que es lo que sucede (figura 6.23).

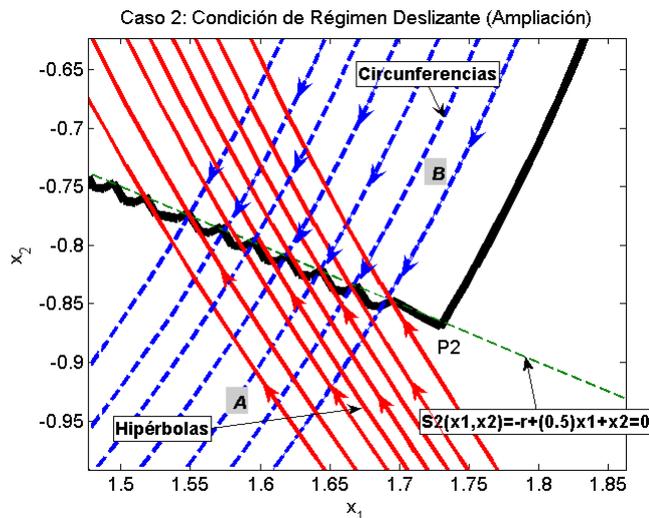


Figura 6.23: Evolución del vector de estados sobre la superficie de conmutación. Observar el sentido opuestos de las trayectorias a ambos lados de la superficie  $S_2$ .

Cuando el vector de estados alcanza la superficie  $S_2$  a través de una circunferencia y la llave pasa de la posición B a la A, corresponde que siga evolucionando sobre un tramo de hipérbola pero se encuentra con que en esta región del plano el sentido de recorrido de las hipérbolas hace que vuelva hacia la superficie de conmutación  $S_2$  conmutando la llave de nuevo a la posición B. Lo opuesto ocurre cuando intenta recorrer una circunferencia.

Dado que no existe ninguna condición que haga que el vector de estados se aparte de esta región del plano la trayectoria del sistema evolucionará alternándose entre la región A y B como se muestra en la figura 6.23 produciéndose una conmutación de alta frecuencia.

Dado que dichas transiciones ocurren de forma muy rápida (teóricamente a frecuencia infinita) puede suponerse que *el sistema evoluciona (“desliza”) sobre la recta de conmutación*. Una vez ocurrido esto se observa que  $x_1$  y  $x_2$  están relacionados linealmente (ya que idealmente evolucionan sobre una recta), por lo tanto se puede escribir:

$$x_2 = -k_2 \cdot x_1 \tag{6.9}$$

La evolución sobre la superficie de conmutación se conoce como *condición de modo deslizante o régimen deslizante*. Inicialmente, el sistema no evoluciona bajo la condición de modo deslizante, sino que lo hace a través de la trayectoria impuesta por su propia dinámica. Esto hace pensar que el modo deslizante se da bajo determinadas condiciones. (Se profundizará más sobre esta cuestión más adelante).

Dado que el fenómeno que hace que el sistema evolucione a través de la superficie de conmutación y no de acuerdo a su dinámica propia esto es bastante sorprendente

El sistema se simuló para 4 diferentes condiciones iniciales a modo de verificar que el resultado obtenido no es casual. Los resultados se muestran en la figura 6.24.

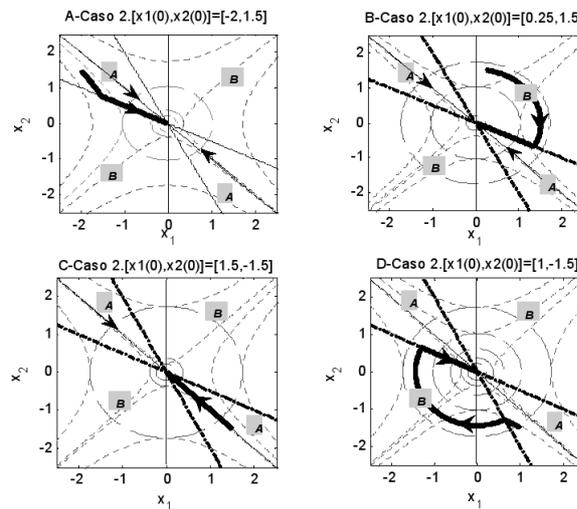


Figura 6.24: Trayectorias del vector de estados para distintas condiciones iniciales correspondiente al Caso 2. Observar las la existencia de regímenes deslizantes para las distintas trayectorias.

Se observa en los casos A, B, y D que una vez que se alcanza la superficie S2 aparece un régimen deslizante.

El caso C no debe confundirse con un régimen deslizante ya que las condiciones iniciales se encuentran en la dirección del autovector estable del sistema a lazo cerrado por lo que el sistema responderá de acuerdo a la dinámica establecida por el autovalor asociado a dicho autovector verificándose que responde como un sistema de orden 1.

Al igual que en el Caso 1, a partir de un sistema inestable y mediante el control de la posición de la llave se logró estabilizar el sistema. Este caso tiene el agregado que se dan las condiciones para la existencia de un régimen deslizante.

### III Respuesta del sistema para el CASO 3

Para este caso se proponen las superficies de conmutación de la figura 6.25. donde se propuso  $k_1 = 0,5$  para la programación del bloque *fcn* de acuerdo a las superficies de conmutación propuestas.

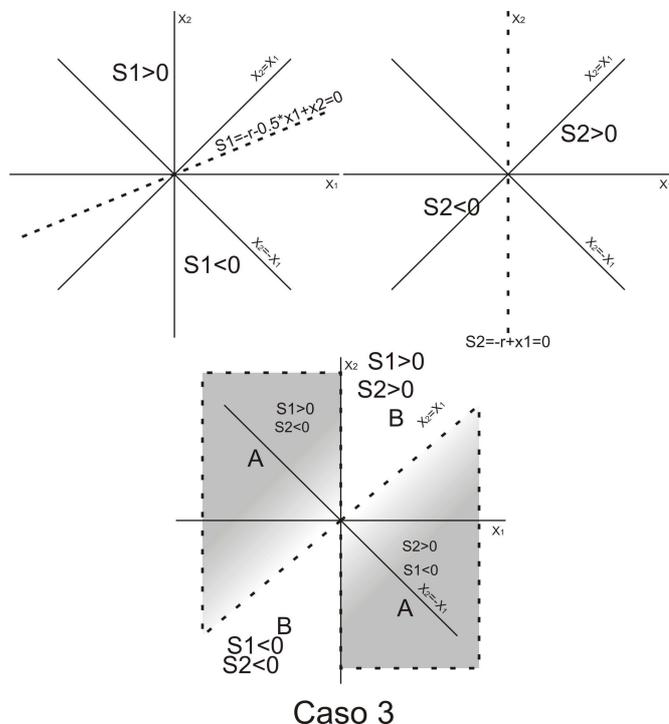


Figura 6.25: Superficies de conmutación propuestas para el Caso 3.

Para este caso se obtuvieron las siguientes respuestas para distintas condiciones iniciales (figuras 6.26(a) y 6.26(b)):

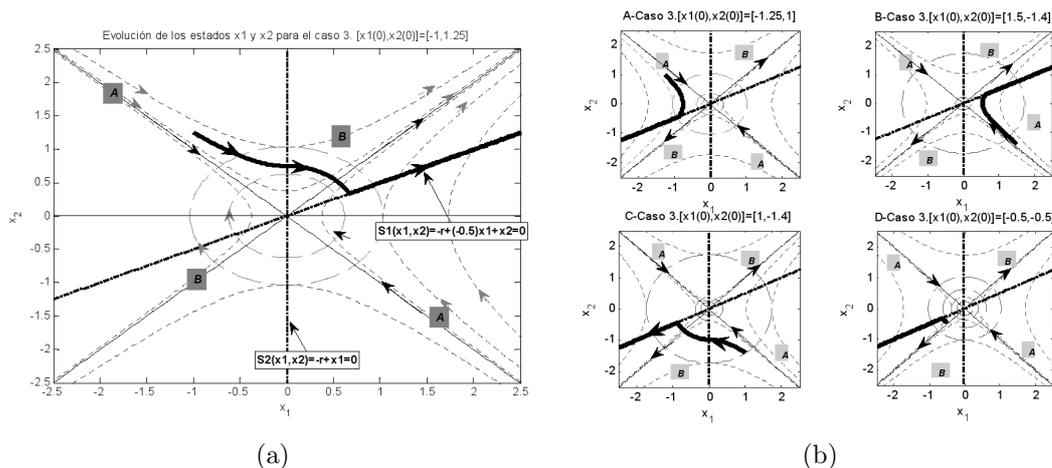


Figura 6.26: a) y b) Trayectoria del vector de estados para distintas condiciones iniciales con la llave L conmutando de acuerdo al Caso 3. Observar que el sistema resultante es inestable.

Para todos los casos se observa que el sistema alcanza el régimen deslizante y si bien

la justificación de por qué se mantiene sobre la superficie de conmutación es la misma que en el caso anterior, en este caso particular no se alcanza la estabilidad debido a que el sentido de las trayectorias en el entorno del plano alrededor de la recta de conmutación no lo permite.

Se concluye que el sistema de lazo cerrado para el tipo de conmutación propuesta es inestable. Por lo tanto, si bien en la práctica la elección de ésta superficie de conmutación hubiera sido incorrecta permite mostrar que la existencia de un régimen deslizante no garantiza la estabilidad del sistema.

#### IV Simulación para el CASO 4

En la figura 6.27 se muestran las superficies de conmutación a definir para determinar las regiones propuestas por el caso 4. El procedimiento es el mismo que en los casos anteriores tomando  $k_1 = -2$ .

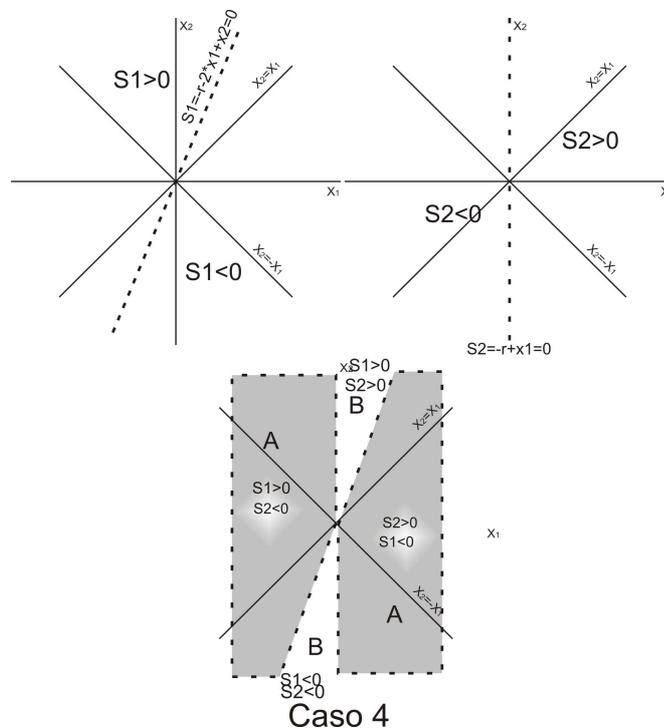


Figura 6.27: Superficies de conmutación definidas para el Caso 4.

La respuesta del sistema se muestra en las figuras 6.28(a) y 6.28(b) para distintas condiciones iniciales donde se verifica que no se logra ni la condición de régimen deslizante ni la estabilidad del sistema. Se concluye nuevamente que para la conmutación propuesta, el sistema de lazo cerrado también es inestable.

De esta manera, si bien a lo largo de cada una de las situaciones a las que se ha sometido el sistema existen numerosos puntos que resultan interesantes para analizar existe uno que se destaca:

- *A partir de un sistema compuesto por dos sistemas en principio inestables, eligiendo una lógica de conmutación adecuada (como sucede en los casos 1 y 2) se ha logrado obtener un sistema estable.*

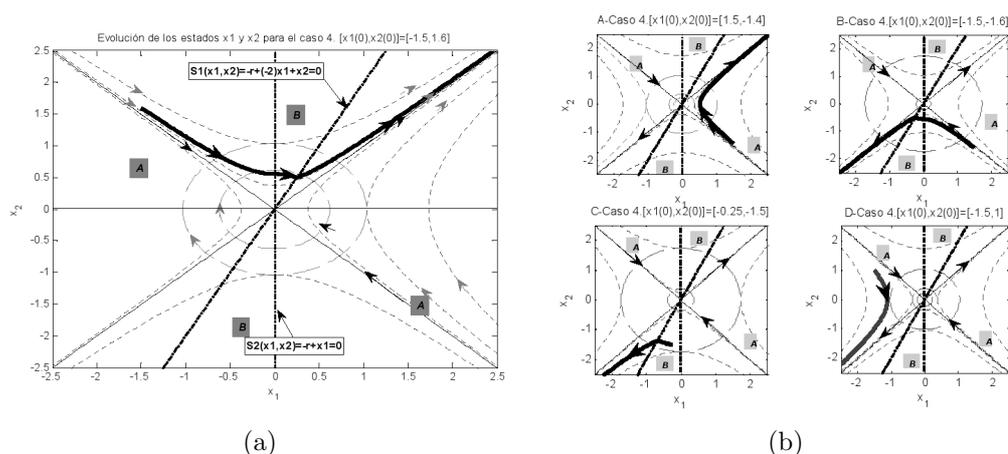


Figura 6.28: a) y b). Respuesta del sistema para distintas condiciones iniciales conmutando con la lógica propuesta por el Caso 4.

No conformándose con esto, del análisis de la evolución del sistema en el caso 2 se observa la existencia de un régimen deslizante permite que

- además de obtener un sistema estable, una vez dentro del régimen deslizante el sistema evoluciona sobre una determinada superficie en vez de la trayectoria impuesta por su dinámica propia.

En el caso 3, si bien existe un régimen deslizante, debido a la incorrecta elección de las superficies de conmutación no se logra la estabilidad del sistema y en el caso 4 no existe un régimen deslizante (el sistema evoluciona de acuerdo a su dinámica propia) y tampoco se alcanza la estabilidad.

## 6.6 Sistemas de Estructura Variable (SEV) y Modos Deslizantes. Ejemplo 6.3: Sistema de Estructura Variable con Cambio en la Excitación.

Suponer ahora que bloque encargado de la conmutación se introduce a la entrada del doble integrador por lo que sistema de control de posición a lazo cerrado tendrá la estructura que se muestra en la figura 6.29.

Donde puede observarse ahora que la conmutación entre la acción de control  $u_{min}(+M)$  y  $u_{max}(-M)$  depende del signo de la señal de error  $e$ .

El análisis de este sistema en el plano de fase (ver Apéndice B) arroja las posibles trayectorias sobre las que puede evolucionar el sistema para diferentes condiciones iniciales (figura 6.30) de donde se desprende que, como se concluyó el Apéndice B, el sistema posee una respuesta oscilatoria por lo que no será capaz de alcanzar la posición final pretendida (el origen del plano  $(e, \dot{e})$ ).

Ahora, al igual que en el caso anterior se busca la manera de conmutar entre  $u_{min}$  y  $u_{max}$  pero de alguna manera que permita alcanzar el origen del plano de fase.

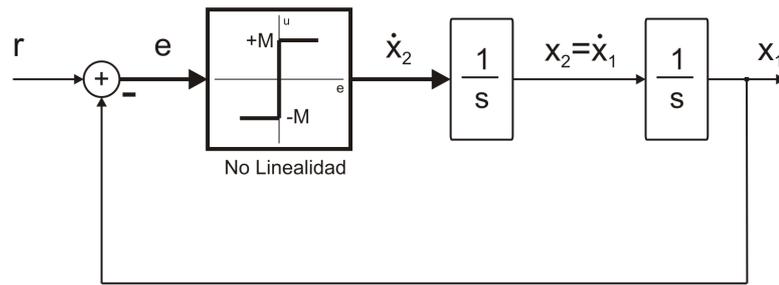


Figura 6.29: SEV con cambio en la excitación.

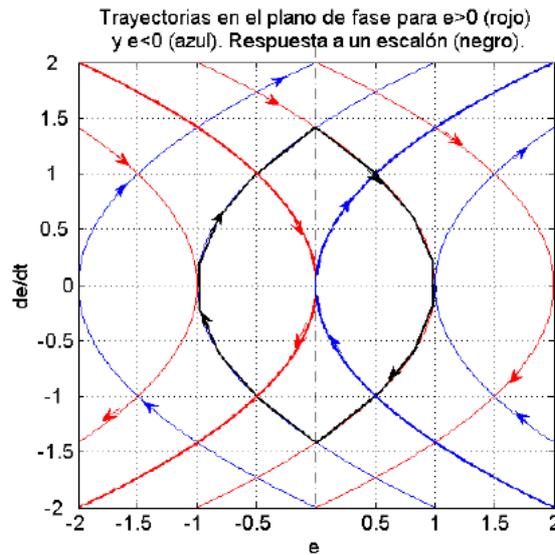


Figura 6.30: Trayectorias en el plano de fase para el sistema de la figura 6.29.

En la figura 6.30 puede verse que existe una trayectoria (ya sea en rojo o en azul) que pasa por el origen de coordenadas y que intercepta a la trayectoria actual (color negro) cuando  $e = 0,5$  (o lo que es lo mismo cuando  $\theta = r/2$ ).

Por lo tanto, si en vez de conmutar en  $e = 0$  se traslada la recta de conmutación a  $e = 0,5$  se obtiene la trayectoria de la figura 6.31(c) para el sistema de la figura 6.31(a).

Si bien en las figuras se muestra que el sistema alcanza el origen, por lo que se obtuvo un resultado beneficioso, el hecho de conmutar en la superficie óptima resulta difícil de implementar ya que requiere de un buen modelo del sistema para el diseño del lazo de control. Éste tipo de control corresponde a los controles de *tiempo mínimo*.

Otra solución podría ser buscar una condición bajo la cual se produzca una conmutación entre trayectorias con sentido de evolución opuesto como en el Caso 2 del ejemplo 6.2. Esto generaría el establecimiento de un régimen deslizante que confinaría al sistema a evolucionar sobre una superficie de conmutación hacia el punto de equilibrio deseado. Dicha condición puede lograrse “*inclinando*” la superficie de conmutación (que hasta ahora es una recta que coincide con el eje de las ordenadas) de forma que el sistema conmute antes de alcanzar la trayectoria que pasa por el origen.

Una recta posible de conmutación puede ser la siguiente:

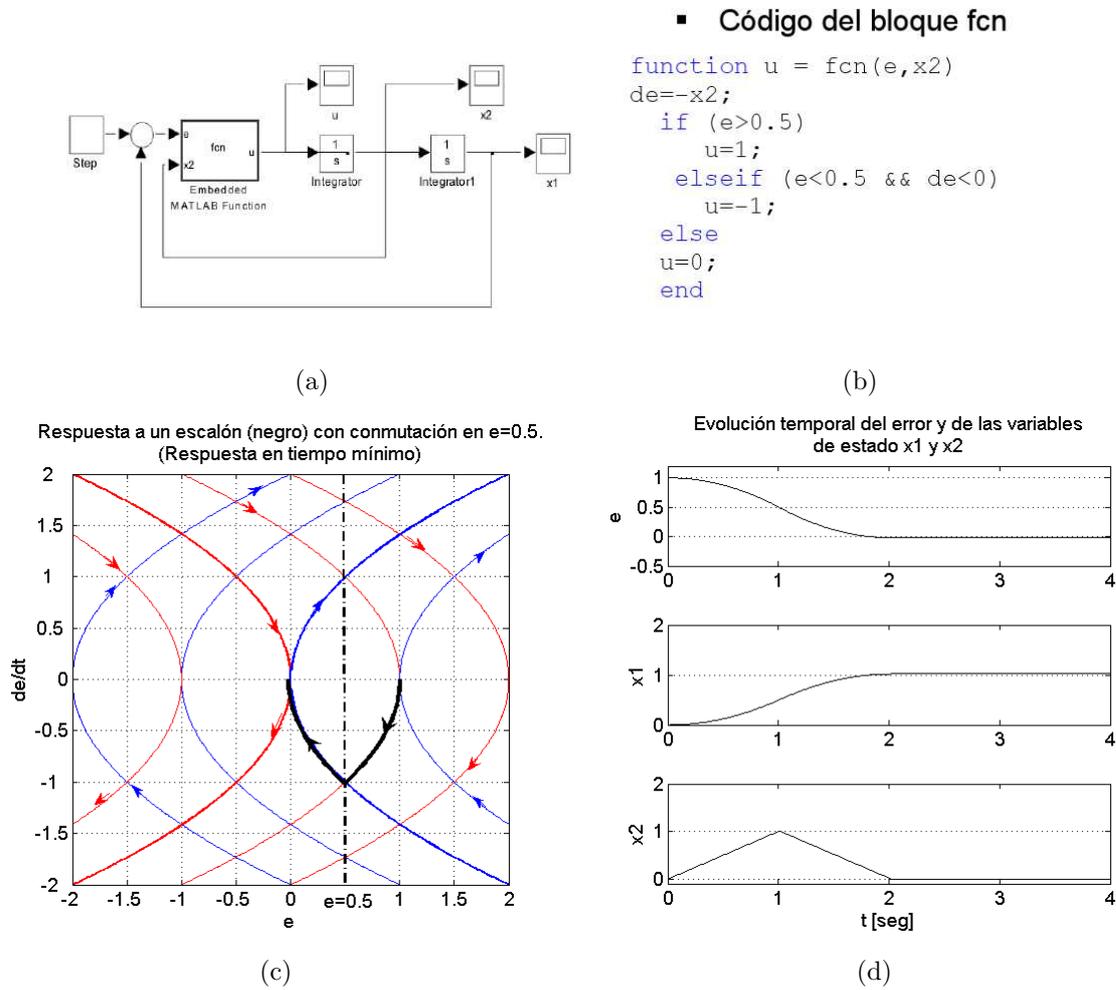


Figura 6.31: a) Sistema propuesto para trasladar la recta de conmutación a  $e=0.5$ . b) Porción de código implementado en el bloque “Embedded Function” de la figura 6.31(a). c) Trayectoria en el plano de fase cuando se excita el sistema con un escalón  $u(t)$ . d) Evolución temporal de los estados (observar el tiempo de establecimiento del sistema. Aproximadamente 2 seg.).

$$\dot{e} = -\frac{1}{2}e \tag{6.10}$$

que es una recta que para por el origen del plano de fase de forma que, si se logra que el sistema evolucione sobre dicha recta, es posible que se pueda alcanzar el punto de equilibrio.

La ecuación (6.10) puede expresarse en función de  $r$ ,  $x_1$  y  $x_2$  ya que en todo momento se verifica que  $e = r - x_1$ . Así, la ecuación de la recta de conmutación puede escribirse como:

$$S(x) = r - x_1 - 2x_2 = 0 \tag{6.11}$$

que determina una *superficie de conmutación* en el plano.

A partir de lo anterior, puede establecerse el siguiente lazo de control como se muestra en la figura 6.32(a) cuya respuesta a una determinada condición inicial se muestra en la figura 6.32(b).

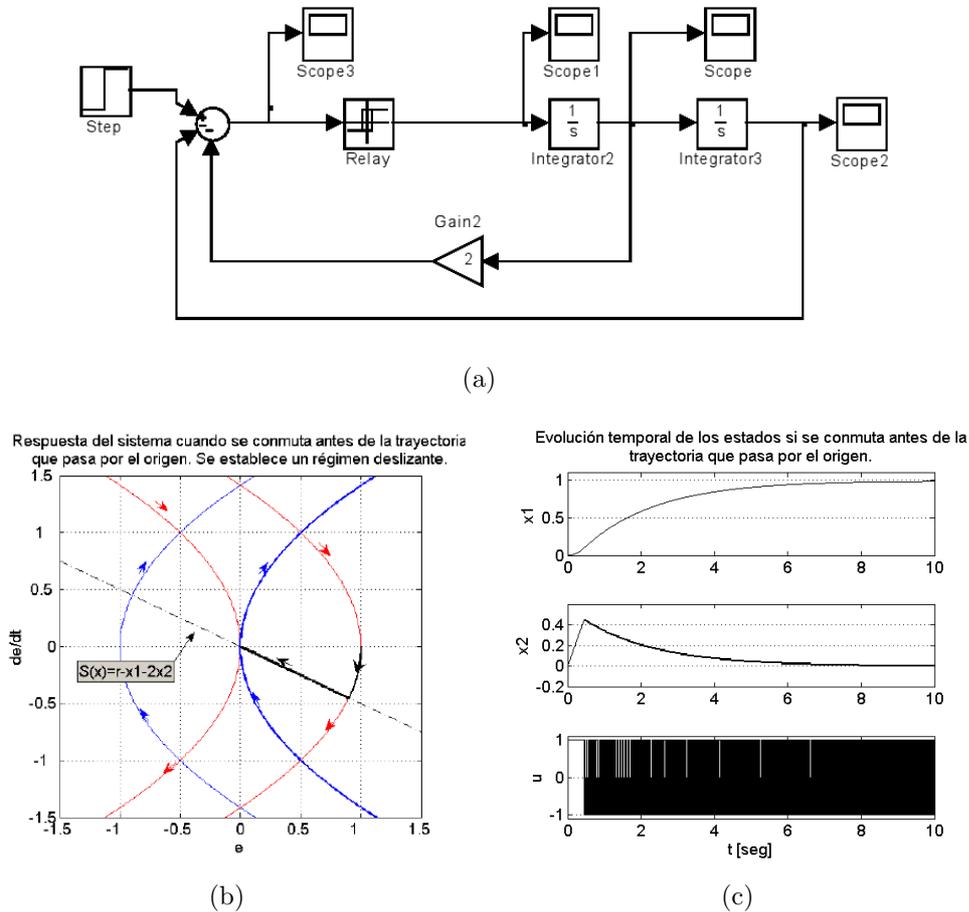


Figura 6.32: a) Lazo de control que permite establecer la superficie de conmutación  $S(x) = r - x_1 - 2x_2$ . b) Trayectoria en el plano de fase cuando se excita el sistema con un escalón  $u(t)$ . c) Evolución temporal de los estados. Observar el tiempo de establecimiento del sistema (Aproximadamente 10 seg.).

Como resultado puede verse el establecimiento de un régimen deslizante donde el sistema queda confinado a evolucionar sobre una trayectoria que verifica la siguiente ecuación

$$x_2 = -\frac{1}{2}(r - x_1) \quad (6.12)$$

Otra opción sería conmutar después de la parábola que pasa por el origen lo que genera que el sistema oscile hasta que se establezca un régimen deslizante (ver figura 6.33).

En ambos casos se determinó que una vez establecido el régimen deslizante, el sistema queda confinado a evolucionar sobre la superficie de conmutación establecida (en su forma más general) por

$$x_2 = -k.x_1 \quad (6.13)$$

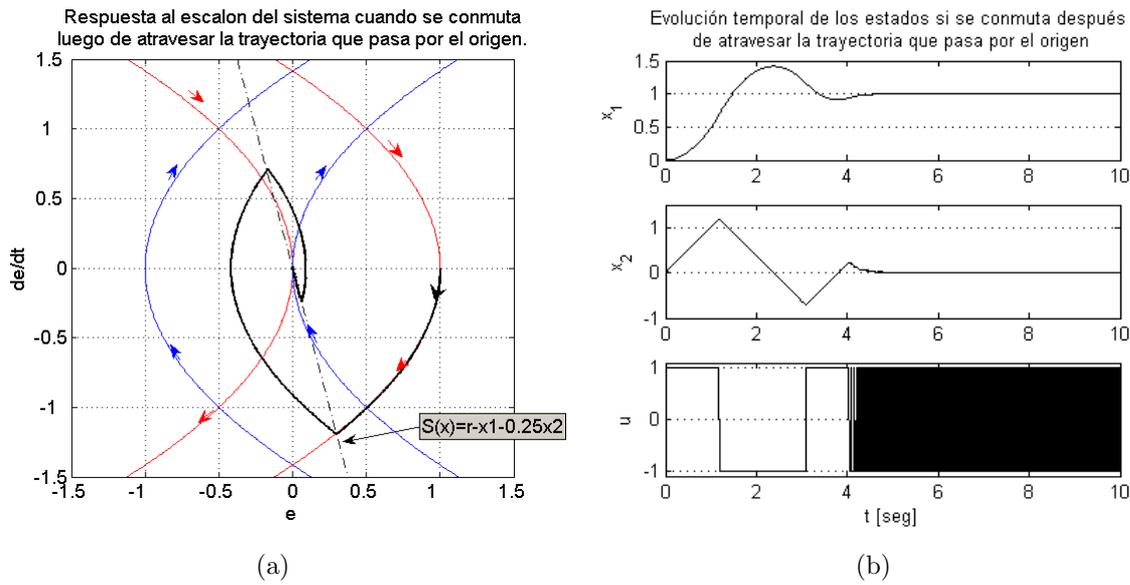


Figura 6.33: a) Trayectoria en el plano de fase cuando se excita el sistema con un escalón  $u(t)$  y se conmuta luego de la parábola que pasa por el origen. b) Evolución temporal de los estados. Observar el nuevo tiempo de establecimiento del sistema. (Aproximadamente 5 seg.).

con  $k > 0$ . Luego, dado que  $x_2 = \dot{x}_1$  se obtiene una ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{x}_1 = -k_2 \cdot x_1 \quad (6.14)$$

cuya incógnita es la evolución del estado  $x_1(t)$ .

La solución de la ecuación diferencial de primer orden (6.14) es conocida e indica la forma en que evoluciona  $x_1$ :

$$x_1(t) = x_1(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)} \quad (6.15)$$

donde  $t_0$  es el instante en el que la trayectoria alcanza la superficie de conmutación<sup>2</sup>.

De esta manera se concluye que:

- En ambos casos, una vez establecido el régimen deslizante, el sistema evoluciona como un sistema de orden 1. Esto indica que el sistema se redujo en un orden ya que el sistema original era de orden 2.

La anterior es una propiedad de los regímenes deslizantes que consisten en la reducción en un orden del sistema original.

- La dinámica del sistema (ubicación del polo de lazo cerrado) está determinada por el valor de  $k$  cuyo valor se corresponde con la pendiente de la superficie de conmutación y no con la ubicación de los polos propios del sistema. Esto implica que el sistema

<sup>2</sup>Un resultado análogo se tiene si el análisis se realiza en el plano  $e \perp \dot{e}$  donde se tiene que la evolución del error está dada por  $e(t) = e(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$  que corresponde a la evolución del error en un sistema de primer orden.

*deja de evolucionar de acuerdo a su propia dinámica para hacerlo por la dinámica impuesta por la superficie de conmutación.*

Esta propiedad es de bastante interés ya que la dinámica del sistema no depende de los parámetros del mismo lo que aporta robustez al sistema de control ante cambios en los parámetros que lo caracterizan.

- *También se desprende del análisis que el modo deslizante se da bajo determinadas condiciones las cuales sí dependen del sistema (o en su defecto, del modelo del sistema con que se cuente).*
- *Este tipo de controles no son de tiempo mínimo. Si se comparan las respuestas obtenidas, el régimen deslizante es el que muestra mayor tiempo de establecimiento.*

Los resultados anteriores se verán con más detalle acompañados de fundamentos teóricos en las secciones siguientes.

## **6.7 Control por Modo Deslizante. Fundamentos Teóricos.**

En las secciones anteriores se mostraron algunos ejemplos donde aparecía la condición de régimen deslizante haciendo hincapié en que dicha condición era una consecuencia del control mediante estructuras variables. A partir de análisis de los resultados obtenidos en los ejemplos 6.2 y 6.3 se pudo establecer algunas propiedades y ventajas de controlar un sistema mediante el modo deslizante.

En las secciones que siguen se estudiarán dichas propiedades con los fundamentos matemáticos necesarios. De esta manera se busca establecer el procedimiento a seguir en el diseño de un lazo de control por modo deslizante.

### **6.7.1 Modos Deslizantes. Definiciones.**

En sistemas con controles discontinuos, como por ejemplo los sistemas de los ejemplos 6.2 y 6.3, quedó demostrado que eligiendo la conmutación correcta es posible establecer regímenes deslizantes. Una vez establecido el régimen deslizante, la acción de control  $u$  que ingresa al sistema conmuta a alta frecuencia (teóricamente infinita) lo que da lugar a un régimen deslizante.

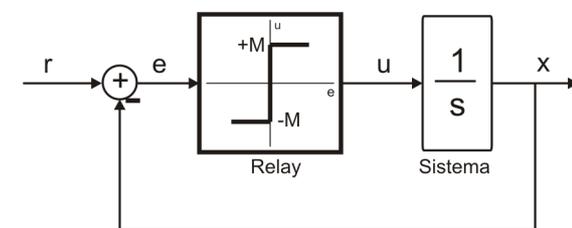
En la práctica, los modos deslizantes se utilizan en sistemas de orden alto no lineales y con incertidumbres en la planta (o lo que es lo mismo, incertidumbre en los parámetros que caracterizan el modelo del sistema a controlar). Si a esto se le suman las propiedades de sencilla implementación y robustez, lo transforma en una buena opción para aplicar en el control del posicionador de antenas del sistema de medida. Esto se debe a que los parámetros del modelo propuesto son desconocidos (o no se conocen con un grado de exactitud aceptable) y además es posible que varíen durante la operación de sistema, por ejemplo, si la carga del posicionador cambia dependiendo del tamaño de las antenas a utilizar.

Los modos deslizantes son fenómenos que pueden aparecer en sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones diferenciales ordinarias cuya forma general está dada por

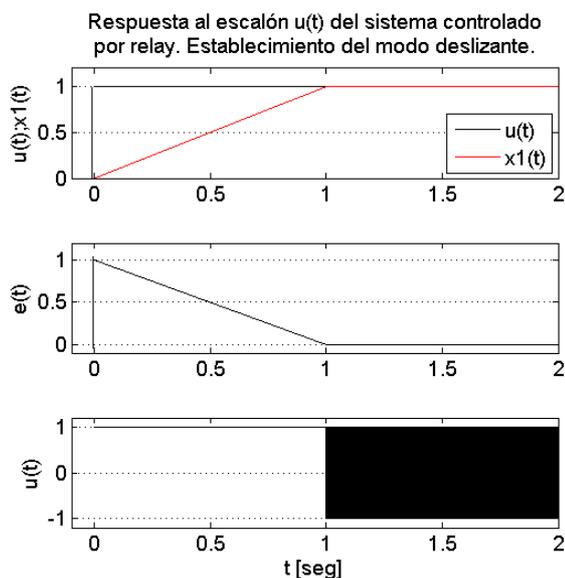
$$\dot{x} = f(x, u) \tag{6.16}$$

con la particularidad que el término izquierdo de dicha ecuación es discontinuo. Los modos deslizantes tienen su origen en el estudio de sistemas cuyo control se realiza con un relay como el de la figura 6.29 ya que los primeros experimentos surgieron de establecer controles del tipo “on-off”. A diferencia de un control “on-off”, el control se realiza dependiendo del estado del sistema, o lo que es lo mismo, del valor que tome el vector de estados  $x = [x_1; x_2 \dots; x_n]$  en un determinado instante. Como consecuencia de esto, el control conmuta a alta frecuencia. A este tipo de comportamiento se lo denomina *Modo Deslizante*.

Considérese el caso sencillo de un integrador controlado por un relay, como el de la figura 6.34(a).



(a)



(b)

Figura 6.34: Establecimiento de un modo deslizante en un integrador .a) Lazo de control. b) Evolución temporal de las variables presentes en el lazo. Observar como conmuta la señal  $u(t)$  a partir de  $t=1$  seg.

Dado que la entrada al sistema es discontinua, la ecuación (6.16) se escribe como

$$\dot{x} = f(x) + u \tag{6.17}$$

siendo  $f(x)$  una función acotada que verifica la condición  $|f(x)| < f_0 = cte$ . La señal de error de tracking está dada por  $e(t) = r(t) - x_1(t)$  y la señal de entrada al sistema estará dada por:

$$u = \begin{cases} +M & \text{si } e > 0 \\ -M & \text{si } e < 0 \end{cases} \equiv u = M \operatorname{sgn}(e) \quad (6.18)$$

donde se verifica que el signo de  $e$  y de su derivada  $\dot{e} = de/dt = \dot{r} - \dot{x} = \dot{r} - (f(x) + u)$  con  $u$  definida en la ecuación (6.18). Puede escribirse entonces el valor instantáneo de la derivada del error como

$$\dot{e} = \dot{r} - f(x) - M \operatorname{sgn}(e) \quad (6.19)$$

De manera que  $e$  y  $\dot{e}$  tienen signos diferentes si  $M > f_0 + |\dot{r}|$  lo que significa que si para una determinada condición el error es mayor que cero, su derivada tiene el signo contrario lo obliga al error a decaer a medida que transcurre el tiempo. Luego de un intervalo de tiempo finito  $T$  el error debe anularse así como su derivada. Si se observa el modelo de relay de la figura 6.34(a), la condición de error nulo hace que la entrada al relay esté sobre o próxima al punto de la discontinuidad de forma que cualquier apartamiento infinitesimal genera una salida de valor  $+M$  o  $-M$ . La evolución para  $t > T$  donde se cumple  $e = \dot{e} = 0$  se conoce como *modo deslizante*.

En la figura 6.34(b) se observa la respuesta del sistema 6.34(a) con  $M = 1$  a un escalón aplicado en  $t_0 = 0$ . El error decae a medida que la salida se aproxima a su valor final. Una vez que el error se anula permanece en dicha condición y la entrada  $u$  comienza a conmutar a alta frecuencia entre  $+M$  y  $-M$  por lo que para  $t > T = 1$  se tiene un régimen deslizante.

Este ejemplo es ilustrativo para mostrar como analizando los signos del error y su derivada se puede asegurar la existencia del régimen deslizante. Consideraciones como las de este tipo donde se analizan una variable y su derivada son las que se usan para asegurar la existencia del modo deslizante y la permanencia en el mismo.

Retomando el ejemplo del doble integrador, si ahora se supone una superficie general  $S(x) = r - x_1 - kx_2 = 0$  pero que por imperfecciones en el relay (cosa que puede pasar en la realidad) existe un retardo  $\tau$  en la conmutación entonces el sistema conmutará en las superficies  $S'(x)$  y  $S''(x)$  como se observa en la figura 6.35(a) donde puede observarse que luego de cada conmutación el sistema evoluciona por una trayectoria con sentido opuesto.

El fenómeno descrito se denomina **“chattering”**.

Si supone que  $\tau \rightarrow 0$  entonces la superficie de conmutación es ahora  $S(x) = 0$  donde se verifica que

- Las trayectorias están orientadas hacia dicha superficie.
- El sentido de las trayectorias es opuesto a cada lado de la superficie de conmutación.

Si se observa la figura 6.35(b) existen otros puntos de interés.

- Toda trayectoria que alcance la superficie  $S(x) = 0$  dentro del intervalo  $(A, B)$  en el instante  $T$  dará lugar a un régimen deslizante ya que los estados del sistema estarán confinados a evolucionar sobre la superficie de conmutación para todo instante  $t >$

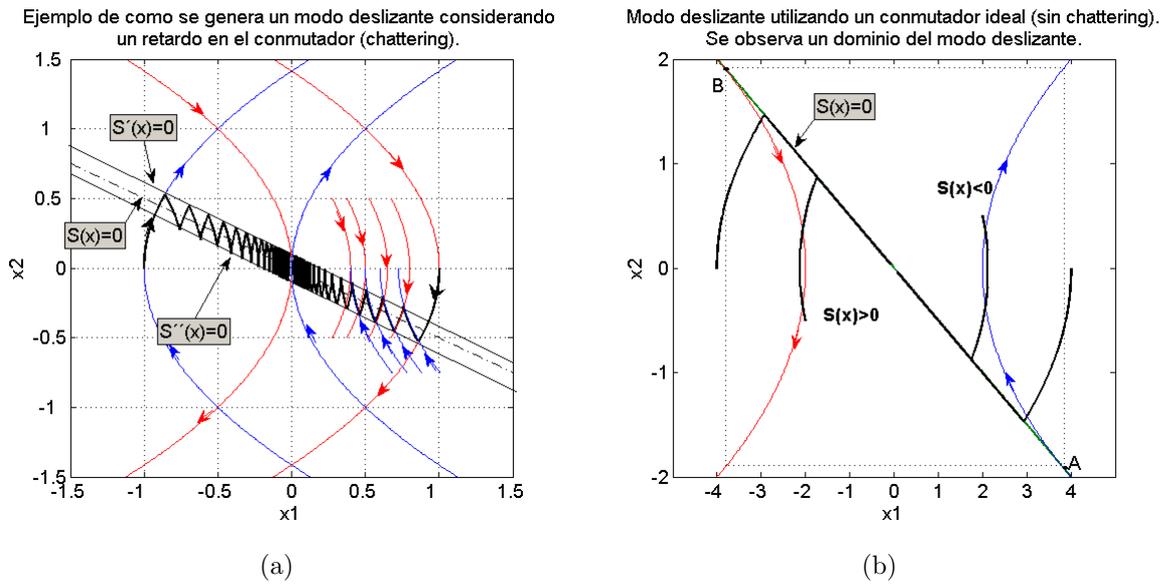


Figura 6.35: a) Chattering cuando el conmutador introduce un retardo. b) Modo deslizante cuando el retardo tiende a cero (modo deslizante ideal).

$T$  (observar que dentro de este intervalo TODAS las trayectorias tienen sentidos opuestos a ambos lados de  $S(x) = 0$ ).

- La trayectoria descrita por los estados del sistema coinciden con la superficie de conmutación  $S(x) = 0$ . Este tipo de movimiento es también un *modo deslizante*.
- La trayectoria debe impactar o hacer un “hit” en la superficie de deslizamiento en un punto dentro del segmento A-B donde se asegure que el sentido de las trayectorias se opone a ambos lados de la curva. Esta condición define un *dominio de modo deslizante*.

En la siguiente sección se analizarán las condiciones que debe cumplir un sistema para presentar un modo deslizante.

### 6.7.2 Modos Deslizantes. Condiciones de existencia.

Para interpretar lo que verdaderamente analizan las condiciones que permiten determinar si un sistema alcanzará un régimen deslizante para una superficie de conmutación  $S(x)$  propuesta se continuará utilizando como ejemplo el doble integrador.

En el ejemplo de la sección 6.5 se mostró el comportamiento del sistema en el plano  $(x_1, x_2)$  (o lo que es lo mismo  $(x_1, dx_1/dt)$ ) donde, para la lograr que el sistema no oscile y por lo tanto pueda alcanzar el punto de equilibrio, se optó por “inclinarse” la superficie de conmutación original  $x_1 = 0$  y hacer que el sistema conmute cuando  $x_2 = -(1/2)x_1$  o lo que es lo mismo cuando se cumple que

$$S(x) = r - x_1 - 2x_2 = 0 \quad (6.20)$$

De esta forma, la acción de control  $u$  que es la salida del relay y que matemáticamente puede expresarse como

$$u = M \operatorname{sgn}(s(x)) \quad (6.21)$$

experimenta una discontinuidad cuando la trayectoria atraviesa  $S(x) = 0$  quedando el espacio de estados dividido en dos semiplanos:

1. El semiplano superior que corresponde a  $S(x) < 0$  donde toma el valor  $u_{min} = -M$  y el sistema evoluciona sobre parábolas cóncavas hacia la izquierda que se dirigen hacia  $S(x) = 0$ .
2. El semiplano inferior que corresponde a  $S(x) < 0$  y donde  $u = u_{max} = +M$  de forma que el sistema evoluciona sobre trayectorias cóncavas hacia la derecha que también evolucionan hacia  $S(x) = 0$ .

Por lo tanto, bajo estas condiciones puede asegurarse que para cualquier condición inicial, el sistema evolucionará mediante alguna trayectoria con un único objetivo: establecer un modo deslizante sobre  $S(x) = 0$ .

En el caso general de un sistema de una entrada como los vistos hasta ahora, el espacio de estados queda dividido en dos zonas:  $S(x) > 0$  y  $S(x) < 0$  lo que determinará que la ecuación de estados del sistema general dada por:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.22)$$

tome los siguientes estados (para un sistema lineal):

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} f^+(x, u) = Ax + Bu^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ f^-(x, u) = Ax + Bu^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

que deberán garantizar que la trayectoria de estados tienda a  $S(x) = 0$ . Como es evidente, la función  $S(x)$  depende del vector de estados del sistema por lo que su valor instantáneo irá cambiando a medida que los estados evolucionan sobre una trayectoria. Por lo tanto, puede analizarse la evolución de  $S(x)$  para ver si el sistema se dirige o no a la superficie de conmutación. Esto se realiza analizando el valor de  $S(x)$  y su derivada cuya expresión está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dS(x)}{dt} &= \frac{dS}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dS}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dS}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{dS}{dx_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{dS}{dx_2} \cdot \dot{x}_2 + \dots + \frac{dS}{dx_n} \cdot \dot{x}_n \end{aligned} \quad (6.24)$$

que puede expresarse como un producto vectorial:

$$\frac{dS(x)}{dt} = \left[ \frac{dS}{dx_1} \quad \frac{dS}{dx_2} \quad \dots \quad \frac{dS}{dx_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \langle \nabla S \cdot \dot{x} \rangle \quad (6.25)$$

y como son los estados del sistema dados por  $\dot{x} = f(x, u)$  la ecuación (6.25) puede escribirse como:

$$\dot{S}(x) = \langle \nabla S \cdot f \rangle \quad (6.26)$$

de donde, al igual que con la ecuación (6.23), se tienen dos casos posibles:

$$\begin{aligned} \text{si } S(x) > 0 &\Rightarrow \dot{S}(x) = \langle \nabla S \cdot f^+ \rangle \\ \text{si } S(x) < 0 &\Rightarrow \dot{S}(x) = \langle \nabla S \cdot f^- \rangle \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ahora, se pretende que los estados evolucionen hacia  $S(x) = 0$  y una vez que alcancen dicha superficie permanezcan en ella. Por lo tanto, cuando  $S(x) > 0$  a esta función no debe quedarle otra opción más que decrecer conforme varía  $x$  o lo que es lo mismo, que  $\dot{S}(x)$  sea decreciente.

Si se aplica el mismo razonamiento para el caso opuesto, entonces la condición que debe cumplirse para que se establezca un modo deslizante será:

$$\begin{array}{l} \text{si } S(x) > 0 \Rightarrow \dot{S}(x) = \langle \nabla S \cdot f^+ \rangle < 0 \\ \text{si } S(x) < 0 \Rightarrow \dot{S}(x) = \langle \nabla S \cdot f^- \rangle > 0 \end{array} \quad (6.28)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{S \rightarrow 0} (S \cdot \dot{S}) < 0 \quad (6.29)$$

Cuando el sistema evoluciona bajo esta condición se dice que se encuentra en el *Modo de Alcance*.

Debe tenerse en cuenta que si bien esta condición asegura que el sistema evolucione hacia  $S(x) = 0$ , no implica que la dinámica del sistema evolucionando mediante un régimen deslizante sea estable. La estabilidad se analizará más adelante.

También debe tenerse en cuenta que  $S(x)$  puede ser una recta como en los casos vistos, un plano o un hiperplano dependiendo del orden del sistema. En el modelo propuesto para el posicionador de antena se tiene un sistema de orden 3 por lo que es de esperar que la superficie de conmutación a elegir sea un plano.

### 6.7.3 Modo de alcance. Importancia de la acción de control $u$ . Interpretación geométrica de la condición de existencia. Ejemplos.

En la sección anterior se establecieron las condiciones para dar asegurar la existencia de un régimen deslizante.

En esta sección se mostrará mediante ejemplos en qué consiste el modo de alcance del sistema y su relación con la acción de control  $u$  que será uno los parámetros de diseño del lazo de control ya que en el caso del posicionador de antena, se trata de la tensión de alimentación de los motores DC.

Otro aspecto de interesante consiste en determinar el dominio de modo deslizante.

Siguiendo con el modelo del doble integrador, suponer que se tiene el sistema de la figura 6.36 donde se supone  $M = 1$  y para el cual la superficie de conmutación está dada por:

$$S(x) = r - x_1 - x_2 = 0 \quad (6.30)$$

donde además por simplicidad puede suponerse que  $r = 0$  por lo que la evolución del sistema dependerá de sus condiciones iniciales.

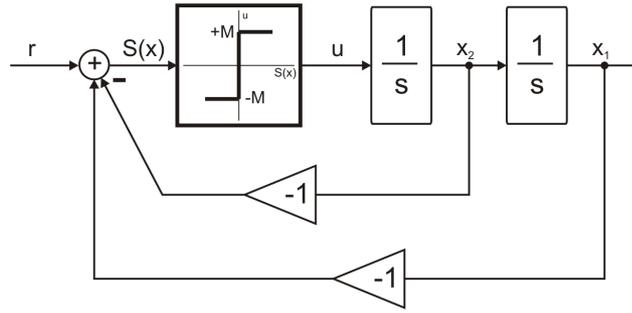


Figura 6.36: Doble integrador controlado con un controlador no lineal.

A partir del modelo de estados del doble integrador a lazo abierto

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.31)$$

y de la condición (6.23), se obtiene la evolución de los estados dependiendo de la salida del relay.

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} f^+(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ +M \end{bmatrix} & \text{si } S(x) > 0 \\ f^-(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \end{bmatrix} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

El análisis consiste en ver que sucede a ambos lados de la curva, es decir, considerar el entorno de un punto y suponer que se encuentra en  $S^+$  y en  $S^-$ .

En primer lugar se analizará el gradiente de  $S(x)$ . De la ecuación (6.30) y considerando  $r = 0$  se tiene que

$$S(x) = -x_1 - x_2 \Rightarrow \nabla S = [ -1 \quad -1 ] \quad (6.33)$$

cuya representación en el plano se observa en la figura 6.37(a) y que está indicando cuan rápido crece la curva  $S$ .

Entonces, si se considera el entorno de un punto sobre  $S(x)$  en el semiplano superior donde se verifica que  $S(x) > 0$ , la condición que debe cumplirse para que el sistema evolucione hacia la superficie de deslizamiento (suponer que el sistema esta evolucionando sobre una trayectoria y está a punto de impactar a la recta de conmutación) está dada por:

- $S(x) > 0 \rightarrow \dot{S}(x) < 0$ . Por lo tanto, al estar en la zona de  $f^+$  se tiene que

$$\langle \nabla S \cdot f^+ \rangle = [ -1 \quad -1 ] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ +M \end{bmatrix} = -x_2 - M < 0. \quad (6.34)$$

Y en el caso de encontrarse en el entorno del mismo punto, pero en el semiplano inferior, la condición de existencia será ahora

- $S(x) < 0 \rightarrow \dot{S}(x) > 0$ . Por lo tanto, al estar en la zona de  $f^-$  se tiene que

$$\langle \nabla S \cdot f^- \rangle = [ -1 \quad -1 ] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \end{bmatrix} = -x_2 + M > 0. \quad (6.35)$$

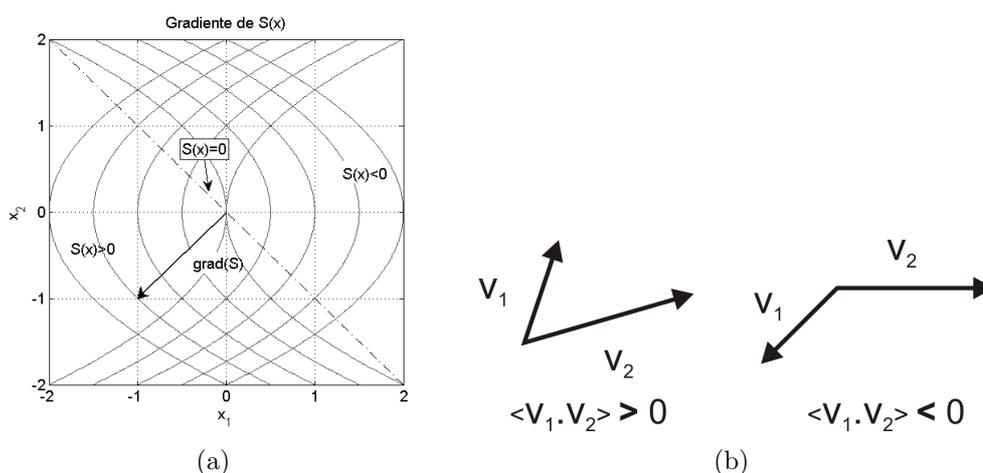


Figura 6.37: a) Dirección del gradiente de  $S(x)$ . b) Signo del producto escalar de dos vectores dependiendo de la ubicación relativa de los mismos.

Condiciones que dejan en evidencia dos aspectos muy importantes sobre la existencia o no de un modo deslizante:

- *Depende del punto en el que la trayectoria impacte a la superficie de deslizamiento (en el ejemplo queda denotado por la variable  $x_2$ ).*
- *Depende también de la acción de control disponible  $u$  (o lo que es lo mismo, el valor que tome  $M$ ).*

Ambas condiciones tienen absoluto sentido con solo observar las trayectorias de la figura (6.35(b)). Si se considera un ejemplo real se puede suponer un control de posición como el posicionador de antena. En la primera etapa del movimiento el sistema se mueve a una determinada velocidad evolucionando hacia la posición final establecida por la referencia. Cuando la trayectoria que describe el movimiento impacta a la superficie de deslizamiento, se pretende que el sistema evolucione en sentido contrario (ya que se invierte el signo de  $u$ ) pero no para invertir el sentido de giro, sino para condicionarlo a evolucionar sobre  $S(x) = 0$  condición que se revierte inmediatamente cuando el sistema atraviesa de nuevo a la superficie.

Lo anterior se repite sucesivamente hasta alcanzar la posición final.

Como puede verse el controlador aplica “fuerza bruta” para condicionar el movimiento del sistema y esto dependerá de si el controlador (o la etapa de potencia que se utilice) es lo suficientemente poderosa o no. Esto quedará determinado por el valor que tome  $u_{min}$  y  $u_{max}$ , es decir la acción de control disponible.

La condición de alcance puede interpretarse geoméricamente. Como se sabe, el producto escalar de dos vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  está dado por

$$\langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \theta \quad (6.36)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los dos vectores. Por lo tanto, el signo del producto escalar, que es lo que interesa en este caso, depende si hay proyección de un vector sobre otro.

En la figura 6.37(b) se muestran los dos casos posibles. A continuación se verán algunos ejemplos y se mostrará como influye la dirección relativa entre el vector gradiente y el vector  $\dot{x}$ .

#### Ejemplo 6.4

Considerar el entorno del punto del punto  $x_0 = [1/2; -1/2]$ . Si se considera un infinitésimo por encima de la superficie se tiene que:

- $S(x) < 0$
- $f^- = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Entonces

$$\langle \nabla S \cdot f^- \rangle = [ -1 \quad -1 ] \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1/2 + 1 > 0 \quad (6.37)$$

o lo que es lo mismo,  $\dot{S}(x) > 0$ .

Si se considera ahora el entorno por debajo de la superficie de conmutación entonces:

- $S(x) > 0$
- $f^- = \begin{bmatrix} x_2 \\ +M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ +1 \end{bmatrix}$

Entonces

$$\langle \nabla S \cdot f^- \rangle = [ -1 \quad -1 ] \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ +1 \end{bmatrix} = 1/2 - 1 < 0 \quad (6.38)$$

o sea  $\dot{S}(x) < 0$ .

De manera que para existirá un régimen deslizante para cualquier trayectoria que impacte a la superficie de conmutación en dicho punto.

En la figura 6.38 puede verse la dirección de cada vector para cada caso considerado.

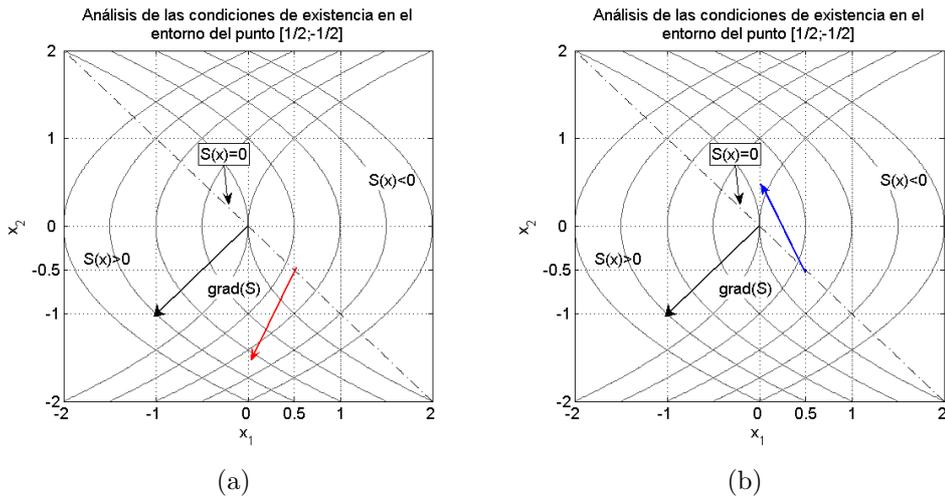


Figura 6.38: Dirección del gradiente de  $S(x)$  para un punto en el plano a)  $S(x) < 0$  y b)  $S(x) > 0$  alrededor del punto  $(1/2, -1/2)$ .

### Ejemplo 6.5

Si se toma ahora el entorno del punto del punto  $x_0 = [1; -1]$  y se considera un infinitésimo por encima de la superficie se tiene que:

- $S(x) < 0$ . Ídem caso anterior.
- $f^- = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Y

$$\langle \nabla S \cdot f^- \rangle = [ -1 \quad -1 ] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 + 1 > 0 \quad (6.39)$$

Entonces se tiene que  $\dot{S}(x) > 0$ .

Si se considera ahora el entorno por debajo de la superficie de conmutación entonces:

- $S(x) > 0$
- $f^- = \begin{bmatrix} x_2 \\ +M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$

Por lo que

$$\langle \nabla S \cdot f^- \rangle = [ -1 \quad -1 ] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad (6.40)$$

En este caso, la condición de existencia se cumple solamente a uno de los lados de la superficie de conmutación de manera que no se establecerá un régimen deslizante para ninguna trayectoria que impacte a la superficie de conmutación en dicho punto.

En la figura 6.39 puede verse la dirección de cada vector para cada caso considerado.

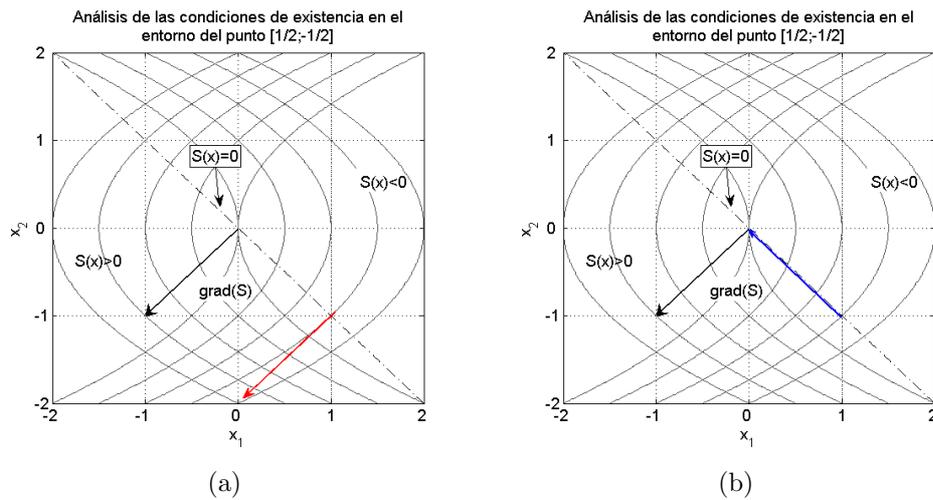


Figura 6.39: Dirección del gradiente de  $S(x)$  para un punto en el plano a)  $S(x) < 0$  y b)  $S(x) > 0$  alrededor del punto  $(1, -1)$

En este ejemplo, el punto anterior define el dominio del modo deslizante. Si se consideran puntos más alejados del origen, no existirá modo deslizante y puede haber oscilaciones como la que se muestra en la figura 6.40 donde el sistema oscilará hasta que algún punto de la trayectoria verifique la condición de existencia.

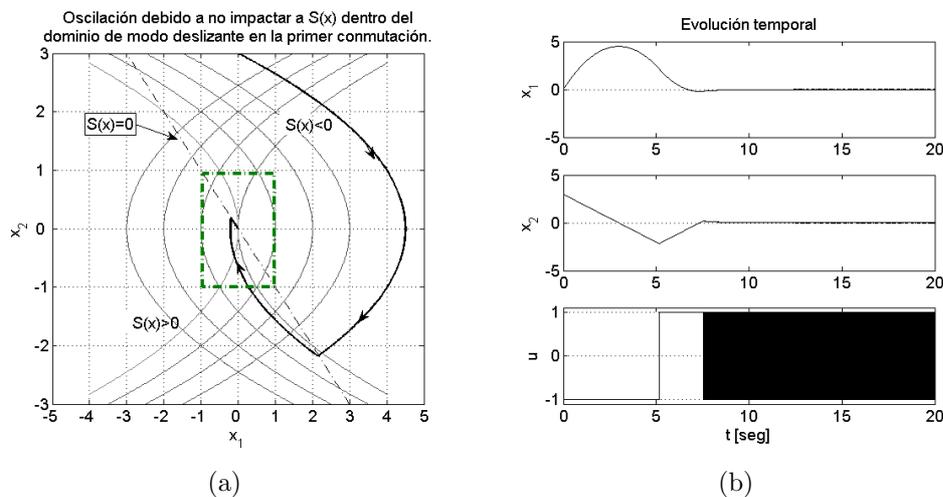


Figura 6.40: a) Oscilación debido a no cumplir las condiciones de existencia para el modo deslizante en el primer cruce por  $S(x) = 0$ . b) Evolución temporal de los estados. Se verifica la oscilación.

En el caso del posicionador de antena, el diseño de lazo de control debe evitar oscilaciones como la de la figura 6.40 por lo tanto deberá tener en cuenta en el diseño:

- *La superficie de conmutación a implementar.*
- *La acción de control disponible para garantizar la existencia del modo deslizante sin oscilaciones.*

### 6.7.4 Modos Deslizantes. Justificación de por qué se utiliza el Modelo de Estados.

Una vez que el modo deslizante comienza, la trayectoria de un sistema de orden  $n$  se encuentra sobre la superficie de conmutación

$$s(x) = r - \sum_{i=1}^n k_i x_i = 0. \quad (6.41)$$

Si se supone por comodidad  $r = 0$ ,  $k_n \neq 0$  y que los estados son los estados del modelo canónico controlable por lo que se verifica que  $\dot{x}_i = x_{i+1}$ , de la ecuación (6.41) puede despejarse  $x_n$  cuya expresión estará dada por:

$$x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \quad (6.42)$$

Y puede sustituirse en la  $(n - 1)$ -ésima ecuación de estados obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \end{aligned} \quad (6.43)$$

Escribiendo la expresión anterior en función de  $x_1$  que es la variable que se quiere controlar (y que por lo tanto si o si debe realimentarse) se tiene que la siguiente ecuación de movimiento:

$$x_1^{(n-1)} + c_{n-1} x_1^{(n-2)} + \dots + c_1 x_1 = 0 \quad (6.44)$$

De forma que una vez producido el modo deslizante, la ecuación diferencial que caracteriza al movimiento del sistema es de orden  $(n - 1)$  verificando la reducción de un orden y cuyos coeficientes no dependen de los parámetros del sistema, sino de las ganancias  $k_i$  que realimentan a cada uno de los estados.

El problema de esta tipo de implementación es que en la mayoría de los sistemas de control se realimenta solamente la variable a controlar que coincide con la salida del sistema (en el ejemplo sería  $x_1$ ). Ahora, si se observa la ecuación (6.43) que muestra como están relacionadas las variables  $x_i$  de las cuales depende la expresión de  $S(x)$  puede verse que la implementación de un sistema de estructura variable que de lugar a un modo deslizante donde solamente se está realimentando el estado  $x_1$  implica la necesidad de implementar derivadores en el lazo de control lo cual es muy complicado en la vida real.

Si en cambio es posible medir cada uno de los estados de manera de poder implementar múltiples de lazos de realimentación es posible obtener un vector de estados  $x$  que permita determinar el valor instantáneo de  $S(x)$  por lo que **la opción más directa para el diseño e implementación del controlador es utilizar el modelo de estados** y no la función transferencia del sistema.

Si bien al principio de esta sección se supuso que los estados eran los estados del modelo canónico controlable, existen herramientas que permitirán implementar un control por modo deslizante en sistemas cuyos estados no son los canónicos como lo es el caso

del posicionador de antena. Dichas técnicas de diseño serán estudiadas en las secciones siguientes.

## 6.8 Control de Sistemas Lineales por Modo Deslizante. Análisis y Diseño de Lazos de Control.

Por lo visto hasta aquí, el tipo de sistema de estructura variable más sencillo a implementar debido al lazo de control propuesto para el control del posicionador de antena es del tipo con *cambio en la excitación* lo cual implica que el bloque conmutador actúa de forma directa en la señal de entrada al sistema  $u$ .

Por lo tanto, a modo de especificación de diseño se establece que:

1. Para el control del posicionador de antena se implementará un sistema de estructura variable ***cambio en la excitación***.

Si además se supone que el sistema a controlar es lineal o funcionará dentro del rango lineal (ya que en la práctica los sistemas lineales puros no existen) es de esperar que el sistema de control tenga la estructura que se muestra en la figura 6.41.

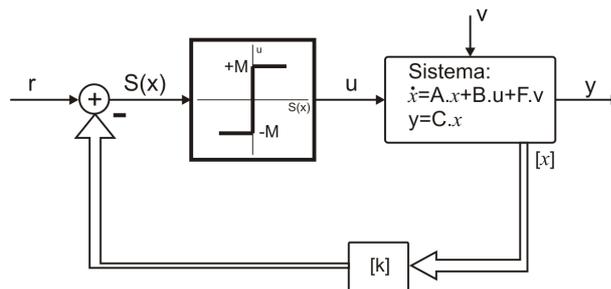


Figura 6.41: Estructura propuesta para el control del posicionador

Donde el sistema posee las características de ser un sistema pasabajos del cual se tiene su modelo de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u + F \cdot v \\ y &= C \cdot x \end{aligned} \quad (6.45)$$

en el cual  $v$  es una perturbación externa que puede modificar a cualquiera de los parámetros del modelo (por ejemplo, el momento de inercia  $J_{eq}$  visto por el motor DC),  $u$  es la acción de control que ingresa al sistema y cuyo valor depende del valor  $S(x)$  dada por:

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ u^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

siendo

$$S(x) = r - k \cdot x = 0 \quad (6.47)$$

donde  $k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$  es el vector fila de realimentación de dimensión  $1 \times n$  donde el valor de cada una de las ganancias  $k_i$  determinará la superficie de conmutación.

En ésta sección se analizarán las condiciones de alcance vistas en la sección 6.7.2 aplicadas a los sistemas lineales. Además de analizará la dinámica del sistema una vez establecido el régimen deslizante y también se verá el diseño de la dinámica de lazo cerrado mediante el método de asignación de raíces.

### 6.8.1 Condiciones de Existencia para Sistemas Lineales.

Como se vio en la sección 6.7.2, las condiciones que existencia que determinan el modo de alcance del modo deslizante pueden resumirse la siguiente ecuación:

$$\lim_{S \rightarrow 0} (S \cdot \dot{S}) < 0 \quad (6.48)$$

la cual puede descomponerse en dos ecuaciones dependiendo de que lado se encuentre de la superficie de conmutación quedando:

$$\lim_{S \rightarrow 0} (S \cdot \dot{S}) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{S \rightarrow 0^+} \dot{S} < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} \dot{S} > 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Por lo tanto, suponiendo que no hay perturbaciones sobre el sistema ( $v = 0$ ), y dada la expresión de la derivada de  $S(x)$

$$\dot{S}(x) = \dot{r} - k \cdot \dot{x} \quad (6.50)$$

se puede sustituir  $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$  de manera que la condición de existencia queda dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0^+} \dot{S} &= \lim_{S \rightarrow 0^+} (\dot{r} - k \cdot A \cdot x - k \cdot B \cdot u_{max}) < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} \dot{S} &= \lim_{S \rightarrow 0^-} (\dot{r} - k \cdot A \cdot x - k \cdot B \cdot u_{min}) > 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

que son ecuaciones de importancia ya que a partir de las mismas se obtiene una condición necesaria para obtener un régimen deslizante denominada **condición de transversalidad**.

Si se observan los dos primeros términos de la expresión entre paréntesis se concluye que ambos son iguales de manera que ninguno será capaz de cambiar el signo de  $\dot{S}(x)$ . Ahora, la única diferencia radica en el tercer término donde aparecen  $u_{max}$  y  $u_{min}$  cuyo signo es contrario y por lo tanto son capaces de cambiar el signo de  $\dot{S}(x)$ . Lo anterior puede interpretarse en el plano de fase como la capacidad del controlador de “quebrar” la trayectoria del sistema mediante la señal de control  $u$ .

Ahora, la única manera que la señal de control influya en la condición de existencia es verificando que

$$\boxed{k \cdot B \neq 0} \quad (6.52)$$

expresión que se conoce como **condición de transversalidad**<sup>3</sup> y que debe tenerse en cuenta a la hora del diseño.

<sup>3</sup>La condición de transversalidad también se obtiene a partir de los parámetros de Markov de la función transferencia entre  $S$  y  $u$ . Para más información ver [14].

Un aspecto a tener en cuenta es que por lo general se supone  $u_{max} > u_{min}$  (como en los ejemplos anteriores donde se suponía  $u_{max} = +1$  y  $u_{min} = -1$ ). En efecto, bajo esta suposición la condición de alcance deberá verificar la ecuación (6.51) que se cumplirá cuando  $k \cdot B > 0$ .

En el caso que  $k \cdot B < 0$  bastará con elegir  $u_{max} < u_{min}$  o invertir la forma en que el bloque no lineal conmuta. Lo que cabe recalcar es que si o si debe existir un bloque conmutador que permita cambiar el estado del sistema dentro en el lazo de control.

### 6.8.2 Análisis de Sistemas Lineales durante el Modo Deslizante. Método del Control Equivalente.

Cuando el sistema se encuentra evolucionando hacia la superficie  $S(x) = 0$  se dice que el sistema se encuentra en **modo de alcance** y por lo tanto debe verificar las condiciones vistas en las secciones anteriores.

Cuando el sistema se encuentra en el **modo deslizante** es evidente que las condiciones del modo de alcance se seguirán cumpliendo, pero también puede suponerse desde el punto de vista teórico que el conmutador es ideal y que conmuta a frecuencia infinita<sup>4</sup> de manera que el sistema será discontinuo para todo  $t > T$ .

Si se observa el modelo de estados de un sistema cualquiera de orden  $n$ , la evolución de los estados estará dada por la solución de un sistemas de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden la cuales tendrán solución única si satisfacen la condición de Lipschitz la cual establece que para un sistema dado por

$$\dot{x} = f(x) + u \quad (6.53)$$

debe cumplirse con respecto a  $x$  que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| < L \|x_1 - x_2\| \quad (6.54)$$

donde  $L > 0$ , de manera que esta condición asegura que la función  $f(x)$  no crece más rápido que cualquier función lineal y además debe ser continua respecto de  $u$  lo que en el caso del modo deslizante no se cumple ya que en  $S(x) = 0$  la señal  $u$  es discontinua (o sea, cerca de la discontinuidad no existen dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  que verifiquen la ecuación (6.54)).

Para evitar este inconveniente que en un principio impediría conocer el comportamiento del sistema cuando este ingresa en el régimen deslizante es que se desarrollaron nuevos métodos de análisis. En esta sección se analizará el *método del control equivalente* que permitirá encontrar una señal de control continua equivalente a la acción de control discontinua de frecuencia infinita.

Supóngase el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{aligned} \quad (6.55)$$

---

<sup>4</sup>Cuando se habla de frecuencia infinita es solo una suposición teórica para el análisis del comportamiento del sistema durante el régimen deslizante. Dado que la conmutación a frecuencia infinita es imposible en los sistemas físicos reales, se considera una frecuencia infinita como una frecuencia de conmutación mucho mayor que el ancho de banda del sistema que se quiere controlar.

con

$$u = \begin{cases} u_{max} & \text{si } S(x) > 0 \\ u_{min} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

Si el sistema alcanza la superficie  $S(x) = 0$  y comienza a conmutar a frecuencia infinita entonces el sistema (o mejor dicho, la trayectoria del sistema) permanece sobre la superficie de conmutación y no se aparta de ella.

Como consecuencia,  $S(x)$  no varía con los sucesivos valores que toma el vector de estados a medida que evoluciona el sistema de manera se establece la siguiente condición

$$\boxed{\begin{matrix} S(x) = 0 \\ \dot{S}(x) = 0 \end{matrix}} \quad (6.57)$$

conocida como **condición de invarianza** y que solamente se da cuando el sistema está operando en modo deslizante. En este caso  $\dot{S}(x) = 0$  indica que el sistema no se aparta de la superficie de conmutación.

Luego, si  $S(x)$  está dada por

$$S(x) = r - [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = r - k \cdot x = 0 \quad (6.58)$$

entonces

$$\dot{S}(x) = \dot{r} - k \cdot \dot{x} = 0. \quad (6.59)$$

Sustituyendo la expresión conocida de  $\dot{x}$  en la ecuación (6.59) es posible obtener la expresión de la acción de control equivalente ( $u_{eq}$ ) buscada.

Por lo tanto, con el sistema en modo deslizante es posible escribir

$$\dot{S}(x) = \dot{r} - k \cdot \dot{x} = \dot{r} - k \cdot (A \cdot x + B \cdot u_{eq}) = 0. \quad (6.60)$$

Despejando  $u_{eq}$  de la ecuación (6.60) se tiene que

$$\boxed{u_{eq} = (k \cdot B)^{-1} \cdot (\dot{r} - k \cdot A \cdot x)} \quad (6.61)$$

y es una acción de control continua que se encuentra bien definida si  $K \cdot B \neq 0$  que no es más que la condición de transversalidad ya que en caso contrario se requeriría una acción de control infinitamente grande para gobernar al sistema.

El control equivalente es entonces la señal de entrada al sistema evolucionando  $S(x) = 0$ .

### 6.8.3 Análisis de los Sistemas Lineales durante el Modo Deslizante. Dinámica del Régimen Deslizante Lineal.

Como se vio en la sección anterior, el control equivalente  $u_{eq}$  será la acción de control **continua** aplicada al sistema que hará que la trayectoria del mismo (o lo que es lo mismo, sus estados) evolucione sobre la superficie de conmutación.

Cuando el sistema se encuentra en el modo de alcance, se considera que el sistema evoluciona a *lazo abierto* ya que no importa el valor de  $S(x)$  sino su signo de manera que para  $S(x) > 0$  la entrada será  $u_{max}$  y para  $S(x) < 0$  será  $u_{min}$  por más que el lazo de control esté cerrado (es decir, no importa que valor tome  $S(x)$ , la señal  $u$  siempre tomará el mismo valor).

En cambio, cuando el sistema se encuentra en régimen deslizante la entrada al sistema puede considerarse como  $u_{eq}$  que depende de los estados del sistema como puede verse en la ecuación (6.61) por lo que se considera que el sistema funciona a *lazo cerrado*. La dinámica de lazo cerrado se obtiene sustituyendo la expresión del control equivalente en la ecuación de lazo abierto del sistema de orden  $n$  dada por

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (6.62)$$

con  $u = u_{eq} = (k \cdot B)^{-1} \cdot (\dot{r} - k \cdot A \cdot x)$ .

De esta manera se tiene que la ecuación de lazo cerrado del sistema esta dada por:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u_{eq} \quad (6.63)$$

Agrupando términos en la ecuación (6.63) se tiene que la evolución de los estados en modo deslizante tendrá la siguiente expresión:

$$\dot{x} = (I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k) \cdot A \cdot x + B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot \dot{r} \quad (6.64)$$

Donde

- $A_{LC} = (I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k) \cdot A$  es equivalente a la matriz  $A$  del modelo de estados por lo que contiene toda la información respecto a la dinámica del sistema cuando se encuentra en régimen deslizante.
- $B_r = B \cdot (k \cdot B)^{-1}$  es análoga a la matriz  $B$ .

La ecuación obtenida no solo es importante para conocer como se comporta el sistema cuando ingresa en el modo deslizante sino que también es la ecuación que se utilizará para el diseño del lazo de control. Antes de seguir es necesario recalcar ciertos puntos:

- Las ecuaciones obtenidas son solo válidas cuando el sistema se encuentra en régimen deslizante.
- Si se observa la expresión de la matriz  $A_{LC}$  el producto  $(k \cdot B)^{-1}$  es un escalar,  $I$  es la matriz identidad de orden  $n \times n$ ,  $B$  es una matriz de  $n \times 1$  (para el caso de un sistema con una única entrada),  $k$  es un vector de orden  $1 \times n$  y  $A$  es la matriz de orden  $n \times n$  del modelo del sistema a lazo abierto. Como consecuencia,  $A_{LC}$  es una matriz de orden  $n \times n$  lo cual contradice la reducción de un orden del sistema como se planteó en las secciones anteriores. La razón es sencilla:  $A_{LC}$  es una matriz no mínima ya que solo  $n - 1$  de sus filas son linealmente independientes por lo tanto, cuando se analicen los autovalores del sistema, aparecerá un polo en origen que en la realidad no existe. De esta manera se verifica desde un enfoque más teórico que ***el sistema operando en modo deslizante es de orden  $n - 1$ .***

### 6.8.4 Análisis de Sistemas Lineales durante el Modo Deslizante. Interpretación Física de la Señal de Control Equivalente

$u_{eq}$ .

La señal de control equivalente es una señal ficticia que no existe como tal en ningún punto del lazo de control y que surge como una necesidad de obtener un modelo de estados a partir del cual se puede obtener una solución única del vector de estado.

Hasta ahora, la señal de control  $u$  es una señal cuadrada que toma los valores  $u_{min}$  y  $u_{max}$  y que conmuta a alta frecuencia.

Si el sistema a controlar es un sistema pasabajos no será capaz de responder a las componentes de alta frecuencia de  $u$ . Por lo tanto, la señal de control  $u_{eq}$  puede considerarse como la señal de baja frecuencia que contiene aquellas componentes a las cuales es capaz de responder el sistema.

Por ejemplo, suponer el sistema del ejemplo 6.4. Si se observa la figura 6.42 el sistema ingresa en régimen deslizante en  $t = 1\text{seg}$  de manera que la señal  $u(t)$  comienza a conmutar a alta frecuencia por encontrarse en la proximidad de la discontinuidad del relay. Ahora, la planta es un sistema pasabajos, por lo tanto solo responderá a las componentes de baja frecuencia de  $u(t)$  y que componen la señal de control equivalente  $u_{eq}(t)$ .

A partir de esto puede concluirse que:

- Si en vez de tener un relay, se tuviera un controlador capaz de generar  $u_{eq}(t)$ , la respuesta del sistema en régimen deslizante debería ser la misma.
- El sistema operará en modo deslizante siempre y cuando  $u_{eq}$  sea lo suficientemente grande para mantener la condición  $S(x) = 0$  y  $\dot{S}(x) = 0$ .
- $u_{eq}$  solo podrá tomar valores entre  $u_{min}$  y  $u_{max}$ .

Como consecuencia del último punto puede establecerse una nueva condición de existencia determinada por  $u_{eq}$ . De la condición de invarianza se tiene que

$$\begin{aligned} S(x) &= r - k \cdot x = 0 \\ \dot{S}(x) &= \dot{r} - k \cdot A \cdot x + k \cdot B \cdot u_{eq} = 0 \end{aligned} \tag{6.65}$$

por lo que si se considera que  $u_{max} > u_{min}$ , que  $k \cdot B > 0$  lo que asegura que se cumpla la *condición de transversalidad necesaria pero no suficiente* para establecer el modo deslizante, entonces se tendrá modo deslizante si

$$\boxed{u_{min} < u_{eq} = (k \cdot B)^{-1} \cdot (\dot{r} - k \cdot A \cdot x) < u_{max}} \tag{6.66}$$

que si es una condición **necesaria y suficiente** para establecer un modo deslizante.

Entonces debe garantizarse que el sistema tenga la suficiente “fuerza” para mantener un régimen deslizante, es decir, que será capaz de impulsar las trayectorias hacia  $S(x) = 0$  y de esa forma forzar la conmutación. Esto implica que en el diseño del lazo de control la señal de control equivalente debe estar dentro del rango disponible de valores.

- *En el caso del posicionador, la señal de control equivalente necesaria para un determinado diseño no debe superar la tensión de armadura máxima disponible para alimentar los motores DC.*

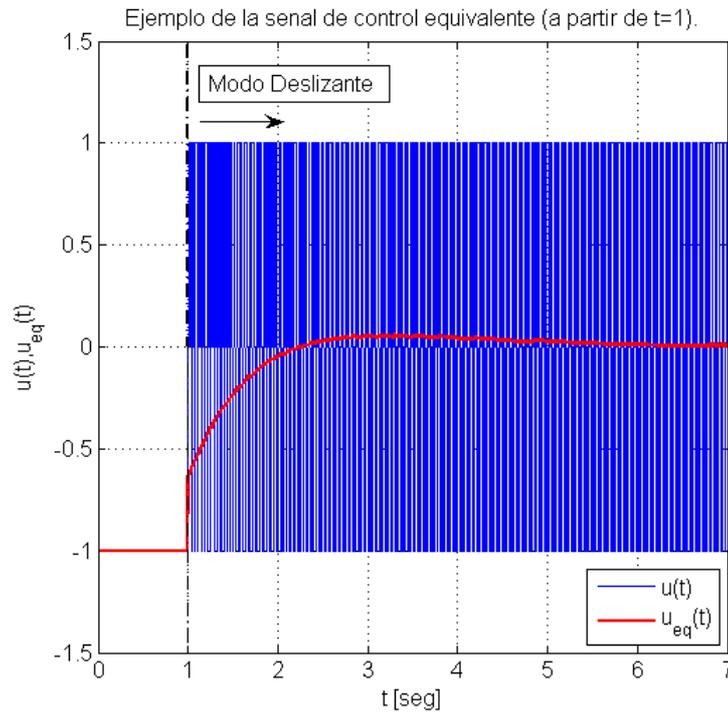


Figura 6.42: Señal de control equivalente  $u_{eq}$  (rojo) como componente de baja frecuencia de la señal  $u(t)$ .

Finalmente, un aspecto a tener en cuenta es la dependencia de  $u_{eq}$  respecto de la derivada de la referencia aplicada al sistema ( $\dot{r}$ ) ya que un cambio del tipo escalón en  $r$  haría que  $\dot{r} \rightarrow \infty$  para lo cual el sistema necesitaría una señal de control infinitamente grande para cumplir la condición de existencia impuesta por la ecuación (6.66). Si lo anterior ocurriera el sistema saldría del modo deslizante.

Para compensar este efecto es que deben implementarse filtros en la entrada que eviten cambios bruscos en la referencia.

El efecto de las perturbaciones en las condiciones de existencia se verán más adelante.

### 6.8.5 Diseño de un Control por Modo Deslizante. Método de Asignación de Raíces.

El diseño de un lazo de control por modo deslizante es análogo al método de asignación de raíces propuesto por la teoría del control moderno con la salvedad que la asignación de polos obtenida solo será válida cuando el sistema se encuentre en modo deslizante (recordar que durante el modo de alcance se supone que el sistema se encuentra a lazo abierto).

Otro aspecto a tener en cuenta es que, dado que en el modo deslizante se reduce en uno el orden del sistema,<sup>5</sup> para un sistema con  $n$  polos el diseño del sistema a lazo cerrado

<sup>5</sup>La reducción de un orden es para un sistema de una entrada/una salida (SISO). En el caso de un sistema MIMO se puede obtener la reducción en varios órdenes del sistema.

deberá tener en cuenta solo la ubicación de  $n - 1$  polos para lograr la respuesta deseada a lazo cerrado.

En primer lugar se desarrollará la teoría para diseñar un lazo de control de un sistema del cual se tiene su modelo canónico controlable. En un segundo paso, se planteará para el caso general.

### Caso 1: Sistema a Lazo Abierto en la forma Canónica Controlable.

Supóngase el sistema de orden  $n$  cuyo modelo de estados está dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (6.67)$$

cuyo polinomio característico estará dado por

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (6.68)$$

Luego, el objetivo del lazo de control será que el sistema evolucione sobre la superficie

$$S(x) = r - k \cdot x = r - [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_{n-1} \quad k_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad (6.69)$$

de manera que deberán calcularse los valores de  $k_i$  que permitan:

- Establecer el régimen deslizante.
- Cumplir con los requerimientos a lazo cerrado.

Por lo visto en la sección 6.8.3 la dinámica de lazo cerrado está determinada por la matriz:

$$A_{LC} = (I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k) \cdot A \quad (6.70)$$

cuyos autovalores son los polos deseados del sistema funcionando a lazo cerrado más un autovalor en el origen que para este caso no tiene relación con el sistema real.

Sustituyendo (6.67) y (6.69) en (6.70) se tiene que:

1.  $(k \cdot B)^{-1} = 1/k_n$ . Por lo tanto, para cumplir la condición de transversalidad el diseño de asegurar que  $k_n \neq 0$ .

$$2. I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ \hline -k_1/k_n & -k_2/k_n & \cdots & -k_{n-1}/k_n & 0 \end{array} \right]$$

Multiplicando esta última expresión por  $A$  se tiene que la matriz de lazo cerrado estará dada por:

$$A_{LC} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -k_1/k_n & -k_2/k_n & \cdots & -k_{n-2}/k_n & -k_{n-1}/k_n \end{array} \right] \quad (6.71)$$

donde se observa que:

- La primera columna de la matriz es nula, por lo tanto el rango de la matriz es  $n - 1$ . Se verifica que existe un estado redundante.
- Depende exclusivamente del valor de las ganancias  $k_i$  y no de los parámetros del sistema original, por lo tanto se dice que el sistema a lazo cerrado es robusto frente al cambio en los parámetros en la planta.
- Tiene la forma canónica controlable, por lo que su polinomio característico estará dado por:

$$\begin{aligned} P_{A_{LC}}(s) &= s^n + \frac{k_{n-1}}{k_n} s^{n-1} + \frac{k_{n-2}}{k_n} s^{n-2} + \dots + \frac{k_1}{k_n} s = 0 \\ &= s \left( s^{n-1} + \frac{k_{n-1}}{k_n} s^{n-2} + \frac{k_{n-2}}{k_n} s^{n-3} + \dots + \frac{k_1}{k_n} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

donde debe tenerse en cuenta que el polo en el origen no tiene significado físico de manera que para el diseño se utilizará el polinomio

$$P'_{A_{LC}}(s) = s^{n-1} + \frac{k_{n-1}}{k_n} s^{n-2} + \frac{k_{n-2}}{k_n} s^{n-3} + \dots + \frac{k_1}{k_n} = 0 \quad (6.73)$$

Finalmente, suponer que a lazo cerrado se busca que la dinámica del sistema esté determinada por los polos  $s_1, s_2 \dots s_{n-1}$  los cuales darán origen al polinomio que se quiere que sea el polinomio característico de la matriz  $A_{LC}$ . A este polinomio se lo denomina comúnmente “*polinomio deseado*” y estará dado por:

$$\begin{aligned} P_D(s) &= (s + s_1) \cdot (s + s_2) \dots (s + s_{n-1}) \\ &= s^{n-1} + \alpha_{n-1}(s_1, s_2 \dots s_n) s^{n-2} + \alpha_{n-2}(s_1, s_2 \dots s_n) s^{n-3} + \dots + \alpha_1(s_1, s_2 \dots s_n) = 0 \end{aligned} \quad (6.74)$$

de manera que igualando los coeficientes  $\alpha_i$  con su correspondiente del polinomio  $P'_{A_{LC}}(s)$  se pueden calcular las ganancias  $k_i$  teniendo en cuenta lo siguiente:

- Se tienen  $n - 1$  coeficientes  $\alpha_i$ .
- Deben calcularse  $n$  ganancias  $k_i$ .

Como consecuencia, **una de las ganancias puede tomar un valor arbitrario.**

**CASO 2: Sistema a Lazo Abierto no se encuentra en la forma canónica controlable.**

Éste es el caso más general donde se considera un sistema cuyo modelo de estados a lazo abierto está dado por:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (6.75)$$

el cual se quiere que deslice sobre la superficie

$$S(x) = r - k \cdot x = 0 \quad (6.76)$$

y cuyo modelo no responde a ninguna forma canónica, como por ejemplo, el modelo propuesto para el movimiento en azimut del posicionador de antena.

En primer lugar se supone que el sistema es completamente controlable lo cual es una condición necesaria para poder implementar un control por realimentación de estados.

Luego, como se vio en la sección anterior, el diseño a través del modelo canónico controlable es la forma más práctica de llevar a cabo los cálculos por lo que se puede aplicar una transformación para llevar al sistema a la forma canónica controlable. Para esto se utilizará una matriz de transformación  $T$  de  $n \times n$  que verifique:

$$Z = Tx \quad (6.77)$$

donde si:

$$T^{-1} = P \Rightarrow Pz = x \quad (6.78)$$

siendo  $x$  el vector de estados en el modelo original y  $z$  el vector de estados en el modelo canónico controlable.

El cálculo de la matriz  $T$  es conocido y puede hallarse en cualquier texto de control moderno (ver [8], [7]).

Así, el modelo de estados en la forma canónica controlable estará dado por:

$$\dot{z} = A_{cc} \cdot z + B_{cc} \cdot u \quad (6.79)$$

donde

- $A_{cc} = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .
- $B_{cc} = P^{-1} \cdot B$ .

Luego, la superficie de conmutación pasará a estar dada por:

$$S(x) = r - k_{cc} \cdot z = 0 \quad (6.80)$$

de manera que el cálculo de las ganancias será en el espacio vectorial determinado por  $z$  pero la implementación será en el espacio vectorial de  $x$  por lo que el juego de ganancias a implementar en el sistema físico **real** estará dado por:

$$\boxed{k = P \cdot k_{cc}} \quad (6.81)$$

## 6.9 Robustez del Modo Deslizante.

Uno de los principales problemas por el cual se decidió implementar un control por modo deslizante es la incertidumbre que se tiene en los parámetros del modelo del posicionador de antenas.

Si bien en la sección anterior se vio como, cuando un sistema se encuentra expresado en su modelo canónico controlable, la dinámica de lazo cerrado no depende de ninguno de los parámetros del sistema sino de las ganancias de los lazos de realimentación debe tenerse en cuenta que obtener a partir de las ecuaciones físicas de un sistema un modelo de estados que coincida con el modelo canónico controlable no es muy común.

En el caso del posicionador de antena, el modelo propuesto dista de ser el modelo canónico controlable por lo que es de esperar que el sistema no sea tan robusto ante perturbaciones como se vio hasta ahora.

Las perturbaciones pueden afectar al sistema en dos momentos del funcionamiento:

1. Durante el modo de alcance pueden favorecer o no al establecimiento del modo deslizante por lo que afectan a la condición de existencia.
2. Durante el régimen deslizante es posible que afecten a la dinámica del sistema, de manera que influyen en los parámetros de la matriz  $A_{LC}$  que, como se vio en la sección anterior, gobierna la dinámica del sistema a lazo cerrado.

Cada uno de estos casos se verá por separado en las siguientes secciones.

### 6.9.1 Efecto de las Perturbaciones sobre la Condición de Existencia.

Si se considera el sistema propuesto en la sección 6.8, se tiene que los estados estarán afectados por la perturbación  $v$ , de forma que:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + F \cdot v \quad (6.82)$$

por lo que las condiciones de existencia estarán dadas ahora por:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0^+} \dot{S} &= \lim_{S \rightarrow 0^+} (\dot{r} - k \cdot A \cdot x - k \cdot B \cdot u^+ - F \cdot v) < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} \dot{S} &= \lim_{S \rightarrow 0^+} (\dot{r} - k \cdot A \cdot x - k \cdot B \cdot u^- - F \cdot v) > 0 \end{aligned} \quad (6.83)$$

o planteándolo desde el punto de vista de la señal de control equivalente se tiene que:

$$\boxed{u_{min} < u_{eq} = (k \cdot B)^{-1} \cdot (\dot{r} - k \cdot A \cdot x - k \cdot F \cdot v) < u_{max}} \quad (6.84)$$

de manera que dependiendo del valor de que tome  $F$  (que puede ser un vector o una matriz) y del tipo de perturbación  $v$  que afecte al sistema se favorecerá o no al establecimiento del modo deslizante y será particular para cada caso.

### 6.9.2 Efecto de las perturbaciones sobre la dinámica de lazo cerrado.

Supóngase el caso en que se tiene un sistema de orden 2 cuyo modelo de estados a lazo abierto está dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{12} \end{bmatrix} u. \quad (6.85)$$

Si ahora se supone que  $r = cte \rightarrow \dot{r} = 0$  y que se quiere que el sistema evolucione sobre la superficie  $S(x) = r - k \cdot x = 0$  con  $k = [k_1 \ k_2]$  entonces la evolución de los estados a lazo cerrado estará dada por:

$$\dot{x} = \underbrace{(I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k)}_{A_{LC}} \cdot A \cdot x + \underbrace{B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot \dot{r}}_{=0} \quad (6.86)$$

y estará gobernada por la dinámica de lazo cerrado del sistema establecida por  $A_{LC}$  y que no puede alterarse modificando la referencia  $r$ .

La matriz  $A_{LC}$  estará dada por:

$$A_{LC} = (I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k) \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ (-k_1/k_2) \cdot a_{11} & (-k_1/k_2) \cdot a_{11} \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

donde la dinámica de lazo cerrado dependerá ahora de las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$  y de los parámetros  $a_{11}$  y  $a_{12}$  mientras que será independiente de los parámetros  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  y  $b_{12}$ .

En el caso del posicionador, puede verse que el modelo de estados en el Capítulo 5 propuesto tiene cierta similitud con el sistema que se muestra a continuación:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & [a_{12} \ \cdots \ a_{1(n-1)}] \\ [a_{21} \\ \vdots \\ a_{(n-1)1}] & [A_{r(n-1) \times (n-1)}] \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.88)$$

que de forma abreviada puede escribirse como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & [A_f] \\ [A_c] & [A_{r(n-1) \times (n-1)}] \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (6.89)$$

Al igual que en la sección anterior si se supone que  $r = cte \rightarrow \dot{r} = 0$  y se quiere que el sistema evolucione sobre la superficie  $S(x) = r - k \cdot x = 0$  donde ahora el vector  $k$  estará dado por:

$$k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] = [1 \ k_2/k_1 \ \dots \ k_n/k_1] \cdot k_1 \quad (6.90)$$

de manera que la matriz  $A_{LC}$  tomará la siguiente forma:

$$A_{LC} = (I - B \cdot (k \cdot B)^{-1} \cdot k) \cdot A = \begin{bmatrix} -k_r \cdot [A_c] & -k_r \cdot [A_r] \\ [A_c] & [A_r] \end{bmatrix} \quad (6.91)$$

se observa entonces que  $A_{LC}$  ahora es independiente de  $a_{11}$ ,  $[A_f]$  (o lo que es lo mismo, lo elementos de la primera fila de la matriz  $A$ ) y  $b_1$ .

En el caso contrario, si existe incertidumbre en los valores de  $[A_c]$  y  $[A_r]$ , esto podrá afectar el comportamiento del sistema a lazo cerrado ya que estos aparecerán en la dinámica de modo deslizante.

Por lo tanto, se concluye que

- *deberá prestarse especial atención a aquellos parámetros del modelo que pueda presentar incertidumbre y tratar de minimizar sus efectos en caso de ser necesario. Para esto será necesario mejorar el modelo con que se cuenta.*

## 6.10 Resumen.

Hasta aquí se mostraron los conceptos básicos del control por modo deslizante y que se creen necesarios para la implementación del control del posicionador en esta primera etapa haciendo especial hincapié en la robustez frente a perturbaciones e incertidumbre en los parámetros.

Una vez obtenido el modelo del posicionador se procederá al diseño, simulación e implementación del lazo de control. Esto se realizará en el Capítulo 11.

Las premisas de diseño que se tuvieron en el avance del proyecto se resumen a continuación:

- *El control del sistema a lazo cerrado será del tipo SEV donde el bloque conmutador se implementará en el controlador digital.*
- *Para el control del posicionador de antena se implementará un sistema de estructura variable con **cambio en la excitación**.*
- *Debe diseñarse la superficie de conmutación a implementar de acuerdo a los requerimientos del sistema.*
- *La acción de control disponible debe garantizar la existencia del modo deslizante sin oscilaciones.*

# Capítulo 7

## Identificación de Sistemas.

### 7.1 Introducción.

En el Capítulo 6 se dio una breve introducción al control de sistemas dinámicos utilizando técnicas de control por modo deslizante. Si bien fue un primer paso a modo de introducción, el objetivo final será el diseño e implementación de un controlador digital.

En el caso general, el diseño de un controlador discreto o continuo mediante las técnicas de control clásico o mediante el uso de variables de estado, requiere de un modelo de la planta a controlar. Una vez obtenido dicho modelo es posible diseñar el controlador, simularlo en computadora con herramientas de CAD y validar diseño.

En la práctica, existen dos métodos principales para obtener el modelo de un sistema (ver figura 7.1):

1. *Modelado teórico.* Es el método analítico que se basa en las leyes establecidas por las ciencias básicas para describir el comportamiento dinámico de fenómeno. A modo de ejemplo, el procedimiento seguido para obtener el modelo del Capítulo 4 corresponde a un modelado teórico.
2. *Identificación de sistemas.* Se trata de métodos experimentales que permiten obtener el modelo de un sistema a partir de datos reales obtenidos del sistema bajo estudio.

En este capítulo se dará una introducción a las técnicas de identificación de sistemas con la finalidad establecer algunos conceptos básicos y definir los pasos a seguir para resolver el siguiente problema: **obtener un modelo de estados del posicionador de antenas Scientific Atlanta.**

La descripción de los ensayos y los resultados obtenidos así como otros conceptos que sea necesario ampliar serán desarrollados en los Capítulos 9 y 10.

### 7.2 ¿Por qué surge la necesidad de aplicar técnicas de identificación de sistemas en este proyecto?

Teniendo en cuenta los dos orígenes para obtener un modelo matemático propuestos en la sección anterior es evidente que, por lo visto en el Capítulo 4, la opción 1 fue la primera que se tuvo en cuenta.

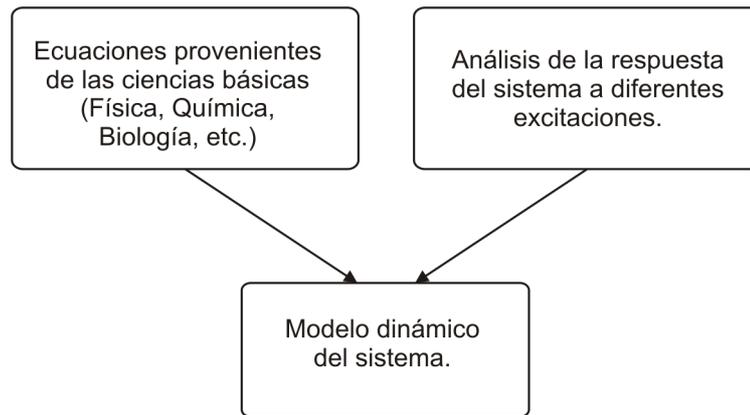


Figura 7.1: Formas de obtener un modelo dinámico de un sistema.

El modelo matemático obtenido (en su forma de modelo de estados) se repite a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ra/La & -Kb/La & 0 \\ Ki/Jeq & -Beq/Jeq & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/La \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (7.1)$$

$$y = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

En el modelo anterior se puede observar que cada uno de los elementos de la matriz representa una o más variables físicas del sistema en cuestión y es por esto que se denominan *parámetros*.

Los modelos matemáticos usados comúnmente en ingeniería (funciones transferencia o modelos de estados) están compuestos por coeficientes que representan variables físicas del sistema o los sistemas involucrados por lo que también se conocen como *modelos paramétricos*.

Ahora, si bien se obtuvo una primera aproximación a un modelo que describa la dinámica del posicionador, ésta es puramente teórica ya que la mayoría de los parámetros involucrados son desconocidos, no fueron provistos por el fabricante o son muy difíciles de medir por lo que, desde el punto de vista del diseño de un controlador, solo es útil para establecer un punto de partida en la búsqueda del modelo final.

A partir de lo anterior es que surgieron los siguientes interrogantes:

- ¿Es un modelo válido?
- ¿Es correcto el orden elegido?
- ¿Se está modelando toda la dinámica del sistema o existe alguna dinámica “oculta” que no se tuvo en cuenta?
- ¿Cual es el valor de cada uno de los parámetros del modelo?

A lo anterior se suma que cada una de las partes involucradas se estudió por separado y se unieron en un mismo modelo suponiendo que el sistema es lineal en todo el rango de funcionamiento sin tener en cuenta como interactúan entre sí y si dicha interacción genera otros efectos parásitos como nuevos polos, no linealidades, etc. que hagan que el modelo resultante pierda validez.

Es por todo esto que surge la necesidad de buscar un medio alternativo que:

- Permita obtener los parámetros desconocidos.
- Valide el modelo teórico propuesto.
- En caso de no validar el modelo propuesto, que permita el cálculo de uno nuevo del cual se tenga la seguridad que representa el comportamiento del sistema real y que permita el diseño de un sistema de control.

Como alternativa es que surge la idea de aplicar técnicas de identificación de sistemas aunque, sin embargo, este tipo de técnicas tienen algunas desventajas:

1. Su rango de validez suele ser limitado a un determinado punto de trabajo, un determinado tipo de entrada o un proceso concreto.
2. En la mayoría de los casos resulta difícil dar un significado físico al modelo obtenido ya que en realidad se calculan parámetros los cuales pueden o no tener relación directa con los parámetros físicos del sistema.

Teniendo en cuenta lo anterior, para el problema planteado se aplicará una combinación de ambas técnicas contando con modelo teórico inicial que permitirá:

- Seleccionar el método de identificación a utilizar.
- Diseñar el experimento de identificación.
- Obtener un valor inicial de los parámetros de modelo necesarios como punto de partida para la identificación.

En las siguientes secciones se darán algunas definiciones básicas que permitirán entender el problema que pretende resolver identificación de sistemas a modo de introducción teórica así como algunos algoritmos básicos que se implementarán.

La implementación del experimento de identificación y los resultados obtenidos se dejarán para los capítulos 9 y 10.

### **7.3 ¿Qué es un sistema? - Definición y clasificación de sistemas.**

Hasta ahora se ha hablado a lo largo del informe sobre modelos de sistemas pero no se ha dado una definición rigurosa de que significa cada término y las distintas formas en que pueden clasificarse dependiendo de la necesidad planteada.

### 7.3.1 Sistemas Dinámicos. Definición.

Un sistema es una interconexión de componentes, dispositivos o subsistemas en el que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales observables. Las señales observables que son de interés para el observador se denominan *salidas* del sistema, mientras que las señales que pueden ser manipuladas libremente son las *entradas* del mismo. El resto de señales que influyen en la evolución de las salidas pero no pueden ser manipuladas por el observador se denominan perturbaciones (ver figura 7.2).

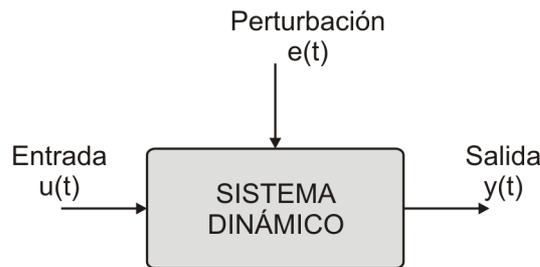


Figura 7.2: Sistema dinámico: entradas, salidas y perturbaciones.

Los sistemas dinámicos son aquellos en los cuales la salida actual no depende solamente del estímulo actual sino también de los estímulos anteriores. Es de esta propiedad que saca provecho la teoría de Identificación de Sistemas.

### 7.3.2 Modelo de un Sistema. Definición. Clasificación.

Un modelo de un sistema es una aproximación de la realidad. En particular para este proyecto mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden y una función de transferencia cuyo objetivo es analizar el comportamiento del sistema real.

La clasificación más general de los sistemas físicos de acuerdo a su rigurosidad matemática es la siguiente:

1. Modelos mentales, intuitivos o verbales. Estos modelos carecen de formalismo matemático.
2. Modelos no paramétricos. Muchos sistemas pueden ser caracterizados a partir de un gráfico o tabla que describa sus propiedades dinámicas mediante un número no finito de parámetros. Por ejemplo, un sistema lineal queda definido mediante su respuesta al impulso o al escalón, o bien mediante su respuesta en frecuencia.
3. Modelos paramétricos o matemáticos. Para aplicaciones más avanzadas, puede ser necesario utilizar modelos que describan las relaciones entre las variables del sistema mediante expresiones matemáticas como pueden ser ecuaciones diferenciales (para sistemas continuos) o en diferencias (para sistemas discretos). En función del tipo de sistema y de la representación matemática que se utilice, los sistemas pueden clasificarse en:
  - Determinísticos o estocásticos. Un modelo es determinístico cuando expresa la relación entre entradas y salidas mediante una ecuación exacta. En cambio,

un modelo estocástico posee un cierto grado de incertidumbre y se definen mediante conceptos de la teoría de probabilidades.

- Dinámicos o estáticos. Un sistema es estático cuando la salida depende únicamente de la entrada en ese mismo instante (por ejemplo, la corriente en una resistencia). En estos sistemas existe una relación directa entre entrada y salida, independiente del tiempo. Un sistema dinámico es aquél en el que las salidas evolucionan con el tiempo tras la aplicación de una determinada entrada (por ejemplo, una red RC).
- Continuos o discretos. Los sistemas continuos trabajan con señales continuas, y se caracterizan mediante ecuaciones diferenciales. Los sistemas discretos trabajan con señales muestreadas, y quedan descriptos mediante ecuaciones en diferencias.

Entonces, la función transferencia y el modelo de estados obtenidos en el Capítulo 4 son modelos paramétricos del mismo sistema. A su vez, puede establecerse que son determinísticos, dinámicos y continuos.

## 7.4 Identificación de Sistemas. Introducción.

Identificación de Sistemas (o ISIS) trata con el problema de obtener un modelo matemático de un sistema físico a partir de datos experimentales reales obtenidos del sistema que permitirá reproducir, con cierta exactitud, sus características dinámicas.

Desde el punto de vista más general, la teoría de identificación de sistemas se basa en: dado un sistema cuya estructura es desconocida de manera que puede considerarse como una “caja negra” (o “black box”), obtener una ecuación matemática que describa dicho comportamiento a partir de la observación de las señales de entrada y salida. Lo anterior se ilustra en la figura 7.3.

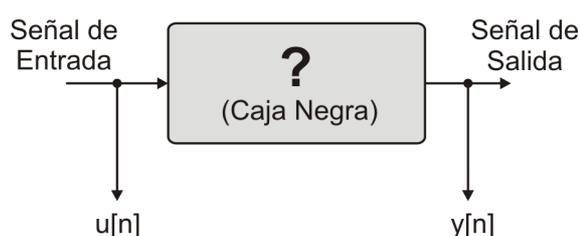


Figura 7.3: Modelo “Black Box” de un sistema.

La definición anterior implica una característica importante de la identificación de sistemas: dado que toda la información se obtiene de las señales de entrada y salida, es necesario observar las mismas lo que requiere sean almacenadas en forma de muestras. Por lo tanto, todo el análisis y el modelo obtenido estarán basados en señales discretas. Como consecuencia no debe olvidarse que el modelo obtenido será **un modelo en tiempo discreto**<sup>1</sup>.

De esta manera, la señal de entrada se define como:

<sup>1</sup>Recordar que conociendo la frecuencia de muestreo es posible obtener el modelo continuo y viceversa.

$$u[n] \text{ con } n = 1, 2, \dots, N \quad (7.2)$$

y la señal de salida como:

$$y[n] \text{ con } n = 1, 2, \dots, N \quad (7.3)$$

obtenidas cada  $T_s$  segundos (intervalo de muestreo).

Dependiendo de que tipo de información se extraiga de dichas señales se tienen distintos métodos de identificación.

### 7.4.1 Métodos de identificación. Clasificación.

Cuando se decidió aplicar técnicas de identificación de sistemas y se comenzó a profundizar un poco más sobre el tema se hizo evidente que no existe un método *a priori* que permita llegar de forma directa al modelo que se busca, sino que existen diferentes alternativas o caminos que se ajustan más (o menos) al problema propuesto y que a su vez ofrecen distinto grado de dificultad y exactitud en los resultados.

En principio existen tres formas básicas de llevar a cabo la identificación de un sistema.

1. Realizar experimentos simples sobre el sistema. Por ejemplo, analizar la respuesta al escalón o al impulso del sistema permite dar una idea general del problema. Por lo general quedan limitadas a sistemas sencillos de primer orden, pero si los resultados obtenidos son suficientes no es necesario recurrir a métodos más complejos.
  - *En el caso del posicionador permitirá determinar la ubicación del polo más rápido del sistema para estimar el ancho de banda del mismo y ajustar la frecuencia de muestreo ( $f_s = 1/T_s$ ) con la que se obtienen  $u[n]$  e  $y[n]$  durante el experimento de identificación. (Sobre este tema se volverá con más adelante cuando se aborde el diseño del experimento de identificación.*
2. Construir modelos para describir como las salidas dependen de las entradas sin tener en cuenta que ocurre en cada etapa intermedia. Aquí se tienen dos alternativas:
  - (a) *Métodos no paramétricos.* Estos métodos no permiten hallar los parámetros de un modelo del sistema, sino que permiten conocer la dinámica del mismo a partir del análisis de la respuesta bajo distintas condiciones. Algunos de estos métodos son: análisis de la respuesta transitoria (por ejemplo, respuesta a un escalón o impulso), análisis de la respuesta en frecuencia, análisis de correlación, análisis espectral, etc.
  - (b) *Métodos paramétricos con modelos predeterminados.* Como su nombre lo indica, permiten obtener modelos paramétricos utilizando un modelo predeterminado (*“ready-made model”*). Estos métodos requieren la elección *a priori* de una posible estructura del modelo, del orden  $n$ , de un criterio de ajuste y de un método de estimación de los parámetros del modelo a partir de los datos recolectados.
3. Determinar los parámetros desconocidos de un modelo obtenido a partir del modelo teórico propuesto. Este tipo de modelos se denomina *“Tailor-made”*.

Como puede verse, tanto 2.b como 3 son técnicas de identificación paramétricas pero la diferencia es que, en el caso 2.b debe determinarse una estructura del modelo que se cree que mejor se ajusta a la realidad y establecer el orden del mismo. Con esa información se estimarán **todos** los parámetros del modelo predeterminado por lo que debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Los parámetros estimados pueden no tener nada que ver con los parámetros reales del sistema (tanto desde los valores obtenidos como desde la interpretación física).
- Es posible que se estimen parámetros ya conocidos (por ejemplo, aquellos que son fáciles de medir) y que por lo tanto la información extraída de las muestras no sea aprovechada al máximo.

Como ventaja se tiene que:

- No se necesita tomar como punto de partida un modelo teórico del sistema, sino que pueden proponerse varios modelos predeterminados y elegir el que mejor se ajuste a la realidad.
- Solamente es necesario determinar el orden que se supone a priori que tiene el sistema real.

Como complemento es que aparece la opción 3. Aquí se parte fundamentalmente del modelo teórico, con la suposición que este es válido, contando con las siguientes ventajas:

- No es necesario estimar todos los parámetros del modelo. Por ejemplo, en el modelo de la ecuación (7.1) muchos de los parámetros son nulos y no cambiarán con el tiempo de manera que no tiene sentido estimarlos.
- Los parámetros obtenidos deben ser del orden del valor de los parámetros reales de manera que si es posible medir alguno de ellos y luego durante la identificación se verifican los valores obtenidos se tendrá certeza si el modelo teórico es válido o no.

La desventaja principal de utilizar un modelo *tailor-made* es que debe contarse con un modelo teórico como punto de partida lo cual no siempre es posible.

De lo anterior puede decirse que el problema de identificación puede resumirse en tres partes:

- I** Obtener un conjunto  $\mathcal{D}$  de datos de entrada-salida.
- II** Contar con un conjunto  $\mathcal{M}$  de modelos o estructuras de modelos como posibles candidatos.
- III** Un criterio o una función de pérdidas  $\mathcal{L}$  para seleccionar el mejor modelo o evaluar los posibles modelos del conjunto  $\mathcal{M}$  basándose en los datos de  $\mathcal{D}$ .

En el caso de los datos de entrada-salida  $\mathcal{D}$  estos se obtienen experimentando sobre el sistema. En la práctica, el conjunto  $\mathcal{D}$  incluye los datos utilizados para calcular el modelo y también los datos para validar dicho modelo.

La elección del modelo o el conjunto de modelos a utilizar  $\mathcal{M}$  por lo general se realiza luego de algunos experimentos básicos sobre el sistema y se elige un conjunto de posibles modelos eligiendo luego el que mejor se ajuste a los datos reales obtenidos.

Como criterio para medir cuanto se aparta el modelo propuesto del sistema real se establece una función no mínima lo suficientemente válida para tener sentido físico y lo suficientemente sencilla como para poder ser tratada matemáticamente. Dicha función dependerá de las muestras de entrada y salida y además de la salida del modelo y se define como:

$$V_N = \sum_{n=1}^N l(y[n], y_m[n], u[n]) \quad (7.4)$$

donde  $l(\cdot)$  es una función no negativa y  $N$  es el número de muestras adquiridas. En el caso que el modelo utilizado se encuentre parametrizado respecto de  $\theta$  tal que  $\mathcal{M} = \{M_\theta, \theta \in A\}$ , entonces el problema de identificación se reduce a un problema de optimización que minimice  $V_N$  con respecto de  $\theta$ .

Cabe recalcar que no hay un método predefinido para cada problema y este proyecto no es la excepción. En el caso del posicionador el procedimiento a llevar a cabo será:

1. Obtener información básica del sistema. Esto puede realizarse observando la respuesta a un escalón aplicado a la entrada.
2. Estimar los parámetros del modelo (7.1), para determinar su grado de validez.
3. Realizar la estimación mediante un modelo predefinido.
4. Elegir el mejor modelo que se ajusta a la realidad.

De esta manera se estaría recurriendo a todas las herramientas que ofrece la teoría de identificación de sistemas. Los pasos a seguir en el proceso de identificación serán tratados en la sección 7.11.

## 7.5 Técnicas de Identificación No Paramétricas.

En la sección anterior se concluyó que cualquiera de las técnicas disponibles para identificar un sistema puede resultar de utilidad para ampliar el conocimiento sobre el mismo por lo tanto, aunque las técnicas de identificación de interés sean aquellas del tipo paramétrico, vale la pena tener idea sobre en qué consisten las técnicas de identificación no paramétrica.

Supóngase el sistema de la figura 7.3. Dado que se muestrea tanto la entrada como a la salida, cualquier modelo obtenido a partir del mismo será un modelo discreto.

Si el modelo discreto es lineal, la relación entre la entrada y la salida estará dada por:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} g[k] \cdot u[n-k] + v[n] \quad (7.5)$$

donde  $g[k]$  es como se sabe la respuesta impulsional del sistema y la función transferencia estará dada por  $G(z)$ . Si esta función se evalúa sobre el círculo unitario ( $z = e^{j2\pi f}$ ) se tiene la respuesta en frecuencia del sistema:

$$G(e^{j2\pi f}). \quad (7.6)$$

Si  $v[n]$  es una perturbación aleatoria (ruido), entonces estará caracterizada por su densidad espectral de potencia o lo que es lo mismo, por la transformada de Fourier de la función de autocorrelación:

$$R_{vv}(\tau) = E\{v(t) \cdot v(t - \tau)\} \supset \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_{vv}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} = \phi_{vv}(f). \quad (7.7)$$

Si se supone  $v[n]$  como ruido blanco  $e[n]$  con varianza  $\sigma^2$  que pasa a través de un filtro cuya transferencia es  $H(z)$ , entonces la densidad espectral de potencia será:

$$\phi_{vv}(f) = \sigma^2 |H(e^{j2\pi f})|^2. \quad (7.8)$$

por lo tanto, la descripción del sistema en el dominio del tiempo estará dada por:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} g[k] \cdot u[n-k] + \sum_{k=1}^{\infty} h[k] \cdot e[n-k] \quad (7.9)$$

Y la descripción en el dominio de la frecuencia:

$$G(e^{j2\pi f}) \quad (7.10)$$

y

$$\phi_{vv}(f). \quad (7.11)$$

A partir de (7.9), (7.10) y (7.11) se observa que la respuesta del sistema queda enteramente determinada y no depende de un número finito de parámetros.

Al tipo de modelo obtenido se lo denominan *modelo de descripción no paramétrica*.

### 7.5.1 Estimación de la Respuesta al Impulso.

Si se supone que la entrada al sistema de la ecuación (7.5) es ruido blanco con media cero y varianza  $N_0$  cuya función de correlación es:

$$R_{uu}(\tau) = E\{u(t) \cdot u(t - \tau)\} = \begin{cases} N_0 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

entonces, la correlación entre la entrada y la salida estará dada por:

$$R_{yu}(\tau) = E\{y(t - \tau) \cdot u(t)\} = N_0 \cdot g(\tau) \quad (7.13)$$

donde  $g(\tau)$  es la respuesta al impulso del sistema la cual puede ser estimada utilizando muestras tomadas del sistema. De esta forma, la respuesta del sistema en base observaciones de la entrada y la salida estará dada por:

$$g(\tau) = \frac{1}{N_0 \cdot N} \sum_{n=1}^N y(n + \tau) \cdot u(n). \quad (7.14)$$

Si la entrada no es ruido blanco, se puede implementar un filtro que “blanquee” la señal que ingresa al sistema.

Este procedimiento se conoce como *análisis de correlación*.

### 7.5.2 Estimación de la Respuesta en Frecuencia.

En este caso se busca determinar la respuesta en frecuencia del sistema en función de un número finito de muestras  $N$ .

Supóngase de nuevo el sistema (7.5). La densidad espectral de potencia de la salida estará dada por:

$$\phi_y(f) = |G(e^{j2\pi f})|^2 \cdot \phi_u(f) + \phi_v(f) \quad (7.15)$$

y, por lo visto en la sección anterior, la transformada de Fourier de la función de correlación entre la entrada y la salida será:

$$\phi_{yu}(f) = G(e^{j2\pi f}) \cdot \phi_u(f). \quad (7.16)$$

por lo tanto, a partir del cálculo de las densidades espectrales de potencia involucradas en las ecuaciones (7.15) y (7.16) es posible hallar una estimación de  $G(e^{j2\pi f})$  en base a un número finito de muestras  $N$ .

El procedimiento es el siguiente:

1. Estimar las funciones de correlación  $\hat{R}_{yu}(\tau)$ ,  $\hat{R}_{yy}(\tau)$  y  $\hat{R}_{uu}(\tau)$ . Por ejemplo, para el primer caso, la correlación en base a un número finito de muestras está dado por:

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n + \tau) \cdot u(n). \quad (7.17)$$

2. La transformada de Fourier de la expresión anterior permite obtener el espectro:

$$\hat{\phi}_y(f) = \sum_{\tau=-M}^M \hat{R}_y(\tau) \cdot W_M(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \quad (7.18)$$

donde  $W_M$  es la función utilizada como ventana y  $M$  es el ancho de dicha ventana. (El “ventaneo” o “windowing” es tenido en cuenta por los algoritmos ya que se trabaja con un número finito de muestras).

3. Los estimados de la respuesta en frecuencia del sistema se obtienen de la siguiente forma:

$$\hat{G}(e^{j2\pi f}) = \frac{\hat{\phi}_{yu}(f)}{\hat{\phi}_u(f)} \quad (7.19)$$

y

$$\hat{\phi}_v(f) = \hat{\phi}_y(f) \cdot \frac{|\hat{\phi}_{yu}(f)|^2}{\hat{\phi}_u(f)}. \quad (7.20)$$

Este tipo de técnica se conoce como *Análisis Espectral*. Para más información ver [17] y [24].

## 7.6 Técnicas de Identificación Paramétricas.

En esta sección se dará una breve introducción a las técnicas de identificación paramétricas que utilizan modelos preestablecidos (“*ready-made*”) y modelos propuestos por el usuario (“*tailor-made*”).

El principal objetivo será:

- Mostrar algunos de los diferentes tipos de modelos preestablecidos.
- Mostrar como funciona la regresión lineal para identificar un modelo de un sistema.
- Mostrar el funcionamiento de la identificación por mínimos cuadrados.
- Establecer los lineamientos básicos para la identificación de sistemas.

Durante las secciones siguientes se referirá al lector al Apéndice C donde se muestra un ejemplo de identificación de modelo ARX a partir del cual se obtienen algunos resultados interesantes.

### 7.6.1 El Operador Retardo $q$ . Definición.

Un forma más sencilla de escribir la ecuación en diferencias de un sistema de la forma

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} g[k] \cdot u[n-k] \quad (7.21)$$

es escribirlo de la siguiente manera:

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g[k] \cdot u[n-k] \quad (7.22)$$

donde  $G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g[k] \cdot q^{-k}$  con  $q^{-1} \cdot u(n) = u(n-1)$ .

Por lo tanto, un sistema como el de la ecuación (7.9) puede escribirse de la siguiente manera:

$$y[n] = G(q) \cdot u[n] + H(q) \cdot e[n]. \quad (7.23)$$

Ecuación que describe al sistema en el *dominio del tiempo discreto*.

De la ecuación (7.22) puede considerarse a  $G(q)$  como una *transferencia discreta* que relaciona a la salida y a la entrada de la siguiente forma:

$$G(q) = \frac{y[n]}{u[n]}. \quad (7.24)$$

Vale la pena aclarar que, si se observa la expresión de  $G(q)$ , esta es la misma que la de la transformada  $Z$  de forma que es lógico pensar que existe una relación directa entre

el operador  $q$  y el operador  $z$  y es que la función transferencia es la misma expresada en  $q$  o  $z$  cuando se considera al sistema con condiciones iniciales nulas. Sin embargo, no debe perderse de vista que  $G(q)$  establece una relación para el cociente  $y[n]/u[n]$  en el dominio temporal mientras que  $G(z)$  establece una relación para el cociente  $Y[z]/U[z]$  en el dominio transformado.

### 7.6.2 Estructuras de Modelos Preestablecidos. Modelos “Ready-Made”.

La función  $G(q)$  definida en la sección anterior puede escribirse como una función racional del operador  $q$  cuyo numerador y denominador estarán caracterizados por coeficientes que en este caso son los parámetros que se desean calcular y que pueden agruparse en un vector de parámetros  $\theta$ . Lo mismo ocurre para la función  $H(q)$ .

A modo general ambas funciones de transferencia pueden escribirse de la siguiente forma:

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{F(q)} = q^{-nk} \frac{b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb+1}}{1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{nf}q^{-nf}} \quad (7.25)$$

y

$$H(q, \theta) = \frac{C(q)}{D(q)} = \frac{1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}}{1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}} \quad (7.26)$$

donde  $-nk$  es el número de retardos entre la entrada y la salida.

Luego, la estructura más general de un modelo paramétrico es la siguiente:

$$\boxed{A(q) \cdot y[n] = \frac{B(q)}{F(q)} \cdot u[n - nk] + \frac{C(q)}{D(q)} \cdot e[n]} \quad (7.27)$$

donde

- $A(q, \theta) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$ .
- $e[n]$  se supone que es ruido blanco gaussiano con varianza  $\lambda$ .

De esta manera, se tiene que el procedimiento de identificación paramétrico con modelos preestablecidos se reduce a:

1. Establecer la *estructura* del modelo dada por los parámetros  $na$ ,  $nb$ ,  $nc$ ,  $nd$  y  $nf$  que definen el orden del polinomio respectivo y el retardo entre la entrada y la salida  $nk$ .
2. Determinar el vector de parámetros  $\theta$  que contiene los coeficientes incógnita  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  y  $f_i$  mediante algún método de ajuste.

Dependiendo del orden que se asigna a cada polinomio es que se definen diferentes estructuras de modelos dependiendo de si:

- La salida depende de las entradas  $u[n]$  y no de los valores pasados de  $y[n]$ . Estos modelos se conocen como *Moving-Average* (MA).

- Si en cambio la salida depende solamente de las salidas anteriores se tiene un modelo del tipo *Auto-Regressive* (AR).
- Si la salida depende de ambas (las entradas y las salidas anteriores), entonces se tiene un modelo del tipo *Auto-Regressive Moving Average* (ARMA).

Si además se considera una entrada extra (*eXogenous input*) se tiene una variante de los modelos anteriores<sup>2</sup>.

Los modelos más conocidos se resumen en el siguiente cuadro<sup>3</sup>:

Cuadro 7.1: Ejemplos de modelos preestablecidos.

| Tipo de Modelo                          | Condición                | Estructura  |
|---|--------------------------|---|
| ARX                                     | $F(q) = D(q) = C(q) = 1$ | $y[n] = \frac{B(q)}{A(q)} \cdot u[n - nk] + \frac{1}{A(q)} \cdot e[n]$    |
| Output Error (OE)                       | $A(q) = D(q) = C(q) = 1$ | $y[n] = \frac{B(q)}{F(q)} \cdot u[n - nk] + e[n]$                         |
| ARMAX<br>(se considera MA por el ruido) | $F(q) = D(q) = 1$        | $y[n] = \frac{B(q)}{A(q)} \cdot u[n - nk] + \frac{C(q)}{A(q)} \cdot e[n]$ |
| Box-Jenkins (BJ)                        | $A(q) = 1$               | $y[n] = \frac{B(q)}{F(q)} \cdot u[n - nk] + \frac{C(q)}{D(q)} \cdot e[n]$ |

Cada uno con su correspondiente diagrama en bloques que se muestra en la figura 7.4.

Como puede verse, la anulación de algún polinomio simplifica el proceso de identificación. Como regla general, la estructura del modelo se elige dependiendo de donde se prevé que la perturbación ingresa al sistema.

- *El modelo más utilizado en la práctica es el modelo ARX.*

<sup>2</sup>En la teoría de identificación de sistemas se considera a la entrada  $u[n]$  como una entrada exógena. Por lo tanto, la parte Moving Average (MA) de los modelos se debe a la entrada  $e[n]$ .

<sup>3</sup>Para el modelo propuesto se puede obtener un total de 32 modelos posibles.

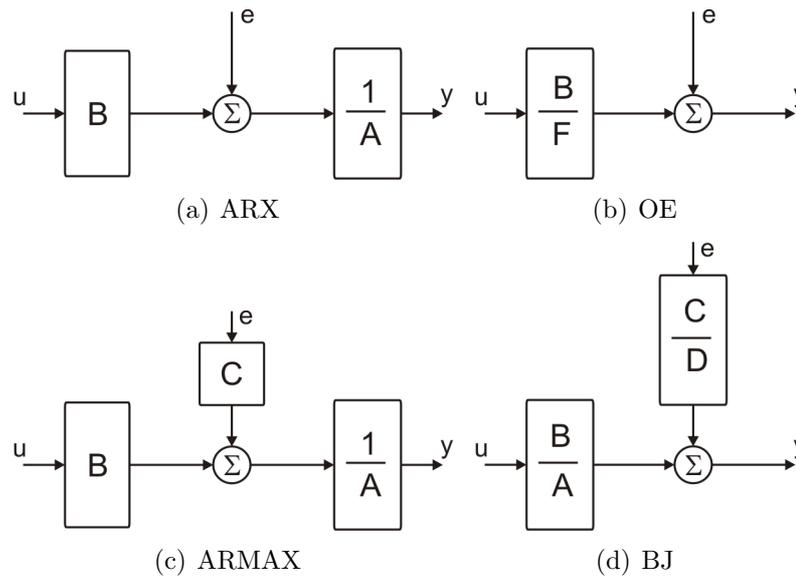


Figura 7.4: Ejemplos de estructuras de modelos preestablecidos.

### 7.6.3 Modelos propuestos por el usuario (“Tailor-Made”). Identificación de un modelo de estados.

Este tipo de modelos se utilizan cuando es posible determinar las ecuaciones que definen la dinámica del sistema cuyos parámetros tienen valores desconocidos. Como se vio en el Capítulo 5, en el modelo de estados la relación entre la entrada, ruido y la salida se escribe como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que lo hace muy práctico para este tipo de situaciones ya que resulta más sencillo describir modelos físicos mediante este modelo.

El caso más común es que dichos sistemas físicos se encuentren descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden en el dominio de tiempo continuo y no discreto ya que la mayoría de las leyes físicas que describen a los sistemas dinámicos se expresan en tiempo continuo.

Como consecuencia de lo anterior, utilizar el modelo de estados parece ser el camino más rápido para obtener un modelo paramétrico del sistema en cuestión ya que resulta más sencillo de obtener que cualquiera de los modelos vistos en la sección anterior.

Por lo tanto, el modelo cuyos parámetros son incógnitas tendrán la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), \theta) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), \theta) \end{aligned} \tag{7.28}$$

donde, al igual que en la sección anterior,  $\theta$  contiene los parámetros incógnita del modelo e  $y(t)$  es una salida del sistema que puede medirse.

Luego, se supone un modelo lineal invariante en el tiempo por lo cual la ecuación de estados (7.28) puede escribirse como:

$$\dot{x}(t) = A(\theta) \cdot x(t) + B(\theta) \cdot u(t) \tag{7.29}$$

y la salida (tomando  $D = 0$ ), que se supone está afectada por ruido ya sea por imperfecciones en la medida o perturbaciones que afectan al sistema, entonces:

$$y(t) = C(\theta) \cdot x(t) + v(t) \quad (7.30)$$

donde  $C(\theta)$  es una elección arbitraria.

El equivalente discreto se obtiene como se vio en el Capítulo 5:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_D(\theta) \cdot x[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] \\ y[n] &= C_D(\theta) \cdot x[n] + v[n] \end{aligned} \quad (7.31)$$

modelo a partir del cual es posible establecer una función de transferencia entre la entrada y la salida que puede escribirse de la siguiente forma (observar que en este caso se emplea el operador  $q$ ):

$$y[n] = G(q, \theta) \cdot u[n] + v[n] \quad (7.32)$$

donde

$$G(q, \theta) = C(\theta) [q \cdot I_{n \times n} - A(\theta)]^{-1} \cdot B(\theta) \quad (7.33)$$

análoga a la función transferencia propuesta para los casos de la sección anterior ya que también depende del vector de parámetros  $\theta$ . Sin embargo, debe notarse que  $G(q, \theta)$  puede resultar una función muy complicada de  $\theta$  y por eso surgen métodos para trabajar directamente sobre el modelo de estados y obtener los parámetros incógnita.

#### 7.6.4 Identificación de un Modelo de Estados: El Modelo de Innovación.

En el caso de trabajar con el modelo de estados, observando que se puede influir directamente a las variables de estado, es que se recurre a dividir el ruido que afecta al sistema en dos:

1. *Ruido de medición o de salida*  $v[n]$ . Es el ruido que afecta al sistema y aparece a la salida o también el ruido presente en los dispositivos utilizados en la medida. Por ejemplo: en un sensor.
2. *Ruido de proceso o de planta*  $w[n]$ . Es el ruido que afecta a los estados del sistema. Por ejemplo: una variación en la carga del eje de un motor.

A partir de lo anterior se determina la estructura del modelo de estado utilizada para plantear el problema de identificación:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_D(\theta) \cdot x[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + w[n] \\ y[n] &= C_D(\theta) \cdot x[n] + D_D(\theta) \cdot u[n] + v[n] \end{aligned} \quad (7.34)$$

modelo en el cual  $v[n]$  y  $w[n]$  son secuencias de variables aleatorias independientes obteniéndose un *modelo de estados estocástico*.

Suponiendo de que  $v[n]$  y  $w[n]$  son variables aleatorias con distribución normal con media cero y funciones de covarianza dada por:

$$\begin{aligned} E \{w[n] \cdot w^T[n]\} &= R_1(\theta) \\ E \{v[n] \cdot v^T[n]\} &= R_2(\theta) \\ E \{w[n] \cdot v^T[n]\} &= R_{12}(\theta) \end{aligned} \quad (7.35)$$

el modelo (7.34) puede llevarse a una forma más flexible denominada **forma de innovación** cuya expresión matemática es

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_D(\theta) \cdot x[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + K \cdot e[n] \\ y[n] &= C_D(\theta) \cdot x[n] + D_D(\theta) \cdot u[n] + e[n] \end{aligned} \quad (7.36)$$

donde

- $e[n] = y[n] - \hat{y}[n]$  se supone que es ruido blanco y comprende la diferencia entre la salida real medida  $y[n]$  y una estimación de la misma  $\hat{y}[n]$  que es función de las entradas y salidas anteriores.
- $K$  es un vector de ganancias que se denomina *matriz de Kalman*. (Cómo se calcula  $K$  se verá en la sección 7.12 dedicada a un observador de estados particular conocido como Filtro de Kalman).

Para el cálculo de  $\hat{y}[n]$  debe contarse con un predictor de los estados del sistema que tendrá la siguiente forma:.

$$\begin{aligned} \hat{x}[n+1] &= A_D(\theta) \cdot \hat{x}[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + K \cdot e[n] \\ \hat{y}[n] &= C_D(\theta) \cdot \hat{x}[n] + e[n] \end{aligned} \quad (7.37)$$

siendo  $\hat{x}$  una estimación del vector de estados en el  $n$ -ésimo instante. (se supone que la matriz  $D = 0$  ya que se ajusta al caso del posicionador de antenas)

La forma de innovación permite llevar el modelo a la forma general

$$y[n] = G(q) \cdot u[n] + H(q) \cdot e[n] \quad (7.38)$$

donde

- $G(q, \theta) = C(\theta) [q \cdot I_{n \times n} - A(\theta)]^{-1} \cdot B(\theta)$
- $H(q, \theta) = C(\theta) [q \cdot I_{n \times n} - A(\theta)]^{-1} \cdot K + I_{n \times ny}$  siendo  $ny$  el número de salidas del sistema.

de manera que las relaciones entre el modelo de estados y la función transferencia se siguen verificando.

Como conclusión, el modelo seleccionado deberá

- Ser aquel que tenga la menor cantidad de parámetros a calcular.

- Que describa de forma correcta al sistema real.
- Que pueda determinarse a partir de las muestras de entrada y salida y además sea único.
- Y finalmente, que facilite el diseño de un controlador.

Como cumplir con las premisas anteriores se verá en las siguientes secciones.

## 7.7 Predicción. Error de Predicción. Aplicación a la Identificación de Sistemas.

Supóngase que se asume una estructura de modelo o un conjunto de estructuras modelos los cuales se supone describen al sistema incógnita. El próximo paso es obtener un estimado particular  $\hat{\theta}$  del vector de parámetros incógnita  $\theta$  que mejor represente la información proporcionada por el sistema real. Así, el problema de determinar el modelo del sistema se reduce a hallar o estimar el valor  $\hat{\theta}$  que mejor se aproxima al vector de parámetros real del sistema, llámese  $\theta_0$ .

Suponiendo que se cuenta con un modelo del sistema (sin importar cuan bueno sea éste) como se muestra en figura 7.5, se observa que se cuenta con las señales provenientes del sistema real (que responden a  $\theta_0$ ) y señales que pueden obtenerse a partir del modelo propuesto para un determinado valor de  $\theta$  (cuyo valor inicial puede proponerse o aproximarse mediante experimentos sencillos) por lo que utilizar una señal de error que denote las diferencias entre ambos modelos permitiría ajustar el valor de  $\theta$  a  $\theta_0$  mediante algún criterio de ajuste.

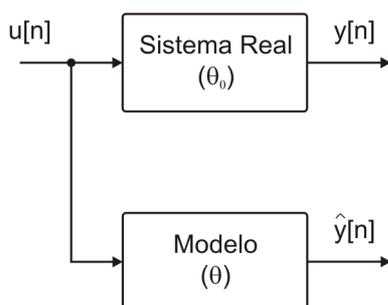


Figura 7.5: Sistema real vs. Modelo.

En primer lugar, y por la naturaleza del problema, calcular el error entre  $\theta$  y  $\theta_0$  no tiene sentido ya que si se conociera  $\theta_0$  el problema estaría resuelto. Como consecuencia, el error deberá calcularse en función de las señales de entrada  $u[n]$  y salida  $y[n]$  del sistema real y de las salidas del modelo propuesto.

Suponer primero por simplicidad el caso continuo. Definida la función de error  $e(t, \theta)$ , la misma será distinta de cero cuando el conjunto de parámetros  $\theta$  utilizados en el modelo sea distinto a  $\theta_0$ .

Para determinar si un conjunto de parámetros  $\theta$  es mejor que otro debe determinarse algún criterio, en nuestro caso, que permita hallar un valor  $\hat{\theta}$  que minimice el error. Para

esto se utiliza una función no negativa que define el siguiente índice:

$$J(\theta) = \int_0^{t_f} e^T(t, \theta) e(t, \theta) dt \quad (7.39)$$

De manera que se buscará un valor de  $\theta$  hasta hallar  $\hat{\theta}$  tal que  $J(\hat{\theta}) = 0$ , condición para la cual se verifica que el juego de parámetros  $\hat{\theta}$  es equivalente a  $\theta_0$ .

El equivalente discreto de la ecuación (7.39) es:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N e^T(k, \theta) \cdot e(k, \theta) \quad (7.40)$$

Dependiendo de qué señales se utilicen para generar el error entre el sistema real y el modelo propuesto es que se tienen tres criterios que se describen a continuación.

En el Apéndice C de este informe se propone un modelo tipo ARX por ser uno de los modelos más fáciles de analizar. Algunos de los resultados obtenidos se irán retomando cuando sea necesario a lo largo de este capítulo como por ejemplo la determinación de un regresor lineal y la estimación de parámetros utilizando el método de los mínimos cuadrados.

### 7.7.1 Error de Ecuación (Equation Error).

Para este planteo, la señal de error  $e(t, \theta)$  se obtiene a partir de las ecuaciones que describen el sistema incógnita, como por ejemplo, las ecuaciones que describen el modelo de estados. Dado un sistema cuyo modelo de estados está dado por:

$$\dot{x}_m = f(x, u, \theta) \quad (7.41)$$

donde  $m$  indica que se trata de los estados obtenidos del modelo propuesto.

Primero, se observa que la función  $f$  es conocida y que depende del vector de parámetros  $\theta$ . Dicho manera, se conoce la estructura del modelo pero no se conoce el valor de los parámetros o lo que es lo mismo del vector  $\theta_0$  que lo describe.

Segundo, se supone que se pueden medir la entrada  $u$  al sistema, la salida  $y$ , las variables de estado  $x_i$  y las derivadas de dichos estados  $\dot{x}_i$ . Es decir, se cuenta con toda la información del sistema salvo el valor de los parámetros del mismo por lo que el error entre las ecuaciones de estado del sistema real, llámense  $x$  (que responden a  $\theta_0$ ) y las que responden a  $\theta$  estará dado por:

$$e[n, \theta] = \dot{x} - \dot{x}_m = \dot{x} - f(x, u, \theta). \quad (7.42)$$

La suposición anterior es bastante ambiciosa ya que en la mayoría de los sistemas reales resulta imposible medir todos los estados y sus derivadas y es por esto que este método queda reservado a algunos casos muy especiales.

### 7.7.2 Error de Salida (Output Error).

Para evitar el problema de tener que medir todos los estados del sistema incógnita es que se propone obtener la señal de error a partir de la salida del sistema real  $y[n]$  y la salida

del modelo propuesto  $y_m[n]$  como se observa en la figura 7.6 donde en ningún momento se intenta medir los estados del sistema.

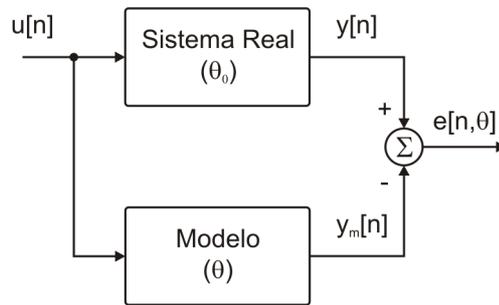


Figura 7.6: Obtención de la señal de error como la diferencia entre la salida real del sistema y la salida del modelo utilizado.

Al igual que en el caso anterior, la salida  $y[n]$  responde al vector de parámetros real del sistema  $\theta_0$  mientras que  $y_m[n]$  al vector de parámetros  $\theta$ . De esta manera el error queda definido como

$$e[k, \theta] = y[k] - y_m[k] \quad (7.43)$$

ecuación mediante la cual se puede definir el índice  $J(\theta)$  y buscar un estimado  $\hat{\theta}$  que permita hallar  $J(\hat{\theta}) = 0$ .

A diferencia del caso anterior, se tiene que el error depende únicamente de la salida actual del sistema real y de las salidas y entradas anteriores del modelo propuesto. Por ejemplo, para un modelo ARX de orden 3 el error en el  $n$ -ésimo instante estará dado por:

$$e[n, \theta] = y[n] - a_1 y_m[n-1] - a_2 y_m[n-2] - a_3 y_m[n-3] - b_1 u[n-1] - b_2 u[n-2] - b_3 u[n-3]. \quad (7.44)$$

Si bien esta propuesta se aproxima mucho más al problema inicial planteado por Identificación de Sistemas, el modelo utilizado es siempre el mismo y no es posible mejorarlo a medida que se obtiene más información del sistema. Por lo tanto aparece un nuevo esquema en el que se utiliza un predictor de la salida del modelo y que se verá a continuación.

### 7.7.3 Método de Predicción de Error (Prediction Error Method - PEM).

En este caso el enfoque es distinto. Si bien los modelos se utilizan para la simulación, experimentación y en este caso para el diseño de controladores, otra propiedad esencial para la identificación de sistemas es la propiedad de predecir valores en base a la observación de valores anteriores. Esto se conoce como *predicción*.

El método de predicción de errores para obtener el modelo de un sistema real se basa en lo siguiente:

Supóngase que el sistema está representado por la siguiente función transferencial

$$y[n] = G_0(q) \cdot u[n] + v_0[n] \quad (7.45)$$

donde  $G_0$  es la función transferencia verdadera del sistema real cuyos parámetros son  $\theta_0$  y  $v_0[n]$  es una perturbación que aparece a salida.

El próximo paso sería seleccionar una estructura de modelos que determine el conjunto de modelos  $\mathcal{M}$  definido en la sección 7.4.1, para el cual se definen modelos particulares  $\mathcal{M}(\theta)$  parametrizados usando en vector  $\theta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \subset R^d$ . Por lo tanto el conjunto de modelos queda definido por:

$$\mathcal{M}^* = \{\mathcal{M}(\theta) \mid \theta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}\}. \quad (7.46)$$

El modelo de  $\mathcal{M}$  está dado por un modelo estocástico SISO con la siguiente estructura:

$$y[n] = G(q, \theta) \cdot u[n] + H(q, \theta) \cdot e[n] \quad (7.47)$$

el cual se quiere ajustar para un determinado conjuntos de muestras de entrada y salida suponiendo que  $e$  es ruido blanco con media cero y varianza  $\sigma^2$ . La estructura se muestra en la figura 7.7.

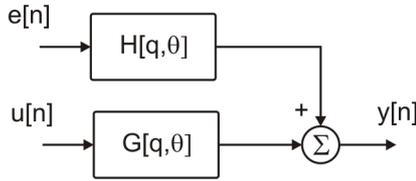


Figura 7.7: Modelo de un sistema SISO basado en la función transferencia.

Se demuestra en [17] que cada modelo es capaz de predecir valores futuros de la salida en función de las observaciones pasadas de la entrada y la salida. En el caso particular, la estructura del predictor de un paso adelante (*one-step-ahead*) para el modelo (7.47) basado en el conjunto de observaciones  $Z^{n-1}$  tendrá la siguiente forma (tener en cuenta que el predictor puede considerarse como un filtro lineal):

$$\mathcal{M}(\theta) : \hat{y}(n|\theta) = H^{-1}(q, \theta) \cdot G^{-1}(q, \theta) \cdot u[n] + [1 - H^{-1}(q, \theta)] y[n]. \quad (7.48)$$

De manera que puede plantearse el error de predicción en el  $n$ -ésimo instante que evalúe las capacidades predictivas del modelo  $\mathcal{M}(\theta)$  como:

$$e[n, \theta] = y[n] - \hat{y}[n, \theta] \quad (7.49)$$

Ahora, lo más común es que se recolecten una cantidad  $N$  de muestras de la entrada y salida tal que el conjunto de datos queda determinado por:

$$Z^N = \{y[1], y[2] \dots y[N]; u[1], u[2] \dots u[N]\} \quad (7.50)$$

de manera que es posible utilizar toda la información contenida para calcular el valor de  $\hat{\theta}$  para determinar el correspondiente modelo  $\mathcal{M}(\hat{\theta}) \in \mathcal{M}^*$ .

Si se considera un valor particular de  $\theta$ , junto con las  $N$  muestras obtenidas, se tiene a secuencia de errores de predicción dada por:

$$\{e[n, \theta], n = 1, 2, \dots, N\}. \quad (7.51)$$

Con esta información, un “*buen modelo*” sería aquél que minimice el error de predicción de manera que puede hacerse la siguiente afirmación:

*Basándose en  $Z^N$ , se puede calcular el error de predicción  $e[n, \theta] = y[n] - \hat{y}[n, \theta]$ . En el instante  $n = N$  debe seleccionarse  $\hat{\theta}_N$  tal que los errores de predicción  $e[n, \hat{\theta}]$  para  $n = 1, 2, \dots, N$  sean lo menor posible .[17].*

El objetivo será entonces hallar el modelo  $\mathcal{M}(\theta)$  que mejor reproduzca los datos de entrada y salida a partir de los datos obtenidos en  $Z^N$ .

El próximo paso sería definir algún criterio o función de costo que permita obtener un valor de  $\theta$  que minimice el error de predicción.

Al igual que para los métodos anteriores el error de predicción es una secuencia que puede verse como un vector en  $R^N$  de manera que se puede definir una función definida positiva en función de dichos errores. En el caso de los métodos PEM se utiliza la siguiente función de costo:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^T[n, \theta] \cdot e[n, \theta] \quad (7.52)$$

a partir de la cual se determina el valor de  $\theta$  que minimiza dicha función dado por:

$$\hat{\theta} = \arg \min V_N(\theta) \quad (7.53)$$

A diferencia de la función  $J(\theta)$ , esta función minimiza la varianza del error de predicción.

Si la búsqueda se repite en varias iteraciones puede hallarse un mínimo local de la función  $V_N(\theta)$  por lo que la mayoría de los algoritmos resuelven el problema en varias iteraciones dependiendo de la cantidad de muestras recolectadas.

En la figura 7.8 se muestra el esquema de trabajo propuesto por PEM.

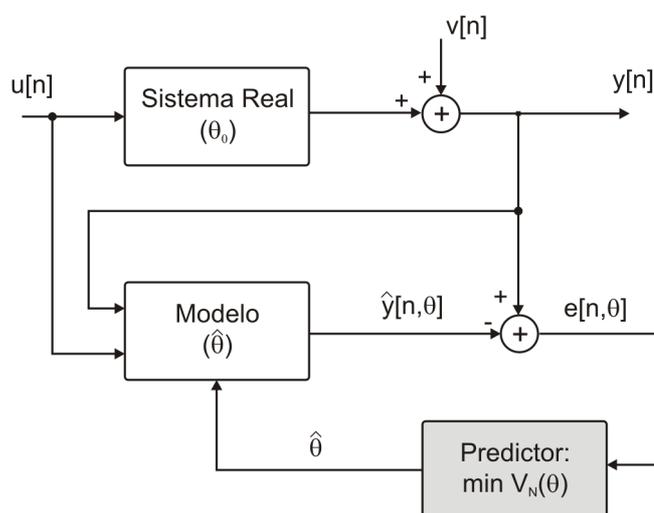


Figura 7.8: Diagrama en bloques que representa el funcionamiento del método de predicción de error (PEM).

El método de los mínimos cuadrados en su forma de regresión lineal, la aplicación del método de máxima verosimilitud, etc. son ejemplos de PEM.

## 7.8 Regresión Lineal.

Tanto los modelos del tipo *Ready-Made* o *Tailor-Made* permitirán predecir el valor de  $y[n]$  a partir de los valores anteriores pasados de  $y$ ,  $u$  y de los parámetros del vector  $\theta$ . El valor predicho estará dado por:

$$\hat{y}(n|\theta) \quad (7.54)$$

Como puede verse en la ecuación (7.48), el valor de  $\hat{y}$  puede ser bastante complicado de calcular de manera que una práctica común es tratar de hallar la expresión de  $\hat{y}$  como una función lineal de  $\theta$  llamada *regresión lineal*:

$$\hat{y}(n|\theta) = \varphi^T[n] \cdot \theta \quad (7.55)$$

donde  $\varphi[n]$  es un vector fila que contiene las entradas y salidas anteriores del sistema (*vector de regresión*).

Por ejemplo, en el apéndice C se obtuvo la siguiente expresión para el vector de regresión de un modelo ARX. El modelo de regresión obtenido se repite a continuación<sup>4</sup>:

$$\varphi[n] = [ -y[n-1] \quad -y[n-2] \quad \dots \quad -y[n-n_s] \quad u[n-1] \quad u[n-2] \quad \dots \quad u[n-n_s] ]^T \quad (7.56)$$

Si es posible obtener la forma de regresión lineal, el cálculo de la función de error queda relativamente sencillo

$$e[n, \theta] = y[n] - \hat{y}(n|\theta) = y[n] - \varphi^T[n] \cdot \theta \quad (7.57)$$

que dará lugar a un sistema de ecuaciones de donde se puede despejar  $\theta$ .

## 7.9 Modelos de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo. Modelos Determinísticos y Estocásticos.

Si bien en las secciones anteriores se mostraron modelos de sistemas invariantes en el tiempo los cuales incluían o no una variable aleatoria en su descripción antes de analizar algunos de los métodos de estimación de parámetros más conocidos sería conveniente realizar una breve revisión para unificar conceptos y entender los distintos enfoques de algunos métodos.

Se sabe que un modelo lineal invariante en el tiempo queda completamente descrito por la respuesta al impulso, la densidad espectral de potencia de una perturbación y si es posible, la función de densidad de probabilidad (pdf) de dicha perturbación. Por lo tanto, un modelo como los vistos en la sección 7.6 queda completamente descrito por

$$y[n] = G(q) \cdot u[n] + H(q) \cdot e[n] \quad (7.58)$$

$f_e(\cdot)$  (pdf de  $e$ )

donde es común suponer que  $e[n]$  es ruido blanco con distribución gaussiana con media nula y varianza  $\lambda$ .

---

<sup>4</sup> $n_s$  es el orden del sistema.

El modelo utilizado por los métodos de identificación de sistemas se basa en que los parámetros del sistema real son desconocidos, de manera que dependerá del vector de parámetros incógnita  $\theta$ . Entonces se obtiene la siguiente descripción del modelo:

$$y[n] = G(q, \theta) \cdot u[n] + H(q, \theta) \cdot e[n] \quad (7.59)$$

$f_e(x, \theta)$  (PDF de  $e$ )

Por lo tanto, se concluye que existirán dos maneras de obtener un modelo:

1. Desde un planteo puramente determinístico, donde se utilizará la propiedad de predicción del modelo propuesto (*one-step-ahead predictor*) vista en la sección 7.7.3 donde se observa que no depende de  $f_e(\cdot)$ . En este caso se postula un modelo predictor basado en las observaciones pasadas de la entrada y la salida tal que la salida del modelo sea:

$$y(n|\theta) = g_{n-1} \{Z^{n-1}, \theta\} \quad (7.60)$$

Luego, la diferencia entre la salida real y la salida predcida dará lugar el error de predicción  $e[n]$ :

$$y[n] = \hat{y}[n, \theta] + e[n] \Rightarrow e[n] = y[n] - \hat{y}[n, \theta] \quad (7.61)$$

Luego, se busca por el valor de  $\theta$  que minimice el error de predicción. De manera que deberá cumplir:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N l(k, \theta, e[k, \theta]) \quad (7.62)$$

donde la función  $l(\cdot)$  que define el índice de performance puede ser elegida mediante distintos criterios. Para más información ver [17].

2. Desde un punto de vista estocástico o probabilístico. Para esto se supone un modelo que incluye una variable aleatoria con una determinada función de densidad de probabilidad que la caracteriza. Se obtiene entonces una descripción completa del sistema desde el punto de vista probabilístico.

En este caso se supone que  $e$  es una variable aleatoria con pdf dada por  $f_e(y, \theta)$ .

Se puede calcular el valor de  $\theta$  que maximice la función de densidad de probabilidad de manera que se cumpla que

$$f(y|\hat{\theta}) \geq f(y|\theta) \quad (7.63)$$

Los métodos más comunes de estimación de parámetros utilizan estos dos enfoques. Si bien parecen distintos, debe tenerse en cuenta que ambos enfoques pueden estar relacionados. Por ejemplo, los estimados obtenidos por mínimos cuadrados y por el método de máxima verosimilitud son los mismos si  $e$  tiene distribución Gaussiana.

## 7.10 El Método de lo mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados es uno de los ejemplos más típicos de PEM cuando se cuenta con una estructura de regresión lineal.

En esta sección se dará una explicación básica del método de mínimos cuadrados para pasar a casos más complejos como mínimos cuadrados recursivos.

El estudio de mínimos cuadrados permitirá entender como funciona el proceso de identificación, regresión lineal y algunos aspectos relacionados al diseño del experimento de identificación.

Un análisis en detalle se encuentra realizado en el Apéndice C.

### 7.10.1 El método de los Mínimos Cuadrados (Least Squares)

En primer lugar se supone que el modelo puede escribirse en la forma de un regresor lineal. Por lo tanto la predicción de la salida del modelo estará dada por:

$$\hat{y}[n|\theta] = \varphi^T[n] \cdot \theta \quad (7.64)$$

donde

- $\varphi[k]$  depende las muestras de entrada y salida obtenidas hasta el instante  $n = n_s$ <sup>5</sup>.
- $\theta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \subset R^d$ .

Por ejemplo, para el modelo ARX, la  $\varphi[n]$  que permite calcular  $\theta$  está dada por:

$$\varphi[n] = [ -y[n-1] \quad -y[n-2] \quad \dots \quad -y[1] \quad u[n-1] \quad u[n-2] \quad \dots \quad u[1] ]^T \quad (7.65)$$

Luego, debe proponerse el criterio cuadrático a utilizar (función de pérdidas). El criterio más común utilizado (como por ejemplo, en las rutinas PEM de Matlab) tiene la siguiente estructura:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^T[n, \theta] \cdot e[n, \theta] \quad (7.66)$$

ya vista anteriormente.

Si bien esta estructura difiere en la estructura utilizada en el Apéndice C por el número  $N$  que aparece en el denominador, el cálculo del estimado es el mismo con la diferencia que el índice  $V_N(\theta)$  minimiza la varianza del error de predicción. (Ver [17] y [21]).

La estimación de parámetros se reduce entonces a hallar una estimación  $\hat{\theta}$  que minimice el valor de  $V_N(\theta)$ . Dicho valor se halla derivando  $V_N(\theta)$  e igualando a cero. Como resultado se tiene lo que se conoce como *ecuación normal* dada por:

$$\boxed{\left[ \frac{1}{N} \sum_{k=n}^N \varphi[k] \cdot \varphi^T[k] \right] \cdot \hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=n}^N \varphi[k] \cdot y[k]} \quad (7.67)$$

A partir de la cual se obtiene un mínimo global del criterio  $V_N(\theta)$  y es único si el término  $\left[ \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=n}^N \varphi[k] \cdot \varphi^T[k] \right]$  tiene inversa. Si se verifica lo anterior es posible despejar  $\hat{\theta}$  que estará dado por:

---

<sup>5</sup>Se supone que el instante inicial del experimento es  $n = 1$ .

$$\hat{\theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=n}^N \varphi[k] \cdot \varphi^T[k] \right]^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=n}^N \varphi[k] \cdot y[k]. \quad (7.68)$$

ecuación que puede escribirse en la forma matricial

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T Y. \quad (7.69)$$

Un sencillo cálculo permite demostrar que para obtener  $\hat{\theta}$  es necesario recolectar  $N = 3n$  donde  $n$  es el orden del modelo.

### 7.10.2 Mínimos Cuadrados Recursivos (Recursive Least Squares)

Como se vio en la sección anterior en base a un número mínimo de muestras  $N$  se obtuvo una primer estimación del valor de  $\theta$  denominada  $\hat{\theta}$ .

Por ejemplo, supóngase que se quiere estimar un sistema de orden  $n = 3$ . La cantidad de muestras mínimas necesarias del sistema sería  $N = 9$  para obtener un primer valor  $\hat{\theta}$ .

Ahora, podrían darse las siguientes situaciones:

- Durante el intervalo en que se toman las muestras, no aparecen a la salida todos los fenómenos que se quieren modelar.
- Se dispone de un sistema que es capaz de adquirir mayor cantidad de muestras de manera que podría ser útil obtener información de las mismas.
- Que la identificación se realice “*on-line*”. De esta manera se agrega información a medida que se recolectan las muestras de la entrada y la salida.

De esta manera, la ecuación normal obtenida para mínimos cuadrados

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T Y \quad (7.70)$$

se lleva a una forma que permite el cálculo secuencial a medida que incrementan las muestras de entrada y salida, es decir, cuando se incrementa el valor de  $N$ .

Como resultado se obtiene la siguiente ecuación que determina el valor de estimado para el instante  $N + 1$ :

$$\hat{\theta}[N + 1] = \hat{\theta}[N] + K[N + 1] \left[ y[N + 1] - \varphi^T[N + 1] \cdot \hat{\theta}[N] \right] \quad (7.71)$$

donde

- $\hat{\theta}[N]$  es el estimado calculado con las  $3n$  primeras muestras obtenidas que puede ser calculado por mínimos cuadrados estándar.
- $K[N + 1] = P[N + 1] \cdot \varphi[N + 1]$
- $P[N] = [\Phi^T[N] \cdot \Phi[N]]^{-1}$

$$\bullet P[N + 1] = P[N] - \frac{P[N] \cdot \varphi[N + 1] \cdot \varphi^T[N + 1] \cdot P[N]}{1 + \varphi^T[N + 1] \cdot P[N] \cdot \varphi[N + 1]}$$

De manera que se tiene un algoritmo recursivo donde el error

$$e[N + 1] = y[N + 1] - \varphi^T[N + 1] \cdot \hat{\theta}[N] \quad (7.72)$$

puede considerarse como el error entre la salida real  $y[N + 1]$  y la salida predecida  $\hat{y}[N + 1] = \varphi^T[N + 1] \cdot \hat{\theta}[N]$  siendo  $K[N + 1]$  la “ganancia” de dicha corrección.

El desarrollo matemático se encuentra en el Apéndice C.

La importancia de comprender como funcionan estos métodos basados en la forma de regresión lineal es que los métodos que permiten obtener los modelos de estados se basan en los mismos principios.

### 7.10.3 Otros Métodos de Estimación de Parámetros

Para el caso de modelos cuyos modelo de regresión son fáciles de obtener, existen otros métodos que permiten calcular el mejor estimado de  $\theta$ . Entre ellos, los más conocidos son el método de máxima verosimilitud y el método de las variable instrumentales. Para más información ver [17].

## 7.11 Métodos de Identificación de Modelos de Estados.

Como es bastante predecible, obtener un modelo de regresión lineal de un modelo de estados no es tan sencillo como se vio que lo es para un modelo ARX. Es por esto que si bien los conceptos son los mismos, los métodos para obtener un modelo de estados varían.

Existen dos alternativas que se aplican a la estimación de modelos de estado:

1. PEM/mínimos cuadrados que es la forma clásica. El método consiste en llevar la forma de innovación a una forma de regresor lineal similar a una función transferencia para lo que se debe incorporar un observador de estados óptimo conocido como filtro de Kalman. Ver sección 7.11.1.
2. Método de Subespacio de Estados (*SubSpace-State Method*). Hace uso también del filtro de Kalman, pero obtiene en forma directa las matrices del modelo de estados.

En la figura 7.9 se muestra un cuadro que da una idea de los pasos que sigue cada método.

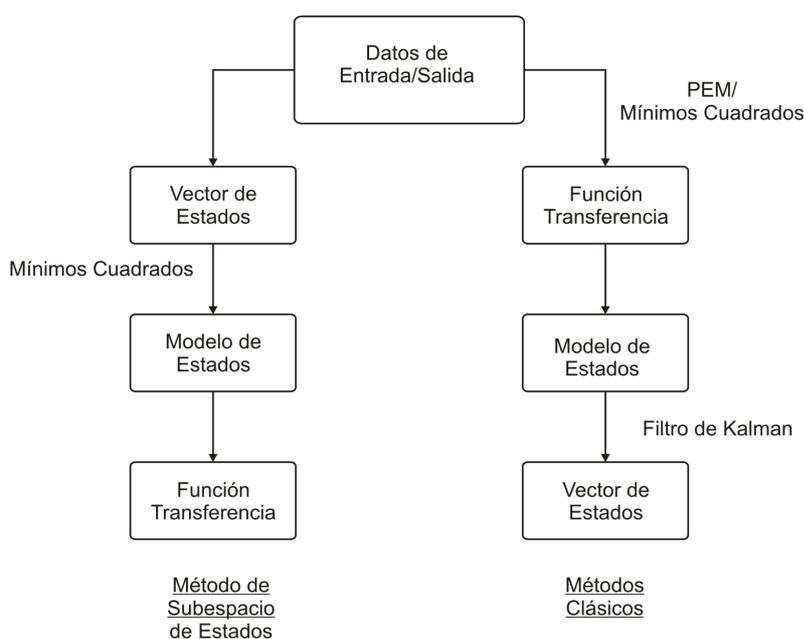


Figura 7.9: Comparación de cómo se obtiene un modelo utilizando los métodos clásicos de identificación y de subespacios de estados.

### 7.11.1 Estimación del Modelo de Estados mediante PEM

En primer lugar se considera la Forma de Innovación del modelo de estados. La misma se repite a continuación:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_D(\theta) \cdot x[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + w[n] \\ y[n] &= C_D(\theta) \cdot x[n] + D_D(\theta) \cdot u[n] + v[n]. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Si quisiera aplicarse cualquiera de los índices de optimización tal cual se vieron en las secciones anteriores, el primer paso sería llevar el modelo de innovación a la forma de un regresor lineal, de forma que debería obtenerse una estimación de la salida  $\hat{y}[n|\theta]$  en función de las entradas anteriores.

Si se considera al error  $e[n]$  como el error de predicción  $e[n] = y[n] - \hat{y}[n]$  entonces el valor esperado de  $\hat{y}[n|\theta]$  estará dado por:

$$\begin{aligned} \hat{x}[n+1, \theta] &= A_D(\theta) \cdot \hat{x}[n, \theta] + B_D(\theta) \cdot u[n] + K(\theta) \cdot [y[n] - C_D(\theta) \cdot \hat{x}[n, \theta]] \\ \hat{y}[n|\theta] &= C_D(\theta) \cdot \hat{x}[n, \theta] \end{aligned} \quad (7.74)$$

donde  $K(\theta)$  es la matriz que representa las ganancias del filtro de Kalman.

El error de predicción estará dado por:

$$e[n] = y[n] - \hat{y}[n] = y[n] - C_D(\theta) \cdot \hat{x}[n, \theta] = C_D(\theta) \cdot [x[n, \theta] - \hat{x}[n, \theta]] + v[n] \quad (7.75)$$

que denotará la parte de  $y[n]$  que no puede ser predecida por el modelo en función de las muestras anteriores.

De esta manera se llega la forma de innovación

$$\begin{aligned}\hat{x}[n+1] &= A_D(\theta) \cdot \hat{x}[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + K \cdot e[n] \\ y[n] &= C_D(\theta) \cdot \hat{x}[n] + e[n]\end{aligned}\tag{7.76}$$

forma a la cual se llegaba suponiendo que el ruido de medida y el ruido de proceso tenían distribución Gaussiana.

Volviendo a la expresión de  $e[n]$  se observa que el mismo depende los estados del sistema (que a su vez dependen de  $\theta$ ) de manera que el problema consiste en calcular los estados del sistema para cada instante y hallar  $\hat{\theta}$  que minimice el error.

### 7.11.2 Estimación del Modelo de Estados por el Método de Subespacio de Estados. (Subspace State-Space System Identification - 4SID)

Las matrices  $A_D$ ,  $B_D$ ,  $C_D$ ,  $D_D$  y  $K$  del modelo de innovación pueden estimarse directamente sin requerir ningún tipo de parametrización mediante *métodos de subespacio de estados*. El fundamento en el que se basan estos métodos es el siguiente: si la secuencia de vectores de estado  $x[n]$  es conocida, y además se conoce el valor de la entrada  $u[n]$  y de la salida  $y[n]$  la ecuación del modelo de innovación

$$y[n] = C_D(\theta) \cdot x[n] + D_D(\theta) \cdot u[n] + e[n]\tag{7.77}$$

puede considerarse como una regresión lineal donde la matriz  $C_D(\theta)$  y  $D_D(\theta)$  pueden estimarse por el método de los mínimos cuadrados.

Luego, el error  $e[n]$  puede ser determinado y tratado como una señal conocida en la ecuación

$$x[n+1] = A_D(\theta) \cdot x[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + K \cdot e[n]\tag{7.78}$$

que puede ser tratada también como una regresión lineal para las matrices  $A_D$ ,  $B_D$  y  $K$ .

Otra forma sería considerar ambas ecuaciones en simultáneo como una regresión lineal de las matrices  $A_D$ ,  $B_D$ ,  $C_D$  y  $D_D$  considerando  $y[n]$  y  $x[n+1]$  como **salidas simultáneas** y considerar los ruidos de proceso y medida como residuos de la regresión. En este caso la ganancia de Kalman  $K$  se calcula mediante el algoritmo descrito en la sección 7.12.

Lo que importa remarcar es que cualquiera sea el método aplicado **debe estimarse en cada instante el estado del sistema**  $x[n]$  lo que hace al filtro de Kalman esencial para la aplicación.

La idea básica de éste método es la siguiente:

Supóngase que se tiene una estimación de una secuencia de vectores de estado  $x[1], \dots, x[N]$  del modelo

$$\begin{aligned}x[n+1] &= A_D(\theta) \cdot x[n] + B_D(\theta) \cdot u[n] + K \cdot e[n] \\ y[n] &= C_D(\theta) \cdot \hat{x}[n] + D_D(\theta) \cdot u[n] + e[n]\end{aligned}\tag{7.79}$$

obtenidos a través de la observación de las señales de entrada y salida. Entonces para  $n = 1, 2, \dots, N$  se puede escribir el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}[n+1] \\ y[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_D & B_D \\ C_D & D_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[n] \\ u[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[n] \\ v[n] \end{bmatrix}\tag{7.80}$$

donde  $\hat{x}[n]$  y es una estimación del vector de estados  $x[n]$  del sistema real.

Se observa en la ecuación (7.81) que conocidas todas las variables, entonces es un modelo de regresión lineal de los parámetros del sistema dados por

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_D & B_D \\ C_D & D_D \end{bmatrix}. \quad (7.81)$$

Por lo tanto la estimación por mínimos cuadrados de las matrices del modelo estarán dadas por:

$$\Theta = \left( \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} \hat{x}[n+1] \\ y[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}^T[n] & u^T[n] \end{bmatrix} \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} \hat{x}[n] \\ y[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}^T[n] & u[n] \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (7.82)$$

La aproximación (7.82) se conoce como *aproximación N4SID directa*.

## 7.12 El Filtro de Kalman

En ambos casos, tanto PEM como N4SID, es condición necesaria conocer el estado del sistema ya sea en el instante actual como en los instantes anteriores.

Una herramienta comúnmente utilizada en los sistemas de control son los observadores de estados. Estos son estructuras que permiten obtener la evolución de aquellos estados que no son medibles en forma directa para, por ejemplo, cerrar un lazo de realimentación. (Para más información ver [8]).

Si bien existen varias formas de diseñar un observador existe uno que será óptimo: el *Filtro de Kalman*.

En forma resumida el filtro de Kalman es un algoritmo de procesamiento recursivo que resuelve el problema del cálculo de la estimación del vector de estados  $x \in R^n$  de un sistema de tiempo discreto descrito por una ecuación en diferencias lineal estocástica. El mismo permite la estimación de estados pasados, presentes y futuros además de permitir una solución eficiente de la estimación por mínimos cuadrados.

El filtro de Kalman provee una solución óptima a la estimación de los estados de un sistema descrito por el siguiente modelo de estados:

$$x[n+1] = A_D \cdot x[n] + B_D \cdot u[n] + w[n] \quad (7.83)$$

del cual se obtienen medidas afectadas por ruido dadas por:

$$y[n] = C_D[n] \cdot x[n] + v[n] \quad (7.84)$$

siendo  $w[n]$  y  $v[n]$  ruidos de proceso y ruidos de medida respectivamente que para el caso del filtro de Kalman ambos se consideran independientes, blancos y con distribución normal con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} p(w) &\sim N(0, Q) \\ p(v) &\sim N(0, R) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Si se observa las ecuaciones (7.83) y (7.84) se puede ver que, si  $w[n] = 0$ , la matriz  $A_D$  ( $n \times n$ ) relaciona el estado del sistema en el instante  $n$  con el estado en el instante

$n + 1$ . La matriz  $B_D$  relaciona la entrada de control  $u$  con el estado del sistema  $x$ . Luego, la matriz  $C_D$  relaciona el estado del sistema con la salida  $y$  en el instante  $n$ .

Se concluye entonces que entre ambas ecuaciones se tiene la información de lo ocurrido con el sistema en los instantes anteriores lo que permitirá obtener una regresión lineal.

Es evidente que, si se quisiera realizar una corrección el instante  $n + 1$ , dicha corrección podría realizarse ajustando el valor de  $w[n]$  mediante algún criterio. Esto, es de forma muy resumida lo que realiza el filtro de Kalman.

### 7.12.1 Planteo del Problema que resuelve el filtro de Kalman.

En primer lugar es necesario hacer las siguientes asignaciones:

- $\hat{x}^- [n] \in R^n$  es la estimación *a priori* del vector de estados en el instante  $n$ . Dicho valor puede ser considerado como un valor inicial del vector de estados o el vector de estados obtenido en una iteración anterior al instante  $n$ .
- $\hat{x}[n] \in R^n$  es la estimación *a posteriori* en el  $n$ -ésimo instante luego de medir  $y[n]$ .

Entonces, si  $x[n] \in R^n$  es el vector de estados real del sistema en el instante  $n$  (el cual es desconocido ya que sino el problema estaría resuelto) se pueden definir los errores *a priori* y *a posteriori* para el instante  $n$ :

$$\begin{aligned} e^- [n] &= x[n] - \hat{x}^- [n] \\ e[n] &= x[n] - \hat{x}[n] \end{aligned} \quad (7.86)$$

Luego, la covarianza del error *a priori* estará dada por:

$$P^- [n] = e^- [n]e^- [n]^T \quad (7.87)$$

y *a posteriori* será:

$$P[n] = e[n]e[n]^T \quad (7.88)$$

El objetivo que se propone es obtener las ecuaciones del Filtro de Kalman y lograr estimar el vector de estados *a posteriori*  $\hat{x}[n]$  para poder aplicar los algoritmos PEM o N4SID de forma que  $\hat{x}[n]$  se calcule como una combinación lineal de la estimación *a priori* y de una diferencia pesada entre el valor medido de  $y[n]$  y una predicción de la medición  $\hat{y}[n] = C_D[n] \cdot x^- [n]$ , o sea:

$$\hat{x}[n] = \hat{x}^- [n] + K (y[n] - C_D[n] \cdot x^- [n]) \quad (7.89)$$

ecuación donde se observa el parecido con mínimos cuadrados recursivos y donde la diferencia  $y[n] - C_D[n] \cdot x^- [n]$  es la innovación o residuo que, si es distinto de cero, indica la diferencia entre la salida actual del sistema y la salida predecida.

La matriz  $K$  de dimensiones  $n \times m^6$  (de forma análoga a mínimos cuadrados recursivos) es la ganancia de dicha corrección y dado que se busca minimizar el error, entonces, el valor de  $K$  será aquél tal que la **covarianza del error a posteriori**  $P[n] = e[n]e[n]^T$  sea **mínima**.

---

<sup>6</sup> $m$  es el número de salidas del sistema.

Si lo que se busca es un mínimo, entonces el procedimiento para el cálculo de  $K$  consiste en sustituir (7.89) en (7.86) y luego en (7.88) para luego derivar respecto de  $K$  e igualar a cero obteniéndose el valor de  $K$  que minimiza  $P[n]$  y que estará dado por:

$$K[n] = P^{-}[n] \cdot C_D^T[n] (C_D[n] \cdot P^{-}[n] \cdot C_D^T[n] + R[n])^{-1} \quad (7.90)$$

donde  $R[n]$  es la covarianza del ruido de medición  $v$  (ver ecuación (7.85)) y que a medida que se aproxima a cero, la ganancia de Kalman  $K$  pesa mucho más el error de predicción. Es decir, que se cuando se verifica que

$$\lim_{R[k] \rightarrow 0} K[k] = \frac{1}{C_D[k]} \quad (7.91)$$

se “cree” más en la medida  $y[n]$  que en la del predictor, por lo que el predictor “no está funcionando” tan bien como se espera.

Sin embargo, si la covarianza del error *a priori*  $P^{-}[n]$  se aproxima a cero, el algoritmo pesa menos al error de predicción. Es decir, si el límite

$$\lim_{P^{-}[k] \rightarrow 0} K[k] = 0 \quad (7.92)$$

quiere decir que la covarianza del error estimado *a priori*  $P^{-}[n]$  se aproxima de manera que la predicción  $C_D[n] \cdot x^{-}[n]$  por lo que salida del predictor es cada vez más *confiable*.

### 7.12.2 Algoritmo del Filtro de Kalman.

El funcionamiento del filtro de Kalman puede dividirse en dos partes que determinan dos conjuntos de ecuaciones:

1. *Time Update* (Actualización temporal): calculan la proyección hacia delante en el tiempo del vector del vector de estados y del estimado de la covarianza del error para obtener los *estimados a priori* para el paso siguiente  $n + 1$ .

Las ecuaciones que componen este grupo se conocen como ecuaciones predictoras.

2. *Measurement update* (Actualización de la medición): El filtro incorpora una nueva medición para el cálculo de la estimación *a priori* para mejorar la estimación *a posteriori*.

Para este caso, las ecuaciones se conocen como ecuaciones correctoras.

Ambos juegos de ecuaciones determinan un algoritmo predictor-corrector calculando las predicción en el instante  $n$  y aplicando las correcciones en el instante  $n + 1$ .

De esta manera, se pueden proponer los siguientes pasos para aplicar el algoritmo recursivo:

1. Como punto de partida se puede suponer o calcular valores iniciales de los valores *a priori*  $x^{-}[n]$  y  $P^{-}[n]$ .

2. El primer paso en la aplicación del algoritmo es calcular la ganancia de Kalman  $K$  que permitirá calcular la estimación del vector de estados  $\hat{x}[n]$ :

$$K[n] = P^{-}[n] \cdot H^T[n] (H[n] \cdot P^{-}[n] \cdot H^T[n] + R[n])^{-1} \quad (7.93)$$

3. Se mide la salida del sistema real  $y[n]$  y se calcula la estimación del vector de estados  $\hat{x}[n]$  *a posteriori*:

$$\hat{x}[n] = \hat{x}^{-}[n] + K (y[n] - C_D[n] \cdot x^{-}[n])^7 \quad (7.94)$$

4. Se calcula la covarianza de la estimación del error a posteriori:

$$P[n] = (I - K[n] \cdot C_D[n]) P^{-}[n] \quad (7.95)$$

Hasta aquí se realizó la actualización de la medición para el  $n$ -ésimo instante obteniéndose una primera estimación del vector de estados  $\hat{x}[n]$ . El paso siguiente sería actualizar el vector de estados y la covarianza del error de predicción *a priori* para que sean utilizados en los cálculos para el instante  $n + 1$ . Para esto se utilizan las ecuaciones de actualización temporal (*time update*)

5. Calcular el vector de estados *a priori* para el siguiente instante  $n + 1$ :

$$\hat{x}^{-}[n + 1] = A_D \cdot \hat{x}[n] + B_D \cdot u[n] \quad (7.96)$$

6. Calcular la nueva covarianza del error de predicción *a priori*:

$$P^{-}[n + 1] = A_D \cdot P[n] \cdot A_D^T + Q[n] \quad (7.97)$$

El proceso puede resumirse en el cuadro de la figura 7.10.

Con respecto a la aplicación del Filtro de Kalman, el mismo se utiliza en los algoritmos PEM y N4SID de Matlab, de manera que no será necesario para este proyecto la implementación del mismo. El objetivo de esta sección fue dar una introducción al método que permite obtener los estados de un sistema para determinados instantes de tiempo.

Para más información referirse a la bibliografía.

---

<sup>7</sup>Observar la similitud de la ecuación con la obtenida al analizar mínimos cuadrados recursivos.

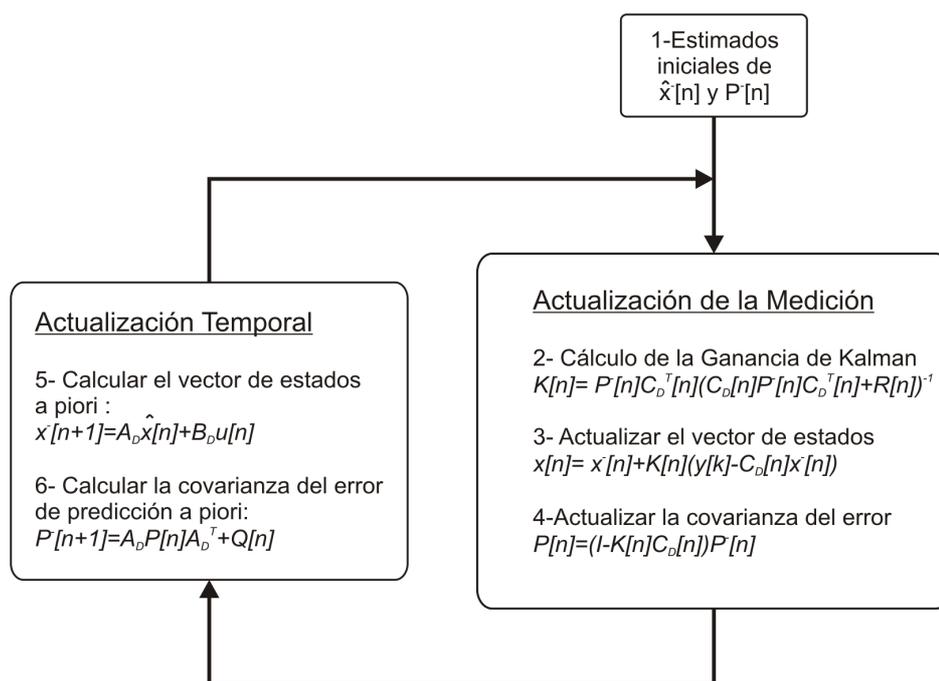


Figura 7.10: Algoritmo del filtro de Kalman.

## 7.13 El Procedimiento de Identificación

Hasta aquí se definieron algunas herramientas que definen y resuelven el problema de la identificación de un sistema cuyo modelo es desconocido pero desde un punto de vista enteramente teórico.

Dado que el objetivo es llevar todo esto a la práctica, el marco teórico es solo una parte de todo el proceso en sí. Es por esto que existen algunos pasos generales a seguir que permiten el diseño e implementación del experimento de identificación. Estos se detallarán en forma breve en las secciones siguientes retomándose en los capítulos siguientes.

El diseño, implementación y obtención de resultados se deja para los capítulos 9 y 10.

### 7.13.1 El procedimiento de identificación

En la práctica el proceso de identificación se divide en cinco etapas que serán tenidas en cuenta como guía.

1. *Obtención de los datos de entrada-salida.* Se aplica al sistema una señal de entrada y se analiza la evolución la salida. Dicha señal no es una señal cualquiera sino que depende del tipo de identificación que se está llevando a cabo y del modelo de sistema que se quiera obtener.
2. *Tratamiento previo de los datos obtenidos.* Una vez finalizado el experimento sobre la planta, los datos obtenidos pueden ser postprocesados con el objetivo de eliminar ruido, valores medios o alguna alteración de la señal original que facilite y mejore el proceso de identificación.

3. *Selección de la estructura del modelo.* Cuando se desea obtener un modelo paramétrico debe seleccionarse el tipo de estructura deseada para dicho modelo. Aquí es donde un modelo a partir de las leyes físicas que rigen la dinámica de la planta pueden ser un buen punto de partida. También pueden proponerse estructuras preestablecidas y verificar que se ajuste a los datos obtenidos de la realidad. En el caso de este proyecto se propondrán ambas alternativas eligiéndose la que arroje mejores resultados.
4. *Obtención de los parámetros del modelo.* Mediante algún método de estimación se obtienen los parámetros que mejor se ajustan al modelo propuesto.
5. *Validación del modelo.* Finalmente se procede a determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación.

En caso de determinar que el modelo no es válido, se repiten los pasos 1 a 5 hasta obtener un modelo válido. Lo anterior se resume en el siguiente cuadro:

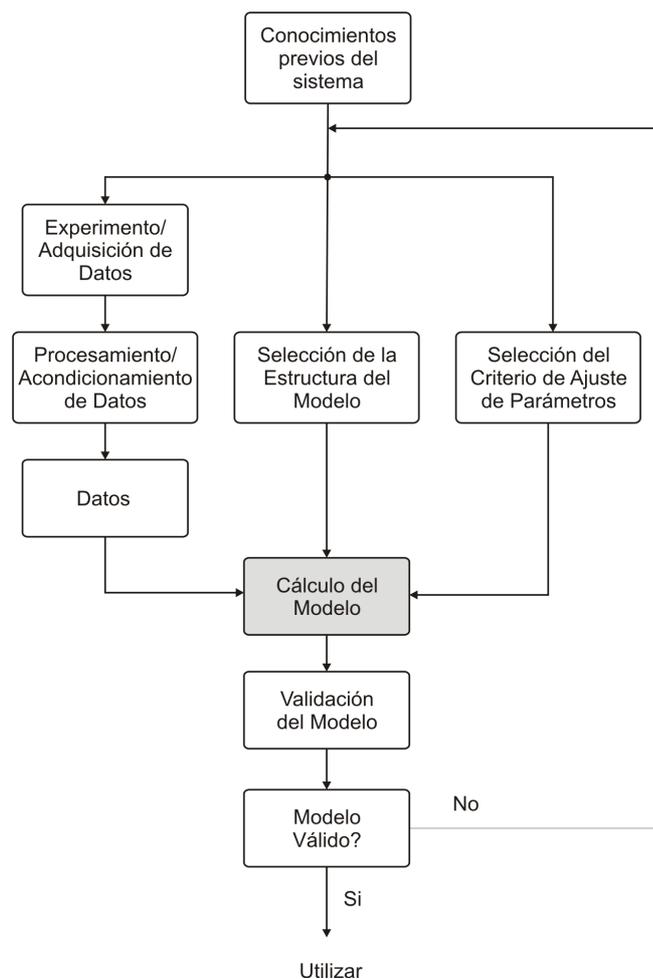


Figura 7.11: Pasos para identificar un sistema dinámico.

### 7.13.2 Paso 1: Obtención de los datos de entrada-salida

Esta parte comprende el diseño completo de lo que se denomina “*experimento de identificación*” al cual se dedicará un capítulo exclusivo ya que comprende también a componentes de hardware que se utilizarán en el diseño del lazo de control.

En líneas generales, el diseño del experimento de identificación deberá cumplir con los siguientes requisitos:

- Previo al ensayo de identificación:
  1. Contar con un modelo que se supone, representa al sistema incógnita. Esto permitirá:
    - Predecir los resultados de los experimentos básicos que se pueden realizar sobre el sistema para obtener mayor información.
    - Determinar que variables son de interés y predecir su comportamiento.
    - Obtener un primer conjunto de especificaciones para la selección y el diseño del hardware a utilizar. Por ejemplo, la determinación de la ubicación del polo más rápido del sistema permitirá determinar el ancho de banda del mismo y el diseño de filtros antialiasing.
  2. Asegurar que el sistema sea completamente controlable y completamente observable. Esto permitirá garantizar que la acción de control llegará a todos los estados y que  $y[n]$  contiene toda la información necesaria para que a partir de ellas se obtenga la evolución de los estados (requisito necesario para implementar un observador de orden completo como el Filtro de Kalman).
  3. Proveer una plataforma que permita llevar a cabo experimentos básicos sobre el sistema a identificar para incrementar el conocimiento sobre el mismo, por ejemplo, respuesta al escalón. Esto incluye:
    - La electrónica de potencia necesaria para excitar el sistema.
    - La electrónica necesaria para la adquisición de aquellas variables de interés.
  4. A partir de los experimentos básicos sobre el sistema determinar la frecuencia de muestreo a utilizar durante el experimento de identificación.
  5. Contar con una primera aproximación del modelo utilizando valores numéricos (a modo de valor inicial para los algoritmos recursivos). A partir del modelo continuo propuesto debe obtenerse el modelo discreto del sistema. Para esto es necesario el conocimiento de la frecuencia de muestreo.
- Para el ensayo de identificación:
  1. Proveer una plataforma que permita aplicar la señal  $u[n]$  y la adquirir las muestras de la salida  $y[n]$  (en este caso la posición en azimut) de manera confiable y manteniendo la frecuencia de muestreo determinada para mantener la validez del experimento.
  2. Un algoritmo que permita generar la señal  $u[n]$  que cumpla la condición de persistencia en la excitación (*persistently exciting*).

3. El hardware a implementar deberá almacenar la cantidad de datos recolectados para que estos puedan ser post-procesados con la ayuda de una computadora.

### 7.13.3 Paso 2: Tratamiento previo de los datos obtenidos.

Una vez realizado el experimento, puede que los datos todavía no sean “aptos” para ejecutar un algoritmo de identificación. Esto se debe a que pueden existir deficiencias en el experimento que introduzcan errores en los datos adquiridos y que por lo tanto deben ser corregidos.

Las posibles deficiencias pueden ser:

1. Perturbaciones de alta frecuencia muy por encima de las frecuencias de interés (ancho de banda del sistema). Éstas pueden deberse a frecuencias de muestreo innecesariamente altas o a filtros antialiasing mal diseñados de manera que, si no es posible modificar el experimento puede realizarse un submuestreo de la señal teniendo en cuenta un nuevo filtro antialiasing implementado digitalmente.
2. Cortes abruptos o desviaciones abruptas, por ejemplo de la media (*outliers*). Son aquellas desviaciones que pueden influir de forma importante en el resultado del algoritmo de estimación, pero que nada tiene que ver con el sistema real y que no deben ser tenidos en cuenta como parte de las señales de entrada y salida.
3. Desviaciones lentas (drift) u offsets, perturbaciones de baja frecuencia y en algunos casos periódicas. Existen dos alternativas para hacer frente a este problema:
  - I. Remover todas las perturbaciones de los datos obtenidos. Esto incluye restar directamente los offsets, filtrar componentes de determinada frecuencia, etc.
  - II. Suponer un modelo de sistema que modele la entrada de ruido.

Soluciones a los problemas se propondrán una vez realizado el experimento y analizados los datos obtenidos de forma que este tema se retomará oportunamente más adelante.

### 7.13.4 Paso 3: Selección de la estructura del modelo.

Una vez obtenidas las muestras de entrada y salida, acondicionadas, y además, una herramienta que ejecute los algoritmos de identificación para una amplia variedad de posibles modelos, lo único que resta es elegir la estructura de modelo a utilizar.

Debe recordarse que se tienen tres objetivos principales:

1. Estimar los parámetros del modelo de estados propuesto.
2. Validar el modelo
3. Estimar los parámetros de la función transferencia obtenida.

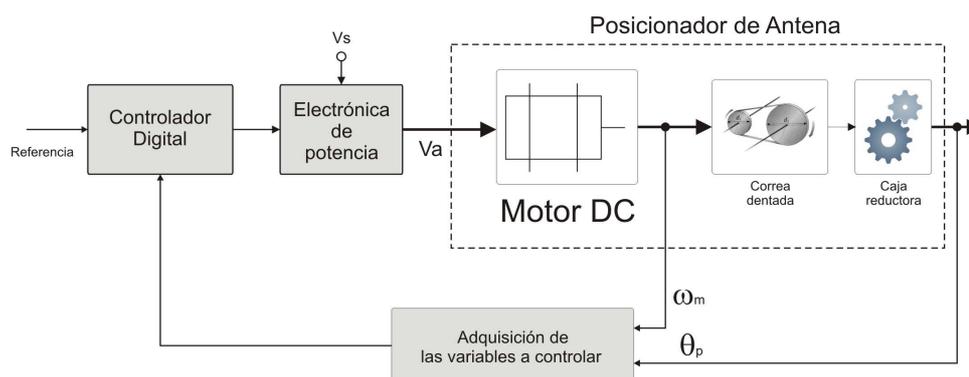


Figura 7.12: Diagrama en bloques del esquema de control propuesto para el posicionador de antenas.(Azimut).

Por lo tanto, puede darse el caso que el modelo propuesto no sea correcto y por lo tanto deba modificarse aunque eso no puede establecerse a priori. Otro aspecto importante es que, si se observa el esquema de control propuesto (ver figura 7.12) y el modelo de estados propuesto (ecuación (7.98))

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K_b/L_a & 0 \\ K_i/J_{eq} & -B_{eq}/J_{eq} & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (7.98)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

y además, la función transferencia obtenida en el Capítulo 5:

$$H(s) = \frac{\theta_p(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{K'}{s \cdot (sK_E + 1) \cdot (sK_M + 1)} \quad (7.99)$$

se concluye que solamente describen, o al menos se supone, al posicionador de antenas (bloque con líneas punteadas).

Ahora, si se considera la entrada al sistema como la salida del controlador (que genera la señal  $u[n]$ ) entonces la electrónica de potencia pasa a ser parte del sistema a identificar, de manera que se tiene un *modelo "ampliado" del posicionador*.

Esto se muestra en la figura 7.13.

Por lo tanto, se demuestra que es razonable considerar a esta altura distintas alternativas de identificación así como modificaciones futuras del modelo propuesto de acuerdo a los resultados obtenidos, principalmente cuando se incorpore la electrónica de potencia.

Se proponen entonces las siguientes líneas de trabajo que se muestran en el Cuadro 7.2 como punto de partida.

Debe tenerse en cuenta que el procedimiento no será estricto y los modelos utilizados pueden ir cambiando. Lo anterior solo se considera como un punto de partida.

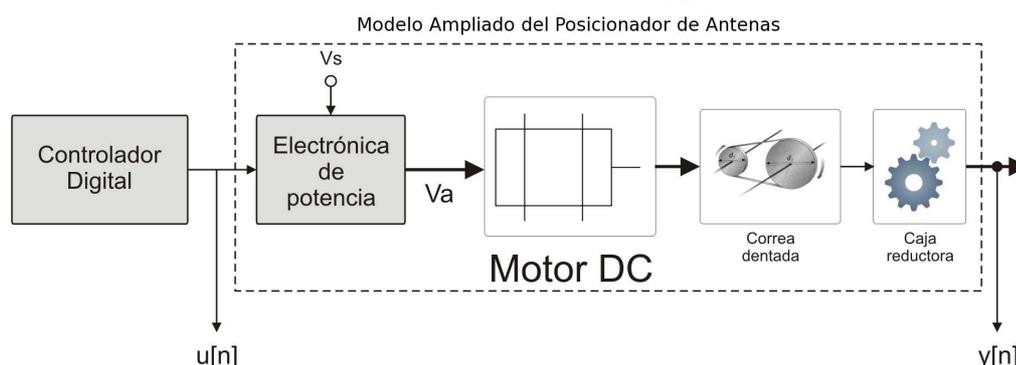


Figura 7.13: Bloques que componen el modelo ampliado del posicionador (líneas punteadas).

Cuadro 7.2: Tareas propuestas para la estimación del modelo de estados del posicionador de antena.

|  | Procedimiento 1       | Procedimiento 2  | Procedimiento 3  |
|--|-----------------------|--|--|
| Modelo a estimar/Verificar                 | Función Transferencia | Modelo de Estados  | Modelo de Estados  |
| Utiliza Modelo preestablecido (Ready-Made) | SI. Modelo: ARX       | SI Modelo: Modelo de estados general (Sin fijar valores de las matrices A y B) | NO   |
| Utiliza Modelo propuesto (Tailor-Made)     | NO                    | NO   | SI. Modelo: Modelo de estados propuesto en el Capítulo 4.  |
| Orden del modelo                           | 3 y 5                 | 3 y 5  | 3  |
| Algoritmo de Identificación a utilizar     | PEM                   | PEM y N4SID  | PEM (El SIT no soporta N4SID para modelos preestablecidos) |

### 7.13.5 Paso 4: Obtención de los parámetros del modelo.

Ya se adelantó en la sección anterior que los algoritmos a utilizar son PEM y N4SID implementados por Matlab. De acuerdo a la documentación [19], PEM minimiza la función  $V_N(\theta)$  ya definida.

En el caso de N4SID, el procedimiento es similar al visto en la sección 7.11.2. Según la documentación el método utilizado se describe en publicación [27].

### 7.13.6 Paso 5: Validación del modelo.

Una vez hallado  $\hat{\theta}_N$  y obtenido un modelo es necesario determinar:

1. Si es lo suficientemente bueno para la aplicación que será utilizado.
2. Cuan apartado se encuentra del sistema real.
3. Si el modelo y los datos son consistentes con la estructura propuesta.

Para el primer caso, se compara la respuesta del sistema con los datos de validación no utilizados para obtener el modelo. Esto implica que el experimento de identificación se realice más de una vez o que parte de los datos obtenidos se utilizan para identificar el sistema y los restante para validarlos.

En el segundo caso, lo que se miden son las cotas del error que existe entre la respuesta del sistema real y el modelo obtenido. De esta manera se busca analizar la covarianza de  $\hat{\theta}_N$  a partir de error entre la entrada y la salida. Para ello se utiliza la siguiente matriz de covarianza dada por (ver [20]):

$$\text{cov} \{ \hat{\theta}_N \} \sim \frac{1}{N} E \{ e^2[n] \} \left[ \text{cov} \left\{ \frac{d}{d\theta} y[k | \theta] \right\} \right]^{-1}. \quad (7.100)$$

En el último caso, se calculan los residuos del error dados por:

$$e[n] = y[n] - \hat{y}[n | \hat{\theta}_N] \quad (7.101)$$

y verificar si se cumple que

- $|e[n]| < C$ .
- $e[n]$  y  $u[n]$  son variables aleatorias independientes.

Las herramientas de validación estándar son análisis de residuos (*residual analysis*) y validación cruzada (*cross validation*) donde el modelo es analizado usando los datos de validación adquiridos y la salida es comparada con la salida medida.

Sobre estos temas se volverá más adelante cuando se esté en la etapa de verificación del modelo (Capítulo 10).

## 7.14 Resumen.

En este capítulo se dio una introducción a las técnicas de Identificación de Sistemas con una clara inclinación hacia el problema a resolver que es obtener el modelo de estados del posicionador de antenas tomando como punto de partida el modelo hallado en el Capítulo 4.

Se describieron las diferentes alternativas que existen para identificar un sistema haciendo hincapié que no existe un método predefinido para cada problema sino que las suposiciones teóricas deben ir acompañadas con experimentos prácticos sobre el sistema que se pretende modelar.

Con este capítulo se pone fin al marco teórico principal que se cree necesario para continuar con el avance del proyecto. En caso de ser necesario ampliar otras cuestiones teóricas, esto se realizará oportunamente con el avance del mismo.

# Capítulo 8

## Hardware. Primera Parte.

### 8.1 Introducción

En los Capítulos 3 y 4, se mostró a modo de diagrama en bloques la estructura del sistema de medida a implementar conforme a los estándares de la IEEE donde, sin entrar en detalle, quedaron definidos los distintos subsistemas necesarios para la implementación del sistema.

En el Capítulo 4, la atención se centró sobre el posicionador de antena con el objetivo de poder determinar como se compone la estructura del mismo y aquellos componentes que permiten el movimiento (motor de corriente continua, sistema reductor, etc.) para establecer un modelo matemático y además determinar las características técnicas del mismo ya que estas últimas serán las especificaciones que se deberán tener en cuenta a la hora del diseño de los subsistemas relacionados con el posicionador.

En este capítulo se describieron los componentes electrónicos (Hardware) a utilizar en cada subsistema así como los criterios de selección considerados para aquellos que no habían sido predefinidos al comienzo del proyecto.

La organización de este capítulo es la siguiente. En primer lugar, se hace un repaso de la estructura a implementar. Luego, cada sección corresponde a un subsistema (bloque) donde se detallan los requerimientos de los bloques relacionados que determinaran las especificaciones del subsistema en cuestión. Luego, se analizan los diferentes criterios de selección considerados y finalmente se establece que componente se va a utilizar.

Cabe mencionar que cada subsistema puede estar compuesto por más de un componente que forme parte de un nivel más bajo, es decir, que cada subsistema puede dividirse en subsistemas de menor nivel. El diseño del lazo de control será del tipo *Top-Down* (Hacia Abajo).

#### **Sobre la selección del Hardware y la aplicación de Identificación de Sistemas.**

Un aspecto a tener en cuenta es que parte del hardware seleccionado será utilizado para el experimento de identificación del posicionador propuesto en el Capítulo 7 y sobre el que se darán más detalles en el capítulo siguiente. Es por esto que algunas de las especificaciones serán justificadas en el Capítulo 9.

### 8.1.1 Estructura del Sistema de Medida. Subsistemas.

En la figura 3.3 del Capítulo 3 se mostró el diagrama en bloques del sistema de medida a implementar conforme al estándar IEEE. En ella se observan los distintos subsistemas mencionados anteriormente y como se relacionan entre sí. La misma se repite a continuación:

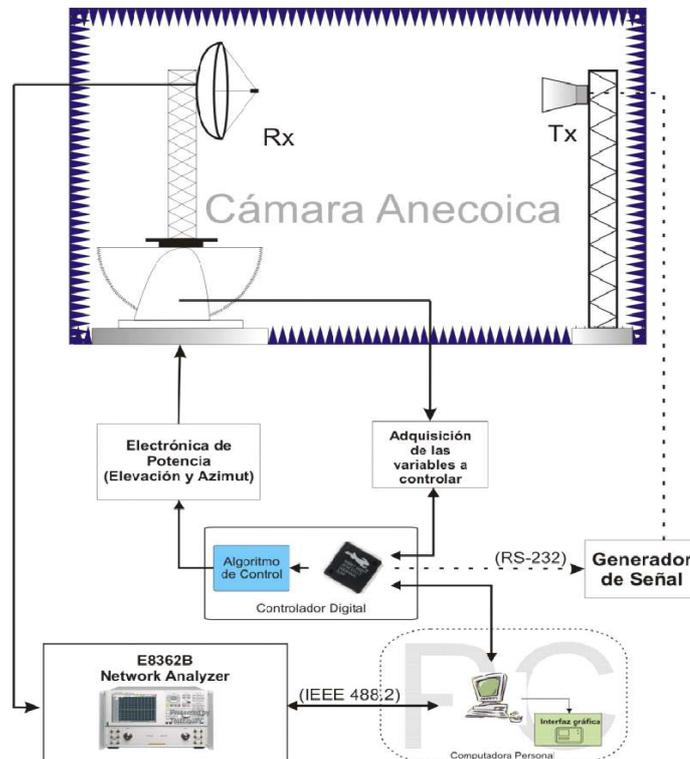


Figura 8.1: Estructura del sistema de medida a implementar en la cámara anecoica del IAR

Siguiendo el esquema de diagramas en bloques se buscará la manera más organizada de definir y especificar el hardware.

A partir de los subsistemas propuestos se puede hacer la división entre aquellos componentes predefinidos (como se especificó en el Capítulo 3) y aquellos que es necesario desarrollar.

- Subsistemas predefinidos:
  1. Analizador de Redes (Network Analyzer) Agilent E8362B.
  2. Computadora Personal con interfaz GPIB incorporada.
  3. Generador de señal que alimenta la antena de referencia. (Inicialmente conectado a la Computadora Personal).
- Subsistemas a implementar:

1. Controlador Digital.
2. Electrónica de Potencia.
3. Subsistema de Adquisición.

En las siguientes secciones se hará mayor énfasis al diseño los subsistemas que necesitan ser desarrollados. Con respecto a aquellos elementos predefinidos se dará una breve introducción a su funcionamiento dentro del sistema de medida y a como se vinculan con el resto de los subsistemas.

## 8.2 Subsistema Controlador Digital.

Por su ubicación dentro del sistema de medida, se puede observar en la figura 8.1.1 que se encuentra relacionado con los siguientes subsistemas:

- Computadora Personal.
- Electrónica de Potencia.
- Subsistema de Adquisición.

De manera que a la hora de la selección de mismo no solo se tuvo en cuenta las prestaciones desde el punto de vista de la capacidad de procesar un algoritmo de control sino que también fue necesario tener en cuenta la comunicación con los distintos subsistemas, principalmente con la electrónica de potencia y el subsistema de adquisición ya que el mismo cuenta con un componente predefinido que es el transductor de posición (Encoder). En el caso de la Electrónica de Potencia, ambos subsistemas fueron especificados en forma conjunta para poder garantizar la comunicación con el controlador digital.

### 8.2.1 Requerimientos del Controlador Digital.

El controlador elegido deberá no solo cumplir los requerimientos específicos de los subsistemas vinculados con el mismo sino también los requerimientos generales del sistema de medida especificados es en capítulo 3.

Por ser un controlador digital será necesario utilizar una Unidad de Procesamiento Central digital (*Central Processing Unit* o CPU) basada en un microcontrolador o un microprocesador que permita implementar un control dedicado o embebido (del inglés *Embedded Control*).

Las especificaciones principales que deberá cumplir la CPU se listan a continuación:

- Proveer una interfaz capaz de comunicarse con el encoder de posición. El mismo utiliza una Interfaz Serie Sincrónica (SSI también conocida como SPI).
- Proveer una interfaz capaz de generar una señal por modulación por ancho de pulso (Pulse Width Modulation - PWM). (Ver sección 8.3).

- Subsistema de Adquisición. Deberá proveer interfaces que permitan la comunicación con los subsistemas de adquisición, que incluyen la adquisición de la posición, velocidad y corriente de armadura si se requiere realimentar los estados del sistema. (Por cuestiones que se verán más adelante estas interfaces serán del tipo serie).
- Escalabilidad. Es uno de los requerimientos del sistema de medida y contempla la posibilidad de expandir el sistema para controlar ambos sentidos de movimiento (azimut y elevación).
- Posibilidad de controlar ambos sentidos de movimiento ya que en el futuro se prevee ampliar en control del movimiento a azimut y elevación. También deberá permitir implementar un control descentralizado en el caso de requerir un controlador independiente para cada sentido de movimiento.
- Proveer un entorno de desarrollo amigable y en lo posible que permita programar en un lenguaje conocido y de alto nivel (preferentemente en el lenguaje de programación C).
- Que el lenguaje de programación permita implementar de forma sencilla y rápida un algoritmo de control. Esto incluye disponer de librerías que permitan el manejo completo del hardware.
- Que permita la integración de los distintos subsistemas de forma rápida y sencilla.
- Teniendo en cuenta las posibles ampliaciones y correcciones, el dispositivo debe ser reprogramable y no del tipo programable una sola vez o OTP (del inglés *One-time-programmable*).
- Que en lo posible se encuentre disponible en Argentina y a un costo razonable.

Bajo esta premisas generales y al no existir la obligación de utilizar un determinado modelo de microprocesador es que se inició la búsqueda a través de los distintos fabricantes a fin de hallar la opción más conveniente desde el punto de vista práctico y económico.

### 8.2.2 Selección del Controlador Digital.

Como se dijo en la sección anterior, el controlador digital estará basado en una CPU para lo cual será necesario seleccionar un microprocesador (*MicroProcessor Unit* o MPU) comercial que cumpla con los requerimientos especificados en la sección 8.2.1.

En primer lugar se optó por comenzar la búsqueda en el terreno de los microcontroladores (*Micro Controller Units* o MCUs) ya que estos son los más utilizados en este tipo de aplicaciones debido a que, además de un núcleo que contiene la CPU, cuentan con módulos *On-chip* (en el mismo integrado) como memoria RAM y ROM (o Flash), puertos de entrada y salida (I/O ports) diversos periféricos como módulos de comunicaciones (UARTs<sup>1</sup> o USARTs<sup>2</sup>, puertos de comunicaciones para distintos protocolos como CAN o Ethernet, etc.), osciladores internos, conversores Analógico/Digitales y demás módulos dependiendo si fue diseñado para una aplicación específica o es de uso general, mientras que en el caso de los microprocesadores solamente se cuenta con la CPU (aunque la tendencia

es a incorporar cada vez más periféricos on-chip) requiriendo, por ejemplo, la adición de memoria ROM y RAM externas para almacenar el programa a ejecutar, UARTs si se quisiera establecer una comunicación con un periférico externo y demás componentes que permitan el funcionamiento del integrado en cuestión.

Además debe tenerse en cuenta que en muchos casos el núcleo de los microcontroladores se encuentra basado en CPUs de microprocesadores conocidos, como por ejemplo, la línea C51 de Atmel basada en la CPU de Intel 8080.

Si bien comparar microprocesadores o microcontroladores es bastante difícil, más aún cuando no todos los requerimientos del proyecto están bien definidos, la selección se realizó siempre en base a las especificaciones establecidas en el Capítulo 3 y en la sección anterior.

El proceso de búsqueda y selección comenzó por las marcas más conocidas como Microchip o Freescale (ex Motorola) analizando los productos recomendados para el control de movimiento de motores de corriente continua. Ambas compañías ofrecen diversas soluciones en lo que respecta a microcontroladores para aplicaciones de control de movimiento (*motion control*) en lo que sería la gama intermedia de productos (sin entrar en el terreno de los microprocesadores más complejos, como por ejemplo la línea Power Architecture de Freescale). Además, ofrecen otra alternativa que son los Controladores Digitales de Señales (*Digital Signal Controllers* o DSCs). Estos dispositivos consisten en un híbrido compuesto por un microcontrolador y un Procesador Digital de Señal (DSP) con el objetivo de mejorar la performance del microcontrolador si la aplicación requiere realizar algún tipo de procesamiento de señal ya que el DSP posee una arquitectura optimizada para realizar operaciones de suma, multiplicación y acceso a memoria superando en velocidad al microcontrolador estándar y reduciendo el costo de una aplicación que requiera un microcontrolador y un DSP al estar ambos integrados en un mismo chip.

Dentro de la línea Microchip se tuvieron en cuenta (en base a las guías de selección proporcionadas por el fabricante) las líneas de microcontroladores PIC16 y PIC18, siendo el PIC18F4431 la opción que mejor se adaptaba a un control de posición como el propuesto. El escalón siguiente propuesto por Microchip ya se encuentra dentro de la línea de los DSC donde se halla la familia dsPIC33 contando ya con un cambio en la arquitectura del controlador.

Ambas recomendaciones del fabricante para ser implementadas en lazos de control de posición utilizando motores de corriente continua no son casuales, ya que cada unidad cuenta no solo con un núcleo encargado del procesamiento, sino también con periféricos integrados (*on-chip*) que simplifican la implementación práctica. Las características de mayor interés analizadas en ambos modelos se muestran en el cuadro 8.1.

En el caso Freescale, esta compañía también ofrece microcontroladores (MCUs) y controladores digitales de señales (DSCs). Dentro de los microcontroladores se comenzó la búsqueda por la línea más baja que son los microcontroladores de 8 bits donde se encuentra la familia MC68HC08 realizándose el mismo análisis que para el caso de Microchip.

Freescale también ofrece microcontroladores con arquitectura de 16 bits de uso general en su línea MC68HC16 y también DSCs en su línea MC56800. Ambas familias también fue-

---

<sup>1</sup>UART: son las siglas en inglés de “Universal Asynchronous Receiver-Transmitter” (“Transmisor-Receptor Asíncrono Universal”).

<sup>2</sup>USART: son las siglas en inglés de “Universal Synchronous/Asynchronous Receiver-Transmitter” (“Transmisor-Receptor Síncrono/Asíncrono Universal”). Si bien es una UART, permite también establecer comunicaciones sincrónicas.

Cuadro 8.1: Características de los controladores Microchip considerados.(Fuente: Microchip [28]).

| MODELO                             | PIC18F4431         | dsPIC33F601x       |
|------------------------------------|--------------------|--------------------|
| Tipo de Controlador                | MCU                | DSC                |
| Arquitectura                       | 8 bits             | 16 bits            |
| Frecuencia de operación del núcleo | 40 MHz             | 40 MHz             |
| Memoria RAM                        | 768 bytes          | 16 kbytes          |
| Memoria ROM                        | 256 bytes          | 64 kbytes          |
| Memoria Flash                      | 8 kbytes           | 256 kbytes         |
| Pines I/O                          | 40                 | 68                 |
| Convertor A/D                      | 10 bits/9 canales  | 10 bits/16 canales |
| Contadores (Timers)                | 1 8-bits/3 16-bits | 9 16-bits          |
| Interrupciones externas            | 3                  | 5                  |
| Watchdog                           | Si                 | Si                 |
| Programación On-board              | Si                 | Si                 |
| Interfaces de comunicaciones SPI   | 1                  | 2                  |
| Módulo UART                        | 1                  | 1                  |
| Interfaz PWM                       | 6 canales.         | 8 canales.         |

ron analizadas mediante un estudio comparativo en base a los requerimientos establecidos para el controlador digital al igual que en el caso de Microchip. Los puntos considerados relevantes se resumen en el cuadro 8.2<sup>3</sup>.

Una vez determinados los posibles candidatos se procedió al análisis de los entornos de desarrollo necesarios para la programación de los mismos.

### Entornos de desarrollo de Microchip y Freescale.

Un punto importante, y decisivo a la hora de la elección que se tuvo en cuenta fue los entornos de desarrollo o IDE (del inglés *Integrated Development Environment*) que ofrecen cada uno de los fabricantes. Si bien la programación en lenguaje Assembler siempre es posible, dada la magnitud del proyecto una de las especificaciones era utilizar un lenguaje de alto nivel conocido, preferentemente C, que permitiera acelerar los tiempos de programación. Además, contar con un paquete de librerías que permitieran ejecutar las operaciones más comunes, como por ejemplo el manejo de un puerto, evita reescribir rutinas de código de uso habitual y además permite utilizar código estudiado y testeado por especialistas en el área. Ambos fabricantes ofrecen entornos de desarrollos basados en C:

- MPLab en el caso de Microchip.
- CodeWarrior en el caso de Freescale.

<sup>3</sup>En el caso de Freescale, al no contar con una recomendación del fabricante para la aplicación deseada, se analizaron las familias completas por lo que los valores que se muestran pueden variar para cada modelo particular.

Cuadro 8.2: Características de los controladores Freescale considerados. (Fuente: Freescale [29]).

| Familia                    | MC68HC08           | MC68HC16          | MC56F80x          |
|----------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| Tipo de Controlador        | MCU                | MCU               | DSC               |
| Arquitectura               | 8 bits             | 16 bits           | 16 bits           |
| Frecuencia Operación       | 32 MHz             | 16 MHz            | 60 MHz            |
| Memoria RAM                | 512 bytes          | 4 kbytes          | 2 kbytes          |
| Memoria ROM                | No                 | 8 kbytes          | No                |
| Memoria Flash              | 16 kbytes          | No                | 16 kbytes         |
| Pines I/O                  | 16                 | 16                | 11                |
| Convertor A/D (Máx)        | 10 bits/10 canales | 10 bits/8 canales | 10 bits/8 canales |
| Contadores (Timers)        | 2 8-bits/3 16-bits | 8 16-bits         | 8 16-bits         |
| Interrupciones externas    | 6                  | 7                 | 4                 |
| Watchdog                   | Si                 | Si                | Si                |
| Programación On-board      | Si                 | Si                | Si                |
| Int. de Comunicaciones SPI | 2                  | 2                 | 2                 |
| Módulo UART                | 1                  | 2                 | No                |
| Interfase PWM              | 6 canales          | 2 canales         | 6 canales         |

Dichos entornos de desarrollo fueron analizados llegando a la conclusión que las versiones gratuitas nos disponían de la suficiente cantidad de librerías necesarias para la puesta en marcha rápida, como por ejemplo, el manejo de interfaces de comunicación, manejo de memoria, etc; y el costo de las versiones más completas era demasiado el elevado. Si a lo anterior se le suma la necesidad de contar con un kit de desarrollo, los costos se incrementan aún más.

De esta manera, el entorno de desarrollo provisto se convirtió en un factor decisivo en la búsqueda del control a utilizar.

### Conclusión sobre las opciones de Microchip y Freescale.

A partir del análisis realizado en las secciones anteriores se concluye que en primer lugar, los microcontroladores de 8 bits quedarían descartados no solo por la poca memoria disponible, sino también porque se prevee la posibilidad que la aplicación requiera ejecutar operaciones matemáticas de punto flotante y además la adquisición de señales con convertidores analógico digitales (*Analog-to-Digital converters* o A/D) cuya longitud de palabra (aún no definida) podría ser mayor a 8 bits por lo que sería conveniente contar con un microprocesador de 16 bits. En ese caso, las arquitecturas de 16 bits ya sean los modelos propuestos de microcontroladores o DSCs serían los posibles candidatos. Las principales desventajas que se encontraron en estos productos fueron las siguientes:

- Se encuentran diseñados para controlar un único motor.

- No poseen la cantidad de interfaces serie necesarias para realizar un control por realimentación de estados (recordar que para un solo sentido de movimiento se prevee utilizar tres interfaces SSI).
- Los entornos de desarrollo no son gratuitos.
- Los entornos no de desarrollo no cuentan con librerías que permitan una implementación rápida del sistema.

De manera que la elección de cualquiera de los modelos propuestos no cumpliría una de las especificaciones del sistema que sería la escalabilidad del mismo previendo posibles ampliaciones futuras. Cabe mencionar que también se tuvo en cuenta la línea de microcontroladores AVR de 8 bits y 16 bits de ATMEL llegándose a las mismas conclusiones.

En base a lo anterior es que decidió continuar la búsqueda de una unidad que permitiera superar las falencias encontradas en los modelos analizados y que se encontrara en un nivel intermedio entre un microcontrolador o DSC dedicado a una aplicación específica y una computadora del tipo SBC (*Single Board Computer*) de uso general basadas en microprocesadores más complejos, por ejemplo, arquitecturas de 32 bits. Es así como se llegó a la compañía Rabbit Semiconductor[30] y a la elección del módulo RCM3000 basado en el microprocesador Rabbit 3000 al cual se dedica la sección siguiente y que será utilizado para el diseño e implementación del controlador digital del sistema de medida.

### 8.2.3 Microprocesadores y Módulos Rabbit.

En primer lugar es necesario hacer la siguiente distinción. Rabbit es una línea de microprocesadores o CPUs como se definió en la sección 8.2.2 por lo que, si bien están compuestos por una unidad central de procesamiento y demás periféricos como contadores, UARTs, unidad de manejo de memoria, etc., a diferencia de los microcontroladores o DSC vistos en la sección anterior no cuentan, por ejemplo, con algo fundamental como la memoria para almacenar el programa o las variables del mismo, los cristales que proveen el clock del sistema y demás componentes necesarios para el funcionamiento. Esto representa una dificultad ya que el diseño de una placa que provea el hardware necesario solamente para el funcionamiento el microprocesador sería extremadamente compleja de llevar a la práctica con los recursos que se cuentan para el proyecto.

Dado que el problema anterior es común a cualquier desarrollo que quiera utilizar un microprocesador de este fabricante, la compañía Rabbit Semiconductor ofrece la solución de utilizar módulos pre-armados cuyo componente central es el microprocesador Rabbit que cuentan con chips de memoria ya instalados, pines para conexión con el mundo exterior y programación, cristales que proveen las señales de clock y dependiendo del modelo pueden incorporar controladores Ethernet (incluyendo el conector RJ-45), módulos Zigbee, etc. De esta manera se obtiene un dispositivo diseñado para ser utilizado de la forma *Plug & Play* que provee resueltos los problemas de temporización de acceso a memoria, compatibilidad electromagnética, conexión a una red Ethernet, etc. y que desde el punto de vista de los pines de conexión puede verse como un microcontrolador. En la figura 8.2(a) se puede observar un microprocesador rabbit 3000 y en la figura 8.2(b) se muestra un módulo basado en el microprocesador rabbit 3000 (*Rabbit Core Module* o RCM). Puede verse que

el módulo incorpora el hardware necesario para el funcionamiento del microprocesador ahorrando tiempo y costos de diseño.



(a) Microprocesador Rabbit3000



(b) Módulo RMC 3000

Figura 8.2: Microprocesador Rabbit3000 y módulo RCM3000

Por lo tanto, el proceso de selección no solo consta en elegir un microprocesador, sino también en seleccionar un módulo basado en dicho microprocesador que cumpla los requerimientos especificados.

Al momento de la selección del microprocesador, Rabbit Semiconductor ofrecía dos modelos: el Rabbit 2000 y el Rabbit 3000 de arquitectura de 8 bits (actualmente se encuentra disponible el Rabbit 4000 de 16 bits). Si bien existen diferencias entre ambos modelos, se optó por el microprocesador rabbit 3000 ya que, a diferencia del Rabbit 2000, cuenta con un módulo on-chip capaz de generar señales PWM fundamentales para la aplicación a desarrollar. En las siguientes secciones se dará una explicación más detallada sobre el Rabbit 3000 y sus características.

#### 8.2.4 ¿Por qué se optó por un microprocesador Rabbit?

Ya que el microprocesador elegido es un Rabbit 3000a (primera evolución del Rabbit 3000), el cual será implementado utilizando un módulo RCM3000, en esta sección se dará una descripción más detallada sobre las características generales del microprocesador y del módulo que lo contiene. Las características principales del Rabbit 3000 son las siguientes:

##### **Características principales del microprocesador Rabbit 3000.**

- Es un microprocesador. Esto hace que el bus de datos sea accesible y facilite la posibilidad de tener varios microprocesadores (o módulos) trabajando en paralelo.
- Arquitectura: el bus de datos es de 8 bits de manera que por definición podría decirse que se trata de un microprocesador de 8 bits pero posee internamente registros de 8 y 16 bits. Además, a diferencia de otros microprocesadores, es capaz de utilizar un acumulador de 8 bits o uno de 16 bits dependiendo del tipo de instrucción que se está ejecutando.
- El set de instrucciones es del tipo CISC.

- Frecuencia de operación: hasta 54 MHz provista por un circuito doblador de frecuencia integrado que duplica la frecuencia de clock (por lo tanto, el cristal externo debe ser de la mitad de la frecuencia). Cuenta también con una entrada para un clock externo de 32KHz de donde se obtiene el reloj de tiempo real y permite además modos de bajo consumo.
- El bus de datos es de 20 bits. Esto le permite direccionar hasta 1 Megabyte de memoria.
- Su arquitectura (derivada del Z180) permite realizar operaciones lógicas y aritméticas de 8 y 16 bits y manejo de bits de forma individual.
- La interfaz con la memoria es del tipo “*glueless*” que significa que no es necesario incorporar lógica adicional para comunicarse con la memoria del sistema ya que el microprocesador cuenta con la interfaz de manejo de memoria (*Memory Management Unit* o MMU) y salidas “*Chip-Select*”(que son salidas que permiten seleccionar los distintos bancos de memoria) integrados *on-chip*.
- Al igual que un microcontrolador posee puertos de entrada y salida I/O (un total de 56), timers, watchdog (WDT), reloj de tiempo real (RTC) todos incluidos *on-chip*.
- Incorpora seis USARTs con el objetivo de permitir la comunicación serie con periféricos como ADCs, DACs, EEPROMs, etc. cada vez más comunes en el terreno de los dispositivos que se comunican via puertos serie de alta velocidad.
- Posee cuatro niveles de prioridad de interrupción.
- Es programable del tipo *On-board* a través de un puerto serie.
- Posee dos canales para la captura de eventos.
- Posee un “Puerto Esclavo” (*Slave Port*) que permite la interconexión de varios microprocesadores en paralelo.
- Posee 4 salidas PWM de 10 bits de resolución.
- Posee un entorno de programación basado en el lenguaje de programación C (llamado *Dynamic C*) incluido en el kit de desarrollo a un costo razonable. Además se encuentran incluidas librerías con funciones para el manejo específico del microprocesador, funciones aritméticas, de manejo de datos, interfaces, etc. y principalmente para el manejo de todos los periféricos *on-chip* presentes en el microprocesador. Dichas librerías además poseen código fuente abierto por lo que pueden modificarse para adaptarse a los requerimientos del programador. Sobre el entorno de desarrollo se volverá más adelante en la sección 8.2.6.

Lo anterior, además de otros periféricos *on-chip* se muestran en la figura 8.3.

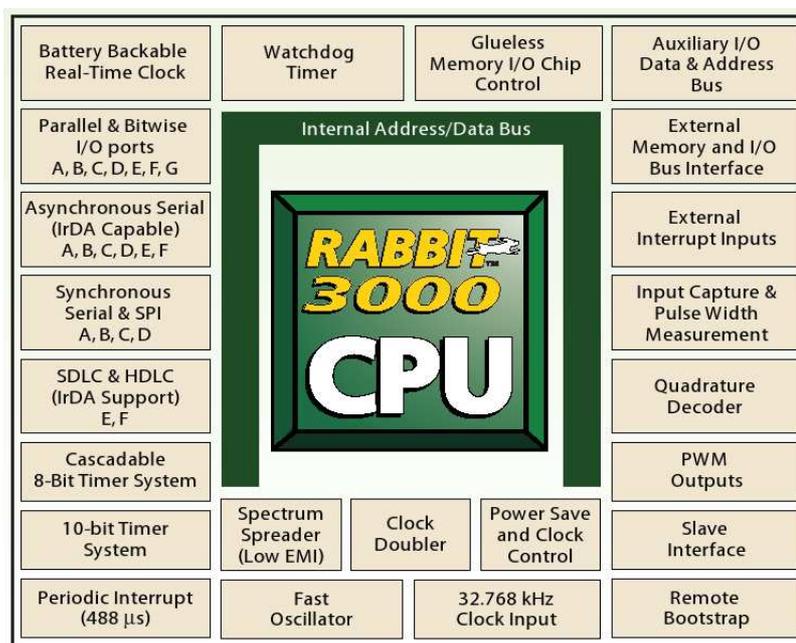


Figura 8.3: Periféricos on-chip en el microprocesador Rabbit 3000. (Fuente: Rabbit Semiconductor).

### Características principales del módulo RCM3000.

- Basado en el CPU Rabbit 3000. El módulo provee el soporte necesario para el funcionamiento y utilización de los periféricos on-chip por parte del usuario.
- El core se encuentra funcionando a 29.4 MHz. Para esto utiliza un oscilador externo de 14 MHz provisto en el módulo.
- 52 líneas I/O: 44 de uso general, 4 fijas como entradas y 4 fijas como salidas<sup>4</sup>.
- 2 entradas digitales adicionales (Start-up y entrada de reset externo).
- 2 salidas digitales adicionales (Status y salida de reset).
- Las entradas son del tipo “Tolerantes a 5 volts”(5V Tolerant).
- Circuito de reloj de tiempo real. Incluye un oscilador externo a 32kHz.
- Memoria de Programa: 512kb (RCM3000)/256kb (RCM3010). Tipo: Flash.
- Memoria de Datos: 512kb (RCM3000)/128kb (RCM3010). Tipo: SRAM.
- 6 Puertos de comunicaciones serie.

<sup>4</sup>Si bien el uP Rabbit 3000 en su hoja de datos especifica 56 salidas I/O, algunas de ellas son destinadas para funciones específicas dentro del módulo RCM. Por ejemplo, la salida PD0 del puerto D está destinada exclusivamente al control del chip Ethernet on-board.

- Puerto Ethernet 10base-T a partir de la interfaz Realtek RTL8019AS. Incluye conector el RJ45.
- Soporta un transceptor de señales infrarojas (IRDA) a 1.15Mbps.
- Puerto de programación.
- Tensión de alimentación: 3.3 Volts.

En la figura 8.4 se muestran los subsistemas que componen el módulo RCM3000. Observar que el núcleo del módulo está basado en el microprocesador Rabbit 3000.

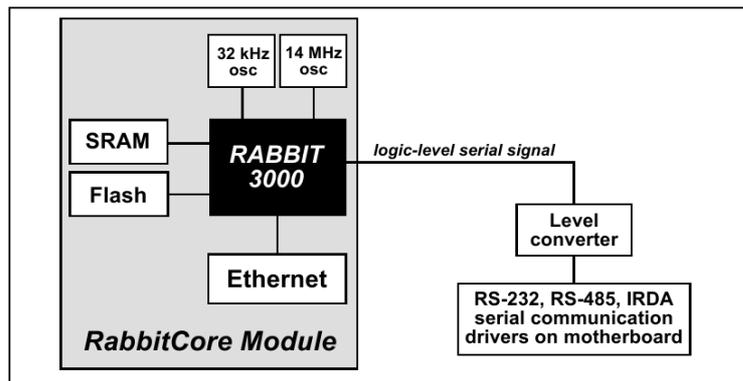


Figura 8.4: Subsistemas que componen el módulo RCM3000. (Fuente: Rabbit Semiconductor).

En la figura 8.5 se observa como se utilizan los puertos del microprocesador Rabbit 3000 cuando se utiliza un módulo de la serie RCM3000.

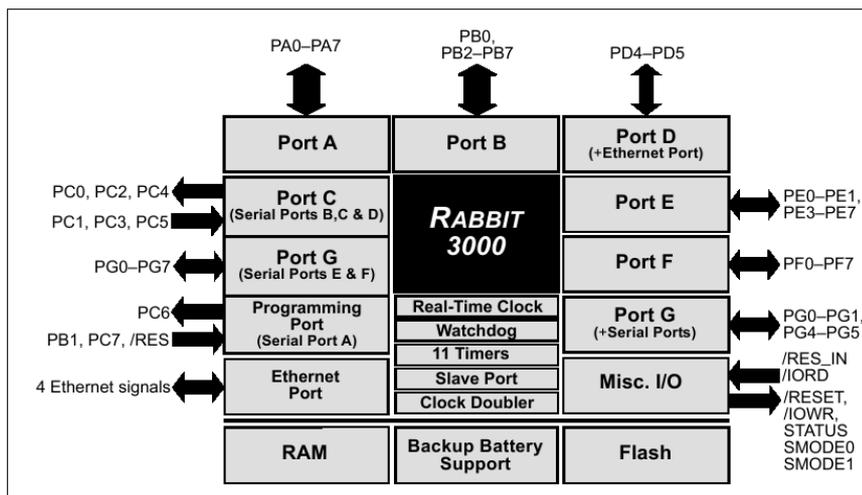


Figura 8.5: Utilización de los puertos del uP Rabbit 3000 en los módulos RCM3000. (Fuente: [33])

A partir de análisis realizado, se tiene que el procesador rabbit 3000 reúne los requerimientos propuestos en la sección 8.2.1 y se encuentra, en lo que respecta a prestaciones

por encima de los microcontroladores y DSCs considerados sin ser un microprocesador de alta gama.

Al igual que en el caso de los CPUs de Microchip y Freescale, un factor decisivo a la hora de la elección fue el entorno de desarrollo provisto por el fabricante sobre el cual se volverá más adelante.

En resumen, se optó por utilizar un microprocesador de uso general que ofrece una amplia cantidad de puertos de entrada/salida, comunicaciones, posibilidad de acceso al bus de datos, amplia capacidad de memoria flash y RAM y programación en C, el cual es provisto en módulos pre-armados que ubican un escalón por encima de los microcontroladores o DCS considerados. El mismo además cuenta con un extenso soporte de software incluido en el kit de desarrollo a un costo razonable a diferencia del resto de los fabricantes.

Con respecto al kit de desarrollo, el mismo soporta dos módulos RCM3000 con la posibilidad de trabajar en paralelo (es decir, que el kit proporciona el ruteo de las líneas que unen los buses de datos) lo que resulta interesante para ampliaciones futuras. El mismo además viene provisto con la versión 9.21 de Dynamic C que se utilizará para la programación y un módulo RCM3010 que se utilizará en la primer etapa del desarrollo.

## 8.2.5 El microprocesador Rabbit3000a. Arquitectura.

### El CPU.

El componente principal dentro del chip del Rabbit 3000 es la CPU. La arquitectura de la misma se encuentra basada en la utilización de un acumulador (*Accumulator-based Architecture*).

Como se puede observar en la figura 8.6 el Rabbit 3000 posee dos buses de datos y de direcciones: uno interno y uno externo.

La CPU se comunica con los periféricos internos (on-chip) usando el bus interno. El mismo está compuesto por un bus de datos de 8 bits y un bus de direcciones también de 8 bits además de líneas de control. De esta manera, cada registro de un periférico puede accederse mediante una dirección de 8 bits lo que limita al procesador a un máximo de 256 registros internos pero también significa que para acceder a un registro solo se necesita de un operando de 1 byte (en vez de dos) mejorando la eficiencia del procesador.

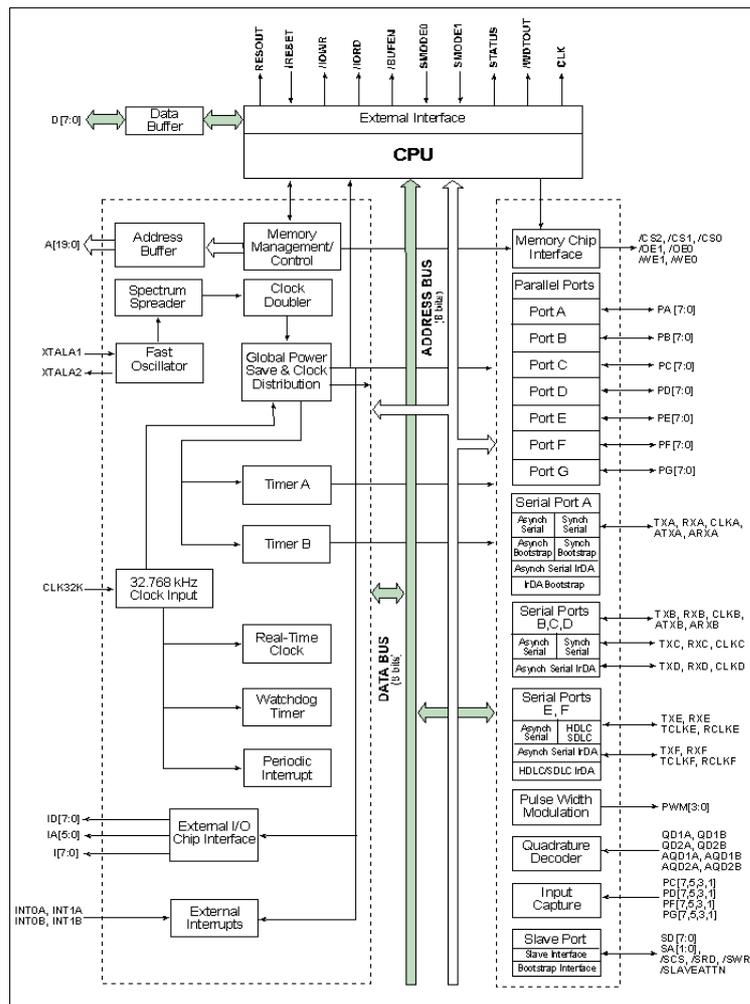


Figura 8.6: Diagrama en bloques del procesador Rabbit3000 (fuente [31])

Los registros presentes en el CPU que componen el modelo de programación se muestran en la figura 8.7. En ella se pueden observar los distintos registros de uso general, punteros, etc., con el agregado de registros alternativos utilizados para almacenar el contenidos de los registros principales se llama a alguna función especial, como por ejemplo, un llamado a subrutina. De esta manera se evita tener que al almacenar el contenido de los registros en memoria con funciones PUSH y POP mejorando el rendimiento al no tener que acceder a memoria (con el retardo que esto implica) cada vez que se ejecuta un subrutina.

Como se dijo anteriormente, la arquitectura del Rabbit se encuentra basada en la utilización de un acumulador. A diferencia de otros microprocesadores, Rabbit utiliza el registro A como acumulador por defecto cuando realiza operaciones de 8 bits. Sin embargo, para operaciones de 16 bits el acumulador utilizado es el registro HL (combinación de los registro H y L ambos de 8 bits) por lo que, si bien se trata de un microprocesador de 8 bits, dentro de la CPU es posible realizar operaciones de 16 bits. Los registros IX y IY también son utilizados por algunas instrucciones como acumuladores.

De esta manera se observa como los registros pueden funcionar como registros indepen-

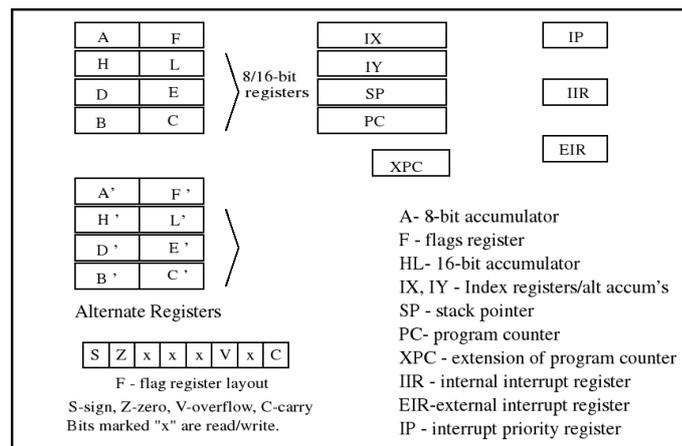


Figura 8.7: Registros de la CPU del Rabbit3000 (Fuente: [31])

dientes de 8 bits o asociados de a pares para formar registros de 16 bits. A continuación se listan los registros presentes en el CPU y como pueden asociarse.

Cuadro 8.3: Registros de 8 bits.

| Rabbit3000 CPU - Registros de 8 bits |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| A                                    | Acumulador                            |
| F                                    | Flags (Status)                        |
| B,C,D,H,L                            | Registros de uso general.             |
| A',B',C',D',E',F',H',L'              | Registros Alternativos                |
| IP                                   | Registro de Prioridad de interrupción |
| IIR                                  | Registro de Interrupción Interna      |
| EIR                                  | Registro de Interrupción Externa      |
| XPC                                  | Registro de la MMU                    |

Cuadro 8.4: Registros de 16 bits.

| Rabbit3000 CPU - Registros de 16 bits |  |
|---------------------------------------|--|
| IX                                    | Registro índice                        |
| IY                                    | Registro índice                        |
| SP                                    | Registro de Pila (Stack Pointer)       |
| PC                                    | Contador de Programa (Program Counter) |

En el cuadro 8.3 aparecen además los registros IIR e EIR. Estos registros se utilizan como punteros a las tablas de interrupción internas y externas respectivamente.

El registro de Prioridad de Interrupción (Interrupt Priority - IP) permite determinar cuatro niveles de prioridad de interrupción para determinados eventos.

Cuadro 8.5: Registros de 8 bits apareados para formar registros de 16 bits.

| Rabbit3000 CPU - Registros de 16 bits apareados |                                     |
|---|-------------------------------------|
| H-L   | Acumulador de 16 bits               |
| B-C   | Registro de uso general             |
| D-E   | Registro de uso general             |
| B'-C'   | Registro alternativo de uso general |
| D'-E'   | Registro alternativo de uso general |
| H'-L'   | Registro alternativo de uso general |

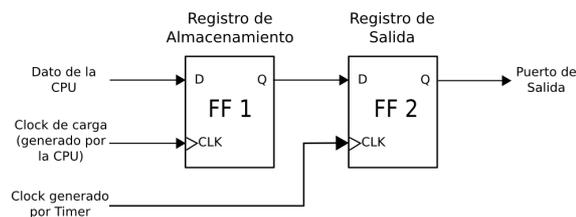


Figura 8.8: Rabbit 3000. Salidas sincronizadas.

El registro XPC es el que permite mapear la memoria lógica de 16 bits que utiliza el rabbit en memoria física de 20 bits. Si se observa el manejo de la memoria por parte del Rabbit, se observa que internamente el mismo trabaja con un espacio de memoria lógica de 16 bits (64 kbytes) lo que optimiza su funcionamiento. Sin embargo, gracias a la existencia de la Unidad de Manejo de Memoria (Memory Management Unit o MMU) es posible mapear dicha memoria en lo que se denomina la memoria física (Memoria real donde se guardan los datos) la cual es direccionada con un bus de datos de 20 bits permitiendo disponer de 1 Mbyte de espacio para almacenar el código y los datos de programa. Para más información sobre el funcionamiento de la MMU ver [31] y [35].

Los registros IX e IY son registros índices. También son utilizados como punteros a memoria por algunas funciones.

### Entrada/Salida (I/O) en Paralelo.

Como se vio en las características principales del Rabbit 3000, el mismo posee siete puertos de entrada/salida digitales de 8-bits cada uno lo que arroja un total de 56 pines de entrada salida digitales, las cuales además son compartidas con otros periféricos on-chip por lo que de los 8 pines I/O asociados a un paralelo, algunos pines pueden utilizarse para otra función como por ejemplo, señales de clock para comunicaciones seria, recepción de datos, etc.

Todas las entradas son del tipo "5-volt tolerant" de manera que soportan los niveles de tensión de la lógica de 5 volts.

Un aspecto interesante de los puertos D, E, F y G es que la actualización de las salidas puede sincronizarse con los timers internos del microprocesador. Esto se realiza en base a dos Flip-flops en cascada como se muestra en la figura

Dichas salidas permiten generar pulsos precisos en tiempo. Por ejemplo: el timer que determina cuando debe cargarse el dato en el registro de salida genera un interrupción en el sistema. La rutina que atiende la interrupción se encarga de cargar el próximo dato en el registro de almacenamiento (Holding Register). Cuando el timer alcance en valor seteado, la salida se actualiza y la subrutina de interrupción se llama nuevamente pudiéndose repetir el proceso de forma indeterminada. El anterior es el principio de funcionamiento de las salidas PWM que serán utilizadas para controlar los motores DC del posicionador de antena.

### **Puertos Serie.**

El Rabbit 3000 posee seis puertos serie. Los seis puertos pueden utilizarse como puertos serie de 3 hilos asincrónicos con una tasa máxima de transmisión de  $f_{CLK}/8$  que permite establecer comunicaciones RS-232 con el agregado del correspondiente transceptor.

Además de RS-232, la UART del Rabbit permite establecer comunicaciones RS-485, lo que lo hace ideal para la comunicación con el codificador de posición utilizado en el movimiento de azimut.

Los puertos serie A,B,C y D pueden utilizarse para establecer comunicaciones sincrónicas donde alguno de los dispositivos que participan en la comunicación deberán proveer la señal de clock. En el caso de ser el microprocesador Rabbit el encargado de la señal de clock, la frecuencia máxima de transición será  $f_{CLK} = f_{CLK}/2$ .

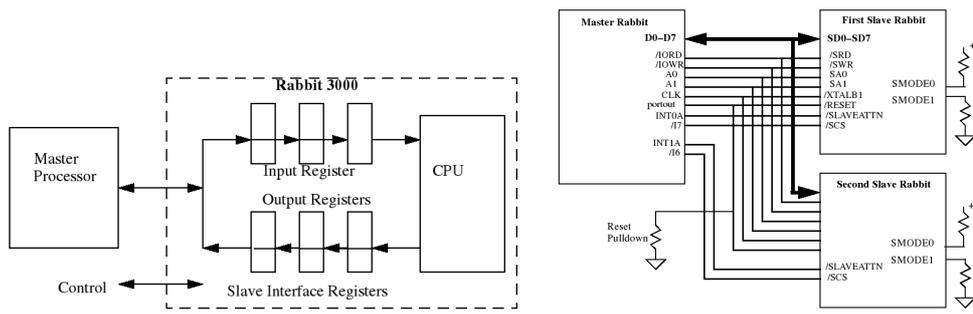
La posibilidad de contar con tantos puertos serie que soporten dicha variedad de formatos de transmisión será de gran utilidad a la hora de la selección de las interfaces de los sistemas de adquisición y además en la comunicación con la PC.

### **Puerto Esclavo (Slave Port).**

El puerto esclavo permite conectar dos microprocesadores en paralelo sin necesidad de una UART o una memoria RAM de doble puerto (Dual Port RAM o DPRAM). El puerto esclavo permite conectar un procesador Rabbit al puerto de entrada/salida (I/O) de otro procesador rabbit. El Slave Port se encuentra compuesto por seis registros de los cuales tres pueden ser escritos desde el bus externo y leídos por la CPU del procesador "esclavo", mientras que los restantes tres pueden ser escritos por la CPU hacia el bus externo. La comunicación se realiza a través de un bus de 8-bits comandado por señales de control que asociadas al Slave Port.

En la figura 8.9(a) se muestra como se conectan dos procesadores Rabbit en configuración Maestro-Esclavo (Master-Slave) donde se el pasaje de datos se realiza utilizando los registros del Slave Port del Rabbit esclavo. En la figura 8.9(b) se muestra un ejemplo de conexión de múltiples procesadores en paralelo donde se observa que los datos se transmiten a través de un bus de 8 bits y que el control de la comunicación se realiza mediante líneas de control dedicadas.

Un aspecto a tener en cuenta para futuras evoluciones del sistema de posicionamiento es que la conexión no se halla limitada a procesadores Rabbit, sino que el esclavo puede reemplazarse por una FPGA o un CPLD u otro procesador que respete el esquema de conexión.



(a) Conexión Master-Slave utilizando el Salve Port (b) Ejemplo de conexión de múltiples procesadores Rabbit

Figura 8.9: Rabbit 3000 Slave Port. Ejemplos de Conexión. (Fuente: Rabbit Semiconductor).

Otro aspecto importante es que el kit de desarrollo de los módulos RCM3000 vienen preparados para la conexión en paralelo de dos módulos mediante el Slave Port.

### Captura de Entradas (Input Capture).

Las captura de eventos se realiza mediante un módulo on-chip que permite al micro-procesador determinar de forma precisa el intervalo de tiempo entre dos eventos o para determinar el momento en que se produce un evento particular. La detección se realiza mediante un flanco en cualquiera de los dos canales designados de los 16 pines que pueden ser asignados para esta función por lo que la captura de eventos es del tipo *Dual-channel* (Doble canal). Una vez detectado el evento el módulo es capaz, por ejemplo, de generar un interrupción lo que permite agregar cuatro interrupciones externas.

A partir de los dos canales utilizados es que se determinan dos tipos de eventos: *Condición de Inicio* y *Condición de Detención*.

### Salidas PWM.

El Rabbit3000 posee un módulo capaz de generar hasta cuatro señales PWM que consisten en trenes de pulsos periódicos en un trama de 1024 puntos. En la figura 8.10 se observa a forma de una señal PWM.

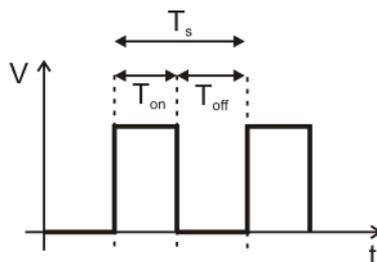


Figura 8.10: Ejemplo de una señal PWM.

De la figura anterior se tiene que el porcentaje del ciclo de trabajo está dado por:

$$\% \text{ Ciclo de trabajo} = \frac{T_{on}}{T_s} \times 100 \% \quad (8.1)$$

Se puede demostrar también que el valor medio de dicha señal estará dado por:

$$V_m = \frac{T_{on}}{T_s} \cdot \hat{V} = D \cdot \hat{V} \quad (8.2)$$

donde  $\hat{V}$  es la amplitud de la onda cuadrada y  $D$  es el ciclo de trabajo. (Sobre este tema se volverá en la sección 8.3).

El Rabbit3000 permite determinar el período del pulso ( $T_s$ ) cuyo ciclo de trabajo estará determinado por el valor que se asigne al contador interno PWMxR de 10-bits lo que determina los 1024 puntos de resolución posibles. El funcionamiento consiste en un contador comandado por el timer interno A9 que cuenta pulsos desde 0x000 a 0x3FF (0 a 1023) reseteándose cada vez que alcanza el valor máximo. El ciclo de trabajo se ajusta cargando el registro PWMxR con el número de cuentas correspondientes al ciclo de trabajo  $n$  pretendido ( $\% \text{ ciclo de trabajo} \times 1024$ ). Bajo esta condición el microprocesador mantiene en alto la salida PWM durante  $n + 1$  cuentas para la luego pasar al estado bajo hasta que se resetee el contador.

Dado que la cantidad de cuentas por segundo depende de la velocidad de CLK provista por el Timer A9, la frecuencia de switching se calcula mediante la siguiente la siguiente fórmula:

$$F_{sw} = \frac{F_{CPU}}{2} \cdot \frac{(TATR + 1)}{4} \quad (8.3)$$

donde  $TATR$  es el registro que determina la frecuencia de CLK de salida del Timer A9.

En el caso del posicionador de antena el valor de la frecuencia de switching estará dado por:

$$F_{sw} = 14,4kHz. \quad (8.4)$$

Hasta aquí se describieron las propiedades del controlador digital Rabbit3000 que será utilizadas para la primer etapa de desarrollo del proyecto y aquellas que justificaron su elección en su versión del módulo RCM3000. Detalles de hardware que necesiten ser ampliados serán detallados oportunamente conforme al avance del proyecto.

### 8.2.6 El entorno de desarrollo Dynamic C.

Dynamic C es el nombre del entorno de desarrollo integrado (IDE) que el fabricante provee junto con el kit de desarrollo para la desarrollar con microprocesadores y módulos Rabbit.

El mismo permite editar, compilar, programar y debuggear en tiempo real las aplicaciones desarrolladas con Rabbit además de proveer un paquete de librerías que permite la programación y puesta en marcha de manera rápida de distintas aplicaciones, como por ejemplo, el manejo de las interfaces de comunicaciones SPI y PWM necesarias en este proyecto.

El lenguaje de programación está basado en ANSI C aunque con algunas diferencias ya que al correr en un microprocesador sin el soporte de un sistema operativo debe ocuparse de otros aspectos como por ejemplo, el manejo de la memoria.

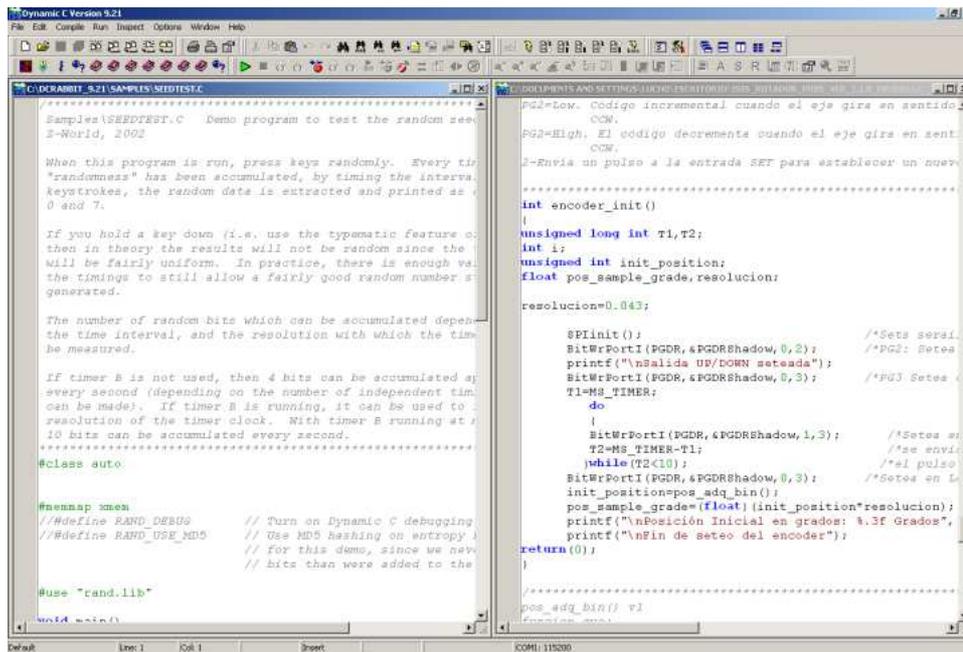


Figura 8.11: Entorno de desarrollo Dynamic C

En la figura 8.11 se observa la pantalla principal del entorno de programación de Rabbit.

De manera resumida las virtudes de Dynamic C pueden resumirse de la siguiente forma:

- La interfaz de desarrollo es completa y no presenta la necesidad de utilizar editores, compiladores, ensambladores o linkeadores por separado.
- Provee un paquete de librerías que permiten implementar diferentes aplicaciones y los drivers para el manejo de los distintos periféricos utilizando alto nivel de programación (lenguaje C) con la opción de programar al mismo tiempo en assembler en caso de ser necesario.
- Mediante el puerto serie se programa el microprocesador y se puede ejecutar el código en tiempo real.
- El manejo de memoria así como la utilización de una BIOS que define un estado inicial de sistema así como variables de entorno es realizado por el compilador.
- Provee funciones que permiten ejecutar aplicaciones mediante multitasking.
- Provee todas las herramientas para el debugging en tiempo real y monitoreo del programa como por ejemplo visualización del contenido de los registros internos o de la memoria.

Para más información, referirse a [34],[35].

## 8.3 Subsistema Electrónica de Potencia.

Como es evidente, el controlador digital es incapaz de proveer la potencia necesaria para el movimiento de los motores que componen el posicionador de antena de manera que es necesario implementar una interfaz capaz de proveer la potencia necesaria para el funcionamiento del sistema mecánico según lo mande el controlador digital.

De acuerdo a lo establecido en el Capítulo 4, el control de los motores DC será realizado mediante tensión de armadura de forma que será necesario contar con una etapa de potencia cuya salida sea capaz de proveer la potencia necesaria de los motores de azimut y elevación.

### 8.3.1 Señal PWM para el Control de Motores.

Las señales de Modulación por Ancho de Pulso o PWM (Pulse Width Modulation) se utilizan generalmente para el control de convertidores DC-DC donde se desea, a partir de una determinada tensión de entrada, ajustar el valor medio de la tensión de la tensión de salida utilizando una llave electrónica controlando los estados de encendido ("On") y apagado("off"). En la figura 8.12(a) se puede observar un reductor DC-DC básico donde el valor medio  $V_0$  de la tensión de salida  $v_0(t)$  depende del tiempo que la llave  $L$  esté abierta o cerrada.

Una de las formas más comunes de controlar la tensión de salida consiste en conmutar la llave  $L$  a una frecuencia fija cuyo período está dado por  $T_s = T_{on} + T_{off}$  generando una onda cuadrada cuya amplitud es la tensión de alimentación y cuyo valor medio es el valor medio deseado en la carga como se muestra en la figura 8.12(b).

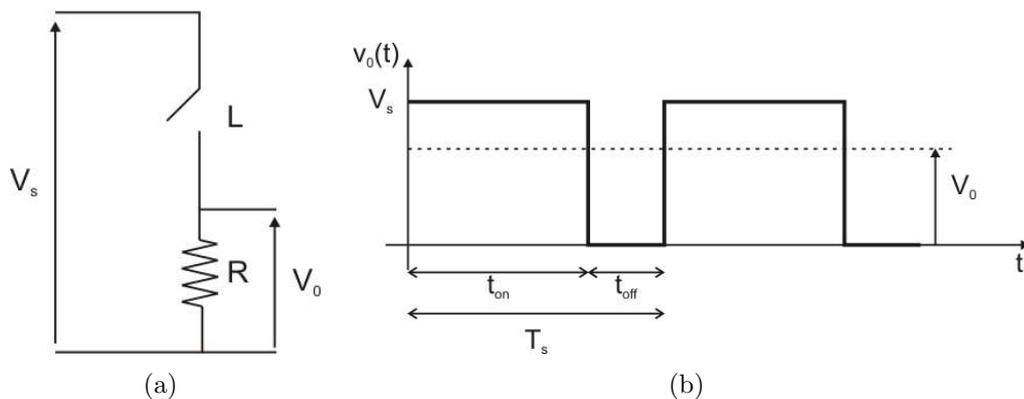


Figura 8.12: Ejemplo de un circuito reductor básico y señal PWM generada a partir de conmutar la llave  $L$  a una frecuencia fija  $f_s = 1/T_s$ .

De la figura 8.12 se tiene que el valor medio  $V_0$  varía con el tiempo de encendido  $t_{on}$  de manera que para una frecuencia de conmutación constante se puede definir el ciclo de trabajo  $D$  como:

$$D = \frac{t_{on}}{T_s} \quad (8.5)$$

de forma que el valor medio de la señal de salida estará dado por:

$$V_0 = D \cdot V_s \quad (8.6)$$

Como se verá en las secciones siguientes, la electrónica de potencia utilizada para la generación de la tensión de alimentación de los motores DC del posicionador de antena se realiza mediante señales PWM.

Si bien una señal PWM puede generarse de varias maneras, la manera de generarla será utilizando el módulo generador de señales PWM incorporado al controlador digital Rabbit3000 como se vio en la sección 8.2.5 por lo que, el parámetro a determinar durante el control del posicionador es el ciclo de trabajo  $D$ .

### 8.3.2 Control de Motores de Corriente Continua.

Para el control de motores en la actualidad se utilizan convertidores de potencia electrónicos debido a que su eficiencia de conversión es mucho mayor que para las fuentes lineales.

En el caso de los motores DC que requieren el movimiento en ambas direcciones se utilizan lo que se denominan "puentes H" que consisten en 4 transistores de potencia que, de acuerdo a si funcionan en estado "on" u "off" generan en los bornes de alimentación del motor una señal PWM (Pulse Width Modulation) cuyo valor medio es la tensión de armadura  $V_a$  que se desea aplicar al motor DC.

Un diagrama básico se muestra en la figura 8.13. En ella se puede observar la disposición de los cuatro transistores (cada uno con su correspondiente diodo de rueda libre que permite la circulación de corriente en condiciones de frenado) agrupados en dos ramas cuyos transistores se disparan de forma complementaria (ver diagrama de la lógica de control).

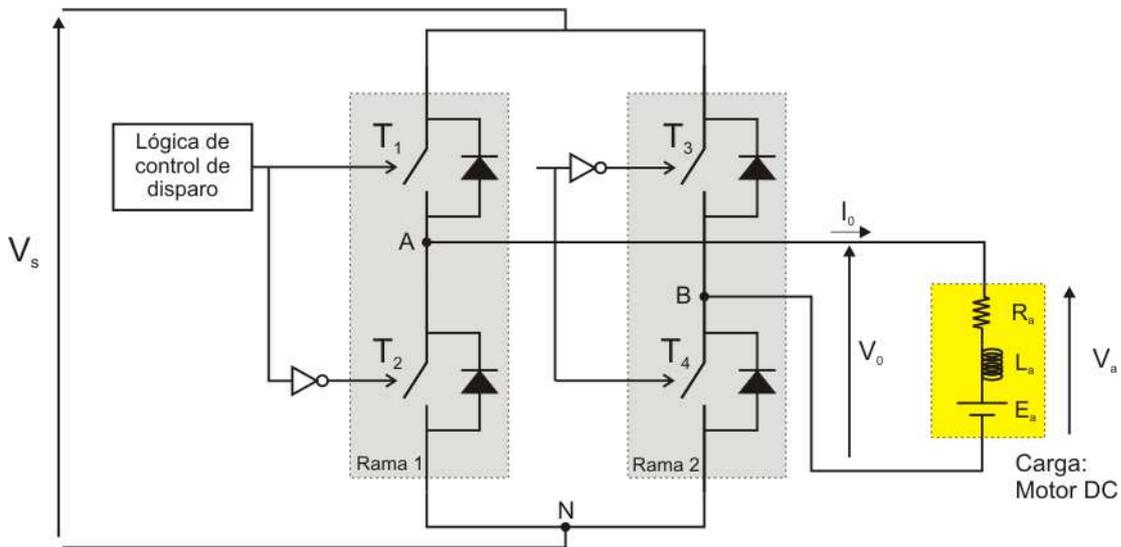


Figura 8.13: Esquema básico de un Puentes H para el control de un motor DC.

El funcionamiento del puente H se obtiene analizando el estado de los transistores. Recordando que el disparo de los transistores de una misma rama se realiza de forma complementaria se tiene que:

**Para**  $T_1 : ON, T_2 : OFF$ . La tensión entre el punto A y el punto N está dada por:  $V_{AN} = V_s$ .

**Para  $T_1 : OFF, T_2 : ON$ .** La tensión entre el punto A y el punto N ahora estará dada por:  $V_{AN} = 0$  es decir, el punto A se encuentra a masa.

Por lo tanto, la tensión en la Rama 1 está dada por (promediando en un intervalo de  $T_s$ ):

$$V_{AN} = \frac{V_d \cdot t_{on} + 0 \cdot t_{off}}{T_s} = \frac{V_d \cdot t_{on}}{T_s} = V_d \cdot D_{T1} \quad (8.7)$$

donde  $D_{T1}$  es el ciclo de trabajo del transistor  $T_1$ .

Analizando ahora la Rama 2 se tiene la situación análoga:

**Para  $T_3 : ON, T_4 : OFF$ .** La tensión entre el punto B y el punto N está dada por:  $V_{BN} = V_s$ .

**Para  $T_3 : OFF, T_4 : ON$ .** Al igual que en la Rama 1:  $V_{BN} = 0$ .

La tensión en la Rama 2 estará dada ahora por:

$$V_{BN} = \frac{V_d \cdot t_{on} + 0 \cdot t_{off}}{T_s} = \frac{V_d \cdot t_{on}}{T_s} = V_d \cdot D_{T3} \quad (8.8)$$

donde  $D_{T3}$  es ahora el ciclo de trabajo del transistor  $T_3$ .

Como resultante se tiene que la tensión entre los puntos A y B denominada  $V_0$  estará dada por:

$$V_0 = V_{AN} - V_{BN} = V_d \cdot D_{T1} - V_d \cdot D_{T3} \quad (8.9)$$

de donde se concluye que la tensión en bornes del motor DC se regula ajustando el ciclo de trabajo de los transistores independientemente del sentido de la corriente  $i_0(t)$  y dependiendo del par de transistores que estén activos invierte o no el signo de  $V_a$  permitiendo que el motor gire en ambas direcciones (operación en cuatro cuadrantes. Ver figura 8.14). Por ejemplo, cuando los transistores  $T_1$  y  $T_4$  estén encendidos la tensión  $V_{AB}$  será mayor que cero y el motor girará en el sentido correspondiente a  $V_a > 0$  mientras que cuando  $T_2$  y  $T_3$  estén encendidos ( $T_1$  y  $T_4$  apagados) se tiene  $V_{AB} < 0$  lo que hará que el motor gire en sentido opuesto.

Un aspecto interesante es que mediante el control de disparo de los transistores además de obtener una señal PWM a la salida, puede obtenerse una señal PWM unipolar (que toma valores entre 0 y  $V_s$ ) o bipolar (que toma valores entre  $-V_s$  y  $V_s$ ). La señal PWM unipolar se logra, para un sentido de giro, disparando durante  $t_{on}$  los transistores  $T_1$  y  $T_4$  y apagándolos durante  $t_{off}$  mientras que  $T_2$  y  $T_3$  permanecen siempre abiertos.

La señal PWM bipolar se logra disparando durante  $t_{on}$  los transistores  $T_1$  y  $T_4$  ( $V_{AB} = V_s$ ) y disparando  $T_2$  y  $T_3$  durante  $t_{off}$  ( $V_{AB} = -V_s$ ).

En el caso de los motores del posicionador de antena se utilizará PWM unipolar.

Para más información ver [15].

### 8.3.3 Módulos de Potencia AMC25A20DD.

Para el control de los motores DC se seleccionó un puente  $H$  comercial de la firma Advanced Motion Controls (AMC) ya que además de cumplir con los requerimientos de potencia era ideal para la conexión directa con el controlador digital Rabbit3000 ya que el módulo

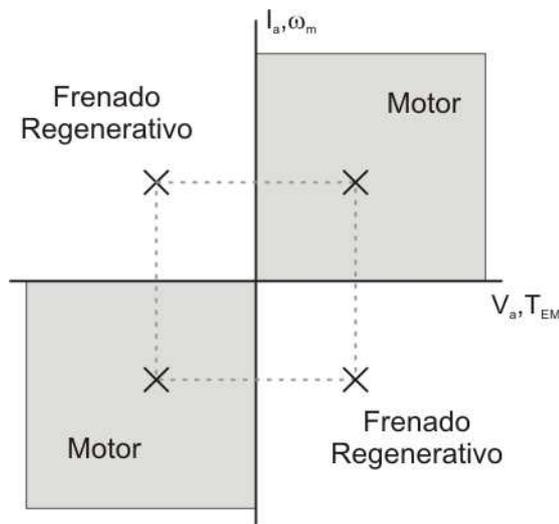


Figura 8.14: Funcionamiento en cuatro cuadrantes.

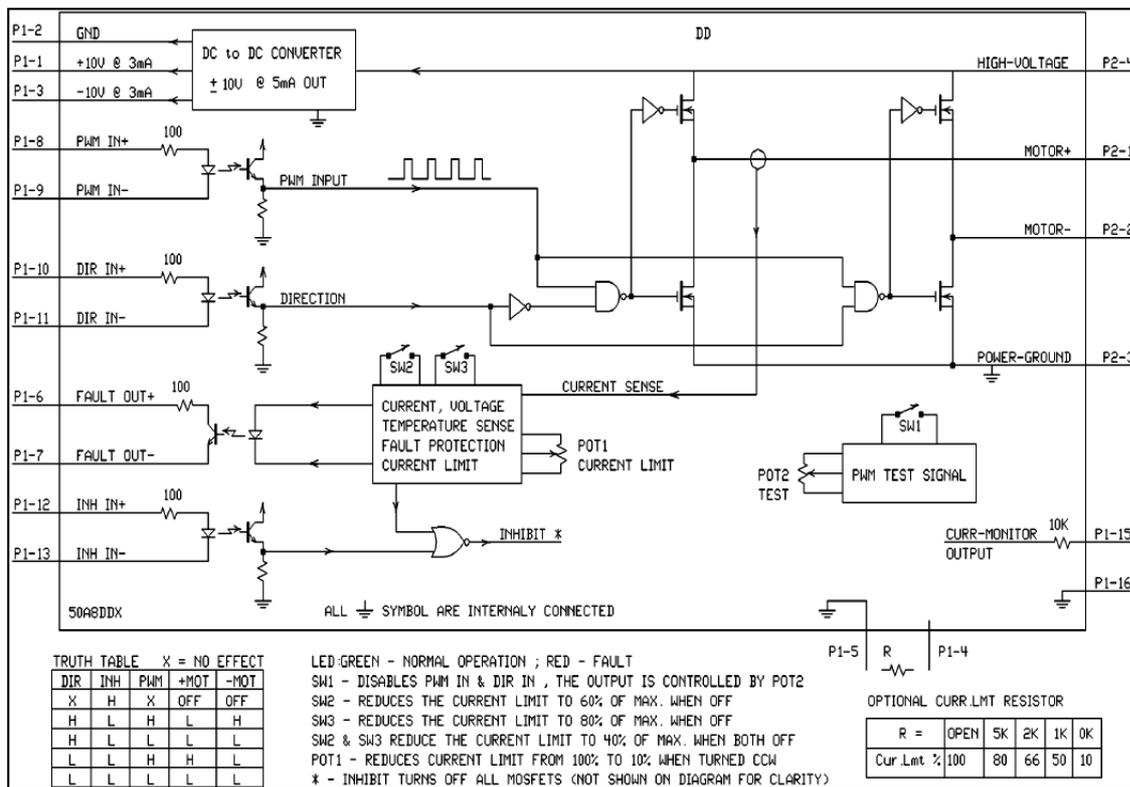


Figura 8.15: Diagrama en bloques del modulo de potencia 25A20DD. Fuente: Advanced Motion Controls.

cuenta con una entrada de nivel lógico TTL cuya señal aplicada debe ser una señal PWM con frecuencia de switching en el rango de los 5 a los 20kHz. En la figura 8.15 se muestra un diagrama en bloques del módulo AMC25A20DD. En ella se muestra el puente H así como la electrónica de comando de los transistores del puente.

Además del puente H, el módulo provee limitadores de corriente, detectores de sobre-

tensión y sobrecorriente los cuales puede ser informados al controlador mediante la salida digital "Fault" y además un monitor de corriente que permitirá adquirir en valor instantáneo de la corriente de armadura  $i_a(t)$ . Además permite resolver otras cuestiones como el disparo de los transistores de potencia del puente H evitando, por ejemplo, cortocircuitar la fuente  $V_s$  generando un retardo denominado "Blanking time" que se da cuando dos transistores de una misma rama se encuentran encendidos ("on").

### Análisis del Funcionamiento del Módulo 25A20DD.

En la figura 8.16 se muestra la lógica de control del puente H considerando solamente las señales PWM (PWM\_in) y de control del sentido de giro (DIR\_in).

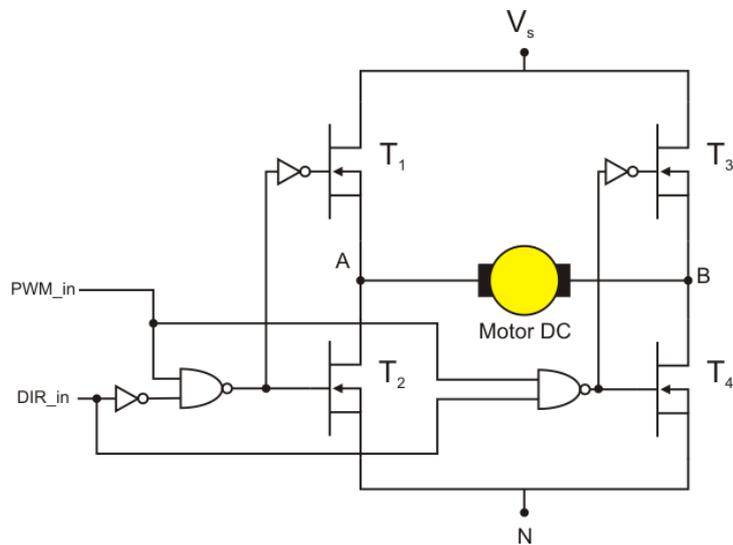


Figura 8.16: Lógica de Control del Puente H del módulo 25A20DD

A partir del estado de las señales de control se tienen los siguientes modos de funcionamiento:

El módulo entonces reproduce a la salida la señal PWM generada por el controlador amplificada a la tensión del bus de continua que alimenta la etapa de potencia ( $V_s$ ) de manera que puede considerarse como un amplificador PWM como se muestra en la figura 8.18.

En la figura 8.19 puede observarse la señal se salida de los módulos de potencia cuando se inyecta a la entrada una señal PWM de frecuencia de switching igual a 14.4kHz generada con el microprocesador Rabbit3000 y se alimentan los módulos con la fuente diseñada en la sección 8.3.4.

Resulta interesante observar que para la fuente diseñada el valor pico de la tensión de armadura es 104 volts y será la tensión máxima que alcanzará la tensión de armadura para un ciclo de trabajo del %100. Por lo tanto, si se considera que el valor pico de la señal PWM generada por el microprocesador es  $\hat{u}$  cuyo valor máximo es 1 y el valor pico de la tensión de armadura aplicada a los bornes del motor DC es  $\hat{V}_a$ , entonces los módulos de potencia pueden verse como una ganancia lineal de valor  $G_{pwr} = \frac{\hat{V}_a}{\hat{u}} = 104volts$ .

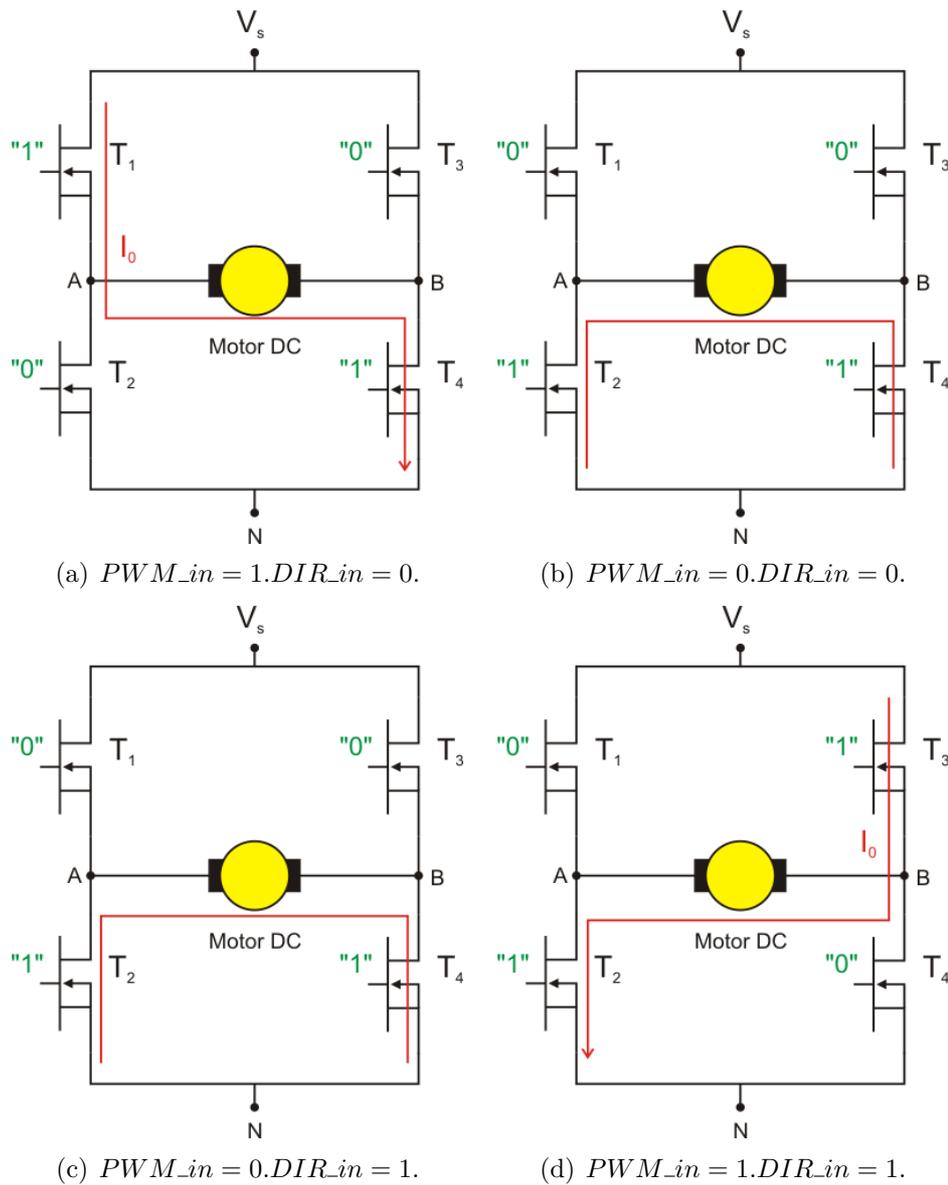


Figura 8.17: Funcionamiento del puente H del módulo 25A20DD a partir de las señales de control PWM\_in y DIR\_in.

También debe tenerse en cuenta que la señal PWM generada es del tipo unipolar, de manera que la acción de control sobre el motor DC tomará los valores  $u_{min} = 0V$  y  $u_{max} = 104V$ .

Los resultados anteriores serán considerados en los próximos capítulos.

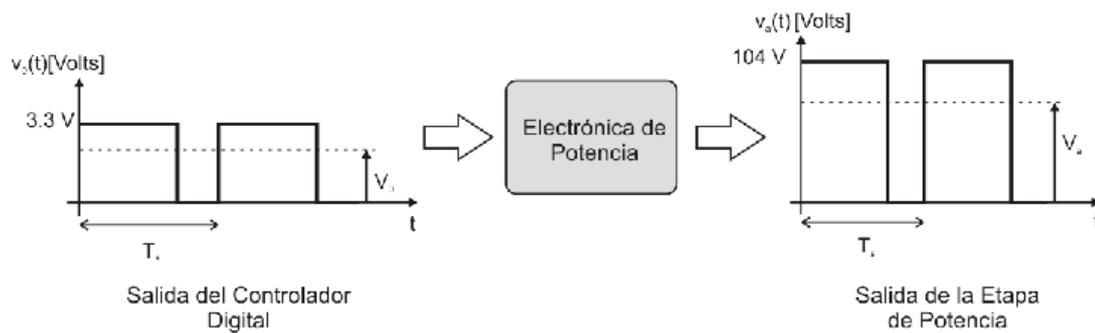


Figura 8.18: Etapa de potencia considerada como un amplificador de la señal PWM generada por el controlador digital.

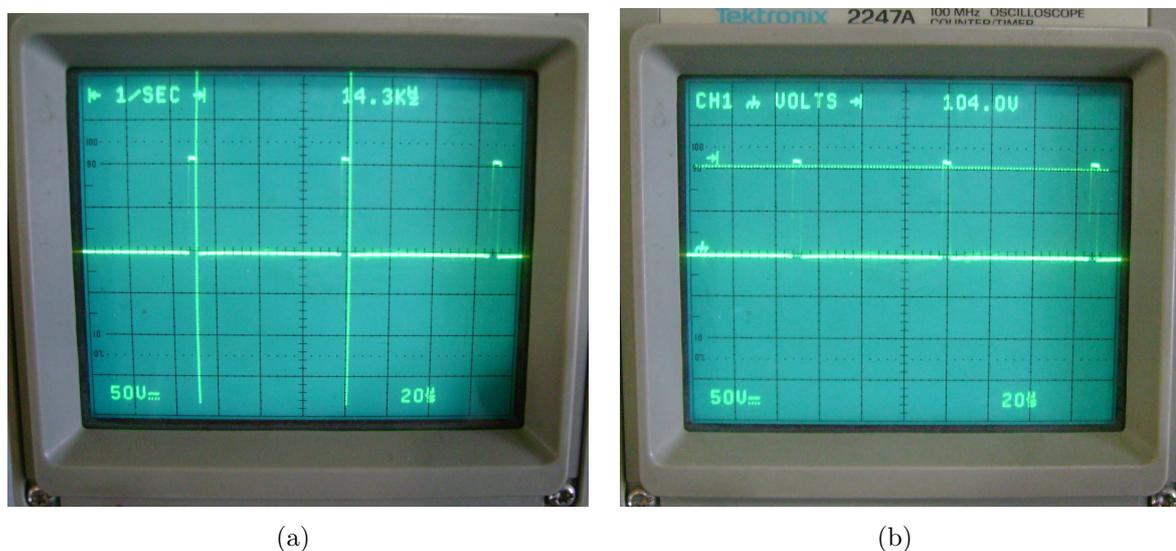


Figura 8.19: Salida de los módulos de potencia cuando se inyecta una señal PWM a la entrada con ciclo de trabajo del %10.

### 8.3.4 Fuente de Alimentación de la Etapa de Potencia.

La fuente de alimentación de la etapa de potencia deberá proveer la potencia necesaria para:

1. Generar la tensión constante de alimentación de los bobinados de campo de los motores DC.
2. Proveer la potencia necesaria para alimentar los módulos de potencia cuando ambos motores se encuentren funcionando a plena carga.

Para esto se diseñaron dos fuentes: la primera encargada de proveer alimentación a los bobinados de campo y la segunda de generar la tensión  $V_s$  que forma el bus de alimentación de los módulos de potencia. Los requerimientos se muestran a continuación:

**Fuente de Alimentación de los Bobinados de Campo:** Considerando que debe alimentarse los bobinados de ambos motores se establecieron las siguientes especificaciones:

| Especificación    | Valor      |
|-------------------|------------|
| $V_{DC}$ (Salida) | 115VDC     |
| $V_{ripple}$      | $4 V_{pp}$ |
| $I_0$             | 0.8A       |

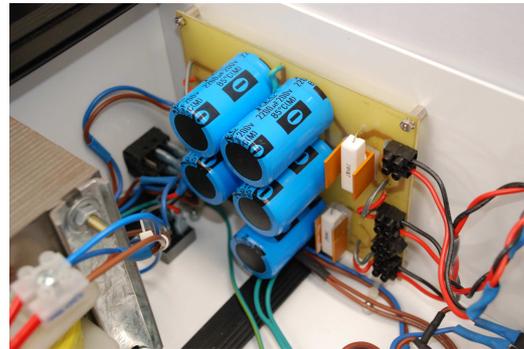
**Fuente de Alimentación de los de los Módulos de Potencia:** En este caso, el factor de ripple viene especificado por el fabricante de los módulos de potencia.

| Especificación    | Valor      |
|-------------------|------------|
| $V_{DC}$ (Salida) | 115VDC     |
| $V_{ripple}$      | $4 V_{pp}$ |
| $I_0$             | 4.2A       |

El cálculo de los componentes de discretos se realizó utilizando el método de diseño de Schade. La fuente construida que cumple las especificaciones se muestra en la figura 8.20(a), la cual por seguridad fue colocada dentro de un gabinete junto con los módulos de potencia como se muestra en la figura 8.20.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.20: Fuente de Alimentación y Etapa de Potencia Construida para la alimentación del posicionador de antena.

### 8.3.5 Placa Interfaz entre el Controlador Rabbit3000 y los Módulos de Potencia 25A20DD.

Para la interfaz entre la entrada digital de los módulos de potencia y el microprocesador Rabbit3000 se utilizó a modo de buffer el IC 74HCT244 (Buffer no-inversor octal) que permite también convertir niveles lógicos de 3.3V a 5V. Luego, se utilizaron transistores 2N2222 para excitar la entrada de los optoacopladores de los módulos de potencia. El valor de la resistencia de colector se calculó para asegurar una corriente de colector que asegure el encendido de los optoacopladores.

Se implementaron resistencias de pull-up para garantizar estados lógicos seguros en el control de los motores en caso de reseteo o falla en el microprocesador o el IC 74HCT244.

Finalmente, la detección de la señal FAULT se realiza mediante un divisor de tensión que asegure el estado lógico de la compuerta de entrada del IC 74HCT244.

El esquemático de conexión se muestra en la figura 8.21 mientras que la placa resultante se muestra en la figura 8.22.

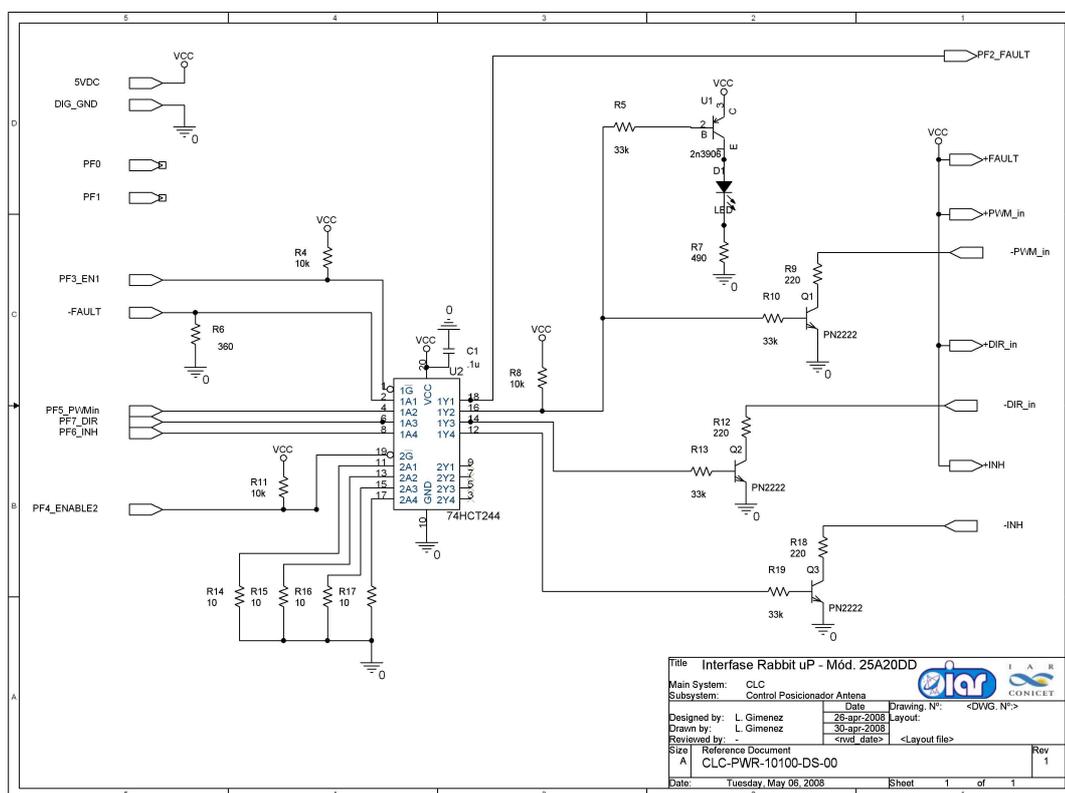


Figura 8.21: Esquemático de la placa que actúa como interfaz entre el controlador digital y los módulos de potencia.

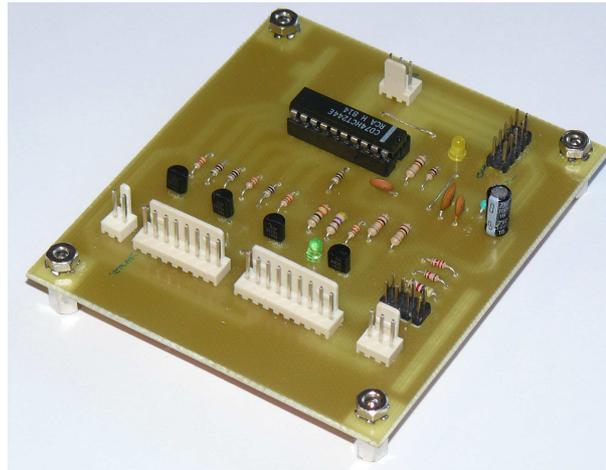


Figura 8.22: Placa interfaz entre el controlador digital y los módulos de potencia. (Prototipo).

### 8.3.6 Codificación de Posición. Encoder.

Para cumplir con la resolución en la medición de las antenas se utilizará un codificador de posición (encoder) óptico de 13 bits. El mismo es de la marca Kubler modelo 5850 y fue preseleccionado por el grupo a cargo del diseño del sistema de medida.

La comunicación con el encoder se realiza mediante una interfaz Serie Sincrónica (SSI) a una frecuencia máxima de reloj de 500kHz como se muestra en la figura 8.23.

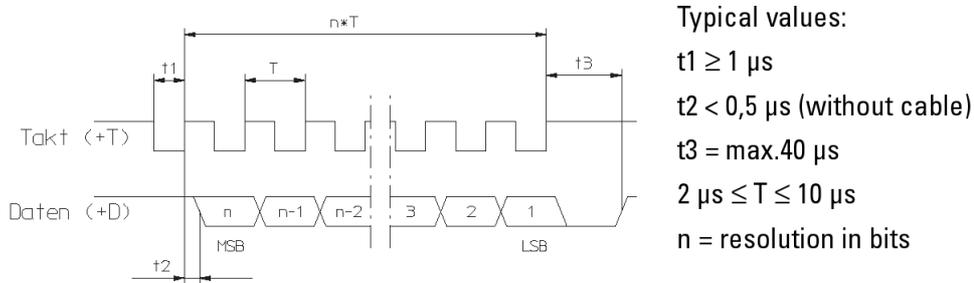


Figura 8.23: Comunicación SSI con el encoder Kubler 5850. Fuente: Kubler.

El esquema de comunicación anterior es compatible con la interfaz SSI del microprocesador Rabbit de manera que la comunicación está asegurada.

Resulta interesante determinar la máxima frecuencia a la cual se puede muestrear la posición del sistema. Suponiendo una frecuencia máxima de clock se tiene que  $T_{CLK} = 2us$  ( $f_{CLK} = 500kHz$ ), el tiempo en transmitir  $n = 13$  bits sera  $T = n \cdot T_{CLK} = 26useg$ . Por lo tanto, de la figura 8.23 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 T_{adq} &= t_1 + t_2 + n \cdot T_{CLK} + t_3 \\
 &= 1useg + 0,5useg + 26useg + 40useg = 67,5useg.
 \end{aligned}
 \tag{8.10}$$

Por lo tanto, la máxima frecuencia de muestro de la posición sera:

$$f_{adq_{max}} = 15kHz. \quad (8.11)$$

Si bien la frecuencia de muestro a utilizar será menor, de esta manera se asegura que el encoder cumpla los requerimientos de diseño.

### 8.3.7 Adquisición de la Velocidad de Giro del Motor DC. Tacómetro.

Como se vio en el Capítulo 4, la velocidad de giro del motor DC ( $\omega_m(t)$ ) se adquiere mediante un tacómetro acoplado directamente al eje del motor.

El tacómetro provisto de fábrica con el posicionador de antena es un tacómetro marca Servo-Tek cuyas especificaciones se muestran a continuación:

| Parámetro               | Valor                                |
|-------------------------|--------------------------------------|
| Marca                   | Servo-Tek                            |
| Modelo                  | SA-757A-2                            |
| Constante de Conversión | 7Volts/1000rpm                       |
| Modelo Equivalente      | $L_{tac} = 0,1Hy - R_{tac} = 350ohm$ |

Cuadro 8.6: Especificaciones del tacómetro utilizado para adquirir la velocidad de giro del motor DC.

Las especificaciones anteriores serán tenidas en cuenta a la hora del diseño del canal de adquisición de la velocidad de giro del motor DC.

## 8.4 Resumen.

Hasta aquí se describió el procedimiento llevado a cabo para la selección del controlador digital a utilizar de aquí en adelante para el control del posicionador de antena.

También se describió parte del hardware a utilizar con el objetivo de mostrar los elementos utilizados en el experimento de Identificación de Sistemas que se verá en los próximos capítulos.

El hardware restante será descripto al momento de mostrar la implementación práctica del lazo de control en el Capítulo 12.

# Capítulo 9

## Estimación del Modelo de Estados del Posicionador. Primera Parte: Experimento de Identificación.

### 9.1 Introducción.

En el Capítulo 7 se dio una breve introducción a las técnicas de identificación del tipo paramétricas y no paramétricas así como a las distintas alternativas (ya sea en relación a los posibles modelos y métodos matemáticos) para obtener un modelo dinámico del sistema que se quiere modelar.

El objetivo de este capítulo y el siguiente es describir el procedimiento seguido para obtener el modelo de estados del posicionador de antena a partir de los pasos propuestos en la sección 7.13 del Capítulo 7.

La primer parte del capítulo se centra en obtener la máxima información del sistema en base a experimentos sencillos que permitan:

- Obtener un modelo de estados continuo y discreto aproximados.
- En base a los modelos obtenidos, establecer que parámetros deben ser estimados y cuales pueden determinarse *a priori*.
- Definir ciertos parámetros que hacen al diseño del experimento de identificación (señales de entrada, salidas a medir, frecuencia de muestro, etc).

Los dos primeros puntos están orientados a obtener un modelo del tipo *Taylor-Mandé* tanto continuo como discreto como posibles líneas de trabajo para la identificación<sup>1</sup>. La validez de los modelos obtenidos será verificada junto con el resto de las alternativas propuestas en el Capítulo 7.

---

<sup>1</sup>Tener en cuenta que si bien Matlab es capaz de trabajar con modelos continuos y discretos, en la práctica el procesamiento de los datos es puramente discreto

La segunda parte consiste en la explicación de como fue implementado el experimento de identificación utilizando el hardware descrito en el Capítulo 8 y que criterios se utilizaron para el diseño del mismo así como los resultados obtenidos.

Finalmente, se muestran los resultados obtenidos de los experimentos de identificación llevados a cabo que serán utilizados en el capítulo 10 para la estimación y validación del modelo de estados del posicionador de antena.

## 9.2 Modelo Aproximado a Partir del Modelo Algebraico.

Una de las primeras sugerencias que propone la identificación de sistemas es obtener información del sistema incógnita mediante experimentos sencillos que permitan, por un lado, determinar si es necesario o no realizar un ensayo de identificación dada la complejidad que esto implica y, además, resulta conveniente tener algún grado de conocimiento sobre el sistema antes que partir de la incertidumbre total. A esto se le suma que es necesario contar con cierta información que permita diseñar el experimento de identificación.

A partir de lo anterior es evidente que el concepto de “Caja negra” es enteramente teórico y no aplicable en forma directa en la práctica.

El modelo de estados paramétrico propuesto para el posicionador de antena se repite a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ra/La & -Kb/La & 0 \\ Ki/Jeq & -Beq/Jeq & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/La \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (9.1)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

Si además se incorpora la electrónica de potencia suponiendo que es una ganancia lineal, el “modelo ampliado” del posicionador o del modelo del sistema desde el punto de vista del controlador digital tendrá la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ra/La & -Kb/La & 0 \\ Ki/Jeq & -Beq/Jeq & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{pwr}/La \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{ctrl} \quad (9.2)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

donde  $G_{pwr}$  es la ganancia de tensión de la etapa de potencia, cuya entrada es la tensión de salida del controlador digital ( $u_{ctrl}$ ) y su salida es la tensión de armadura  $v_a$  (alimentación del motor DC del posicionador de antena).

La diferencia entre ambos modelos se observa en la figura 9.1.

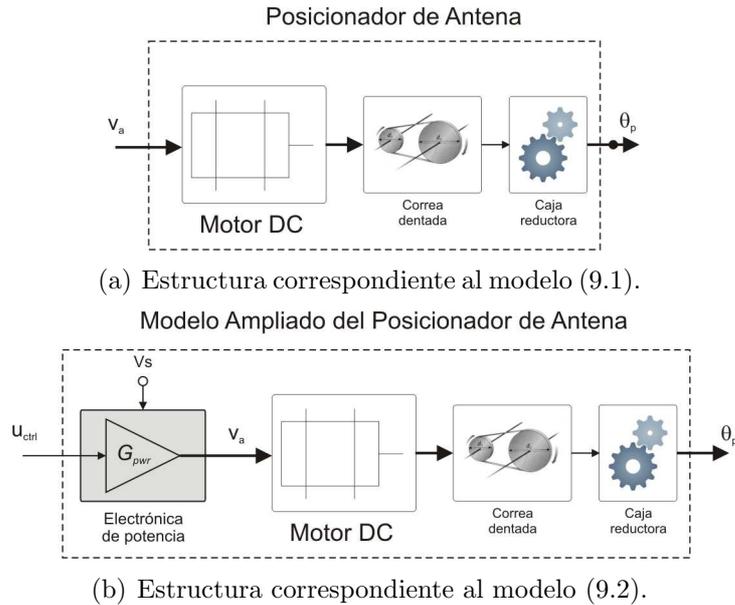


Figura 9.1: Comparación entre el modelo del posicionador para un sentido de movimiento (azimut) y el modelo ampliado propuesto.

Como punto de partida, también se puede tomar la función transferencia obtenida en el Capítulo 5 que se repite en la ecuación (9.3)

$$H(s) = \frac{\theta_p(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{R_{AZ}} \cdot \frac{K'}{s \cdot (sK_E + 1) \cdot (sK_M + 1)} \quad (9.3)$$

y cuyo diagrama en bloques se repite en la figura 9.2. (Observar que no se considera la etapa de potencia).

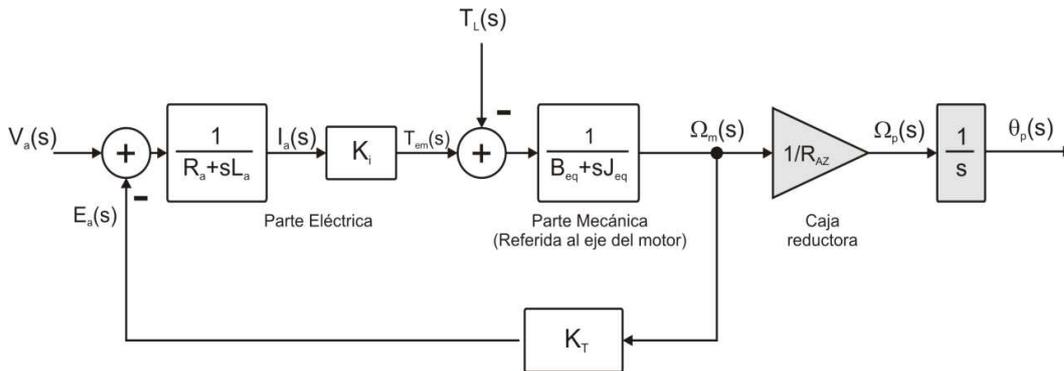


Figura 9.2: Diagrama en bloques del modelo del posicionador de antena para el movimiento en azimut en el dominio de Laplace.

En la sección 7.13.2 del capítulo 7 se estableció la importancia de contar con un modelo previo al experimento de identificación. En esta etapa del proceso, los modelos propuestos permitirán:

1. Establecer que parámetros deben ser calculados y cuales no. Por ejemplo, en el modelo (9.1) muchos de los elementos de la matriz  $A$  son cero de manera que es

válido proponer la estructura siguiente estructura Tailor-Made:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{ctrl} \quad (9.4)$$

$$y = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

la cual permite, de tener originalmente un total de 15 parámetros desconocidos (si la incertidumbre sobre las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  fuera completa para el caso de un sistema de orden 3), pasar a tener solo 6 parámetros incógnita.

2. Otro aspecto importante es que es posible asignar valores a los parámetros del modelo propuestos a partir de experimentos sencillos o tomando valores de sistemas reales conocidos. De esta manera se tiene una idea si los parámetros calculados tienen correlación con la realidad o no. Por ejemplo, parámetros que en un sistema real no podrían tomar un valor negativo.
3. Determinar tanto un modelo continuo como un modelo discreto a partir de los cuales se pueda establecer un vector  $\theta_0$  que pueda utilizarse como valor inicial de los parámetros a estimar. También puede darse el caso que algunos de los parámetros del modelo discreto sean nulos (como ocurre en el modelo continuo (9.1) o (9.2))
4. Diseñar el experimento de identificación.
5. Determinar la validez de los resultados obtenidos.

### 9.2.1 Obtención de Información del Sistema a partir de Experimentos Sencillos.

Una de las primeras tareas para la obtención de los parámetros del modelo propuestas en el capítulo 5 se repiten a continuación:

- Determinar en forma aproximada el valor del parámetro  $-R_a/L_a$ .
- Determinar la ubicación del que se supone es el polo más rápido del sistema (polo eléctrico) lo cual permitirá estimar determinar un valor de frecuencia de muestreo del sistema que cumpla con el teorema del muestreo.
- Obtener un modelo discreto del sistema (que será utilizado durante el proceso de identificación. Ver Capítulo 7).

De esta forma, determinando la constante de tiempo del polo eléctrico no solo se determina la ubicación del polo más rápido, sino que también se obtiene el valor numérico del parámetro  $a_{11}$  del modelo (9.4) y que puede utilizarse a modo de “guía” para verificar si el resto de los parámetros estimados tienen correlación con el sistema real o no.

La medida de la constante de tiempo de la corriente de armadura es posible, ya que la electrónica de potencia posee una salida cuya tensión es proporcional a la corriente de

armadura que circula por el bobinado del motor como se vio en la sección 8.3. De esta manera, se logra que los puntos accesibles de medida en el sistema sean los propuestos en el capítulo 5 cuyo esquema se repite en la figura 9.3.

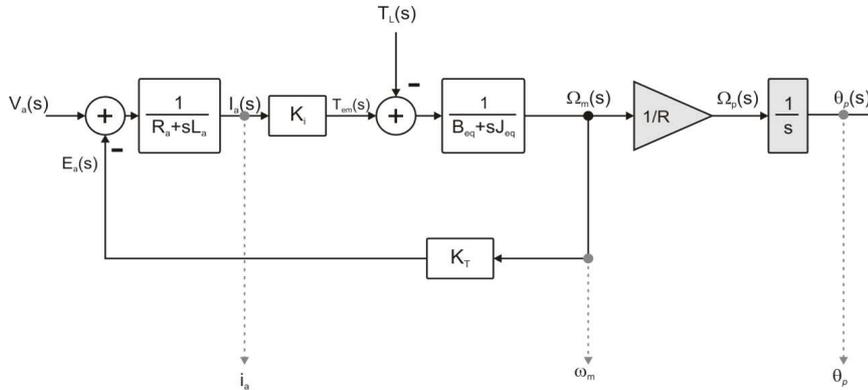


Figura 9.3: Puntos accesibles de medida de las variables del posicionador

Bajo la suposición que la dinámica del sistema se encuentra dominada por el sistema mecánico, es válido suponer que si se aplica una excitación lo suficientemente rápida a la entrada del sistema, la dinámica asociada al polo eléctrico evolucionará mucho antes que se detecte movimiento a la salida, de forma que, el lazo de realimentación intrínseco del motor de DC podría despreciarse durante los primeros instantes del ensayo y de esta forma medir la constante de tiempo eléctrica del sistema.

### 9.2.2 Medición de la Constante de Tiempo Eléctrica.

Observando de nuevo la figura 9.3, considerando como punto de partida que la dinámica del polo eléctrico es mucho más rápida que la dinámica del polo mecánico (algo muy común en este tipo de sistemas), si se aplica una señal lo suficientemente rápida tal que la corriente de armadura  $i_a$  se establezca antes que haya movimiento en el eje del motor, entonces para dicho intervalo de tiempo es posible despreciar el lazo de realimentación intrínseco del motor de continua como se observa en la figura 9.4.

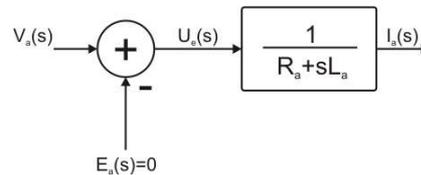


Figura 9.4: Relación entre la corriente de armadura  $i_a$  y la tensión de entrada  $V_a$  si se considera  $e_a = 0$ .

Por lo tanto, si se considera que la fuerza contraelectromotriz  $e_a$  es nula y se toma como salida a la corriente de armadura, entonces función transferencia entre la tensión de entrada  $V_a(s)$  y la corriente de armadura  $I_a(s)$  estará dada por:

$$\frac{V_a(s)}{I_a(s)} = \frac{1}{R_a + sL_a} \quad (9.5)$$

que, por ser una transferencia con un solo polo, la respuesta al escalón estará dada por

$$i_a(t) = I_{a_{max}} \left( 1 - e^{-\frac{(t-t_d)}{\tau}} \right) \quad (9.6)$$

donde

- $I_{a_{max}}$  es el valor máximo que alcanza la corriente de armadura.
- $t_d$  es el retardo entre la entrada y la salida.
- $\tau$  es la constante de tiempo de la señal. En este caso particular:  $\tau = L_a/R_a$ .

Para verificar la validez de las suposiciones realizadas, el experimento se dividió en tres partes:

1. En primer lugar se midió la constante de tiempo de la corriente de armadura.
2. Luego se midió la constante de tiempo de la velocidad angular.
3. Finalmente, se midió la constante de tiempo durante un período mayor para verificar que el lazo de realimentación intrínseco no es despreciable si el intervalo de tiempo considerado es mayor que la constante de tiempo del polo eléctrico.

### Medición de la constante de tiempo de la corriente de armadura $i_a$ .

El procedimiento consistió en excitar el sistema con un escalón generado con el microprocesador Rabbit implementando el sistema que se muestra en la figura 9.5 donde se considera como entrada al sistema la salida del controlador digital, por lo tanto se está considerando como “sistema” al sistema ampliado propuesto en la sección anterior.

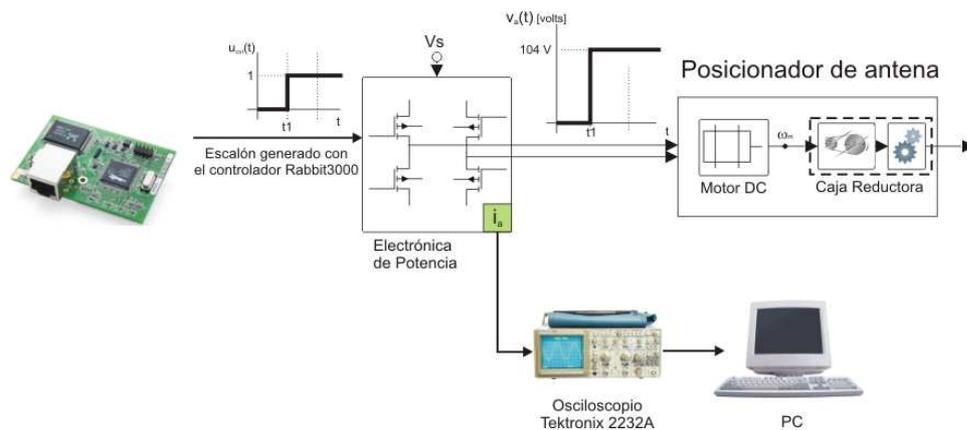


Figura 9.5: Estructura del experimento utilizado para medir la evolución de la corriente de armadura del posicionador de antena.

La respuesta obtenida es una tensión proporcional a la corriente armadura del motor DC como se vio en la sección 8.3. Para el caso en que no se aplican los limitadores de corriente se tiene que  $1V = 4A$ .

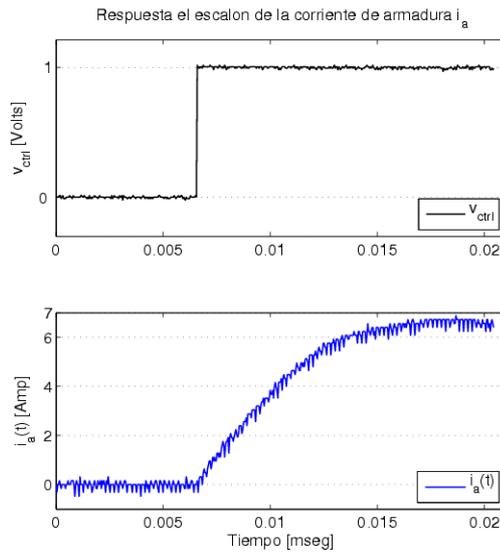
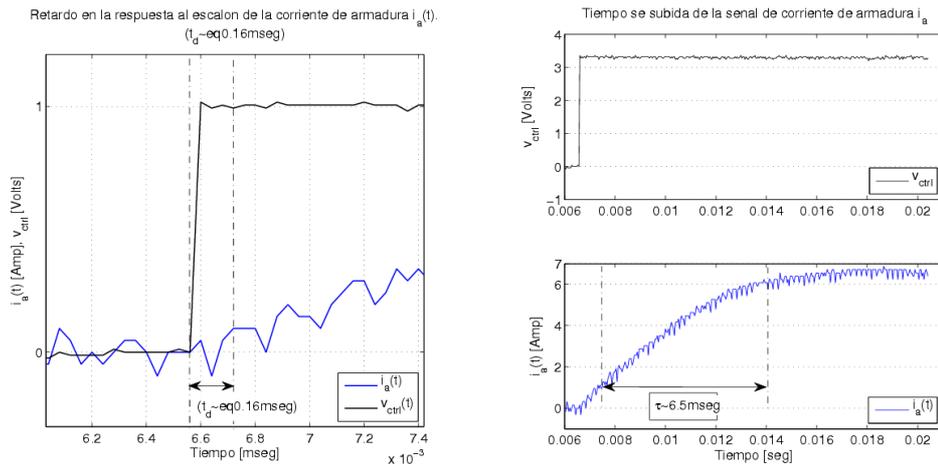


Figura 9.6: Respuesta al escalón de la corriente de armadura.



(a) Retardo en la respuesta de la corriente de armadura

(b) Tiempo de subida de la corriente de armadura

Figura 9.7: Retardo y tiempo de subida de la corriente de armadura cuando se aplica un escalón a la entrada.

La respuesta de la corriente armadura se muestra en la figura 9.6. Los datos fueron adquiridos con un osciloscopio Tektronix 2232A que dispone de almacenamiento y luego exportados a una computadora personal.

Luego, utilizando cursores se puede medir el tiempo de subida  $t_r$  y el retardo  $t_d$ .

De la figura 9.7 se tiene que:

- $t_r = 6,5$  milisegundos.
- $t_d \simeq 0,16$  milisegundos, por lo que se considerará despreciable.

La constante de tiempo del polo eléctrico se sabe que está dada por:

$$\tau_e = \frac{t_r}{2,2} = 2,97mseg. \quad (9.7)$$

Lo que determina que la frecuencia de corte del polo eléctrico es:

$$\omega_{He} = 336,9rads/seg \quad (9.8)$$

o lo que es lo mismo, se establece que la ubicación del polo es:

$$p_e = -\frac{R_a}{L_a} = -336,9rads/seg \quad (9.9)$$

Otro aspecto interesante es que experimentalmente se determinó el valor del parámetro  $a_{11}$  del modelo continuo propuesto ya que a partir de la ecuación (9.9) se tiene que:

$$a_{11} = -\frac{R_a}{L_a} = -336,9 \quad (9.10)$$

### Medición de la constante de tiempo de la velocidad angular $\omega_m$ .

Al igual que en caso anterior se utilizó un esquema similar para medir la constante de tiempo de la velocidad angular  $\omega_m$  (ver figura 9.8).

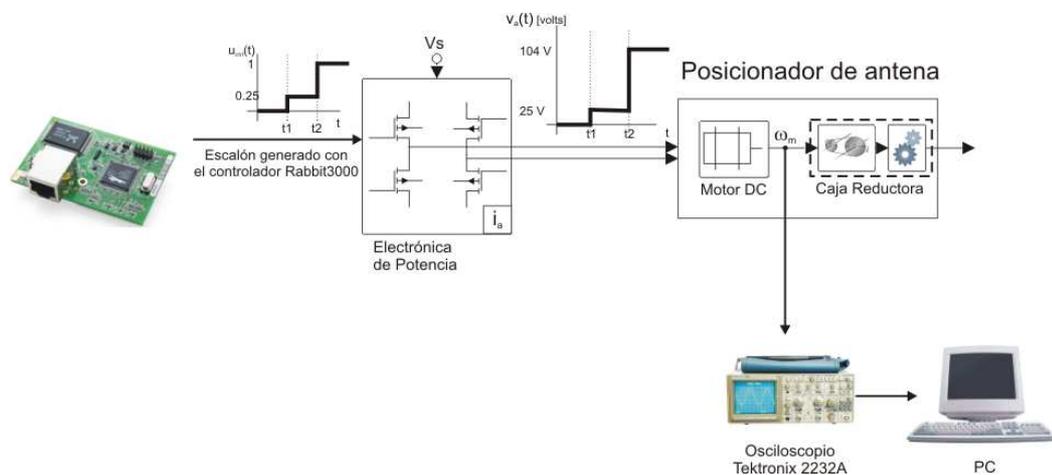
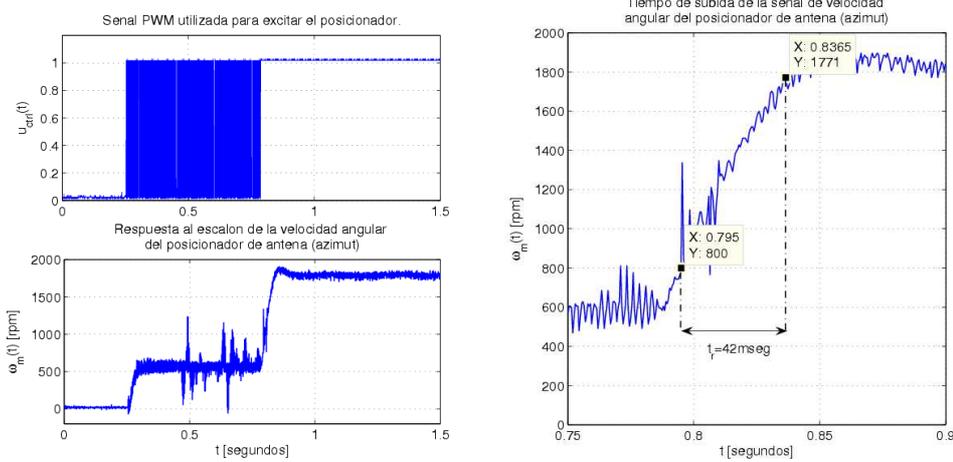


Figura 9.8: Laboratorio utilizado para medir la constante de tiempo asociada al polo mecánico.

Sin embargo, ahora el sistema se excitó en dos etapas:

1. En la primer etapa se aplicó un escalón con una amplitud de 1/4 de la amplitud máxima utilizando una señal PWM con ciclo de trabajo del 25 %.
2. Una vez en estado estacionario, se cambió en ciclo de trabajo del 25 % al 100 %, lo que equivale a aplicar toda la potencia disponible.



(a) Señal utilizada a la entrada y respuesta del sistema. (b) Medición del tiempo de subida de la señal  $\omega_m(t)$ .

Figura 9.9: Respuesta de la señal  $\omega_m$  a una entrada del tipo escalón.

De esta manera se trató de evitar cualquier tipo de no linealidad principalmente en la parte mecánica como tiempos muertos, etc. La evolución de la señal de velocidad angular, medida mediante el tacómetro acoplado al eje del motor DC (entrada al sistema reductor) se muestra en la figura 9.9

De la figura 9.9(b) se obtiene que el tiempo de subida de la señal de velocidad angular del motor DC es  $t_r = 42$  milisegundos. De igual forma que en la sección anterior, la frecuencia de corte de la dinámica asociada al polo mecánico será:

$$\omega_{Hmec} = 52 \text{ rads/seg} \quad (9.11)$$

o lo que es lo mismo 8.32 Hz, mucho menor que para el polo eléctrico.

En la figura 9.9 se observa que una vez establecida la velocidad angular, toma el valor de 1800 rpm (recordar que está medida en el eje del motor) o lo que es lo mismo 188.5  $\text{rads/seg}$  que es la unidad en la cual se expresa la velocidad angular en el eje del motor  $\omega_m(t)$  en el modelo del posicionador de antena y que es la velocidad máxima de giro que puede alcanzar el motor DC.

### Verificación que el lazo de realimentación intrínseco propio del motor DC no es despreciable.

Un aspecto interesante a verificar es que efectivamente la suposición que la fuerza contraelectromotriz  $e_a$  es nula solo es válida durante un corto período de tiempo y si la señal aplicada es lo suficientemente rápida para establecerse antes que el eje del motor comience a girar. En la figura 9.10 se observa que pasado el pico en respuesta a la variación de la señal de entrada, el valor de la corriente de armadura comienza a disminuir. Lo anterior se debe a que el motor se acelera y por lo tanto el valor de la velocidad angular  $\omega_m$  comienza a incrementarse y por lo tanto también el valor de  $e_a$  (ver modelo del motor DC). Por lo tanto, no debe olvidarse que los resultados obtenidos son todos aproximaciones producto

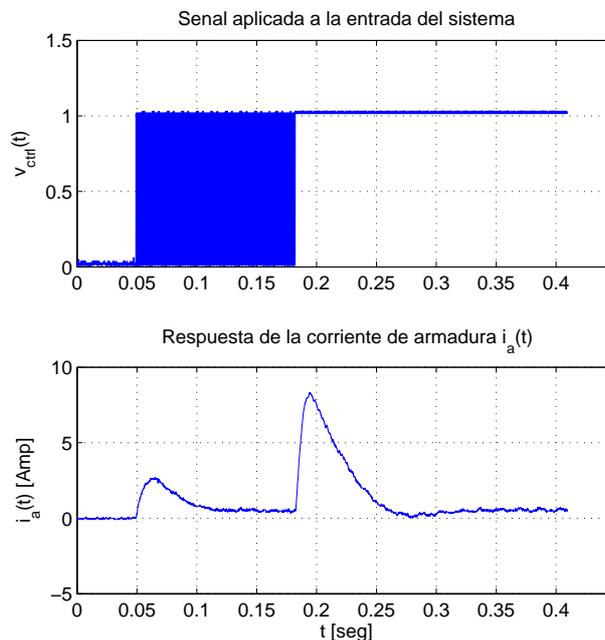


Figura 9.10: Evolución de la corriente de armadura  $i_a(t)$  cuando se aplica un escalón. Observar la disminución en su valor luego de cada pico debido a  $e_a \neq 0$ .

de simplificaciones supuestas para poder establecer un punto de partida en el análisis del posicionador y el diseño del experimento de identificación.

### 9.2.3 Conclusiones a partir los experimentos previos realizados al posicionador.

Hasta aquí se puede determinar que:

1. El polo eléctrico se encuentra ubicado en  $p_e = -336,9\text{rads/seg}$ .
2. El polo asociado a la parte mecánica se encuentra en  $p_m = -52\text{rads/seg}$ .
3. Si bien la aproximación de polo dominante no se cumple en sentido estricto, se puede suponer que la respuesta estará dominada por el polo mecánico.
4. A partir de la determinación del polo más rápido del sistema, se puede establecer que el ancho de banda del mismo es  $BW_{sys} = 336\text{rads/seg}$  o  $BW_{sys} = 53,5\text{Hz}$ .

**Un aspecto a tener en cuenta:** si se observa la respuesta de la velocidad angular del sistema mostrada en la figura 9.9(b) la misma no se corresponde con una exponencial tal como correspondería debido a que se verifica la aproximación de polo dominante, sino que presenta sobrepaso. Cuando se realizó esta medida se observó dicho fenómeno y se asoció el mismo a expansiones y compresiones de la correa dentada que vincula el motor DC con el sistema reductor. Si efectivamente fuera esta la causa, se introducirían un par de polos complejos en el sistema los cuales no han

sido contemplados en el modelo propuesto, pero si fue la causa por la que se incluyó dentro de las líneas de trabajo de identificación la estimación de modelos de orden 5. Los resultados obtenidos se verán en el capítulo 10.

### 9.3 Cálculo del Modelo Discreto del Posicionador.

Como se vio en el Capítulo 5 , el modelo de estados discreto equivalente de un sistema continuo estará dado por

$$\begin{aligned}x[n + 1] &= A_D \cdot x[n] + B_D \cdot u[n] \\y[n] &= C_D \cdot x[n]\end{aligned}\tag{9.12}$$

donde

$$\begin{aligned}A_D &= \phi(T_s) \\B_D &= \int_0^{T_s} \phi(\delta) \cdot B \cdot d\delta \\C_D &= C\end{aligned}\tag{9.13}$$

y  $\phi(T_s)$  es la matriz de transición de estados evaluada en período de muestreo  $T_s$ . Por lo tanto, para obtener el modelo de estados discreto deberá determinarse:

1. La expresión de la matriz de transición de estados  $\phi(t)$ .
2. El valor de los parámetros del modelo continuo (ya que el cálculo de matriz de estados discreta depende de la matriz  $A$ ).
3. El período de muestro  $T_s$ .

con la dificultad que son todas expresiones desconocidas o no han sido determinadas hasta el momento (como por ejemplo el período de muestreo).

Para resolver el problema planteado se recurrió a buscar la manera de hallar la expresión de la matriz de transición de estados cuando se desconocen los parámetros del modelo del sistema en cuestión. En el Capítulo 5 se mostraron dos formas de obtener la expresión de  $\phi(t)$ :

1. Aplicando la transformada de Laplace inversa de manera que  $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$ .
2. A partir del desarrollo en serie de potencias de la solución homogénea de la ecuación  $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$  dada por  $\phi(t) = e^{At}$ , por lo que el problema consiste ahora en el desarrollo en serie de potencias de una función exponencial.

Si bien ambas soluciones dependen de la matriz  $A$  del modelo de estados continuo, el primer caso se vuelve extremadamente complejo si se quiere determinar la expresión de la matriz de transición de estados en forma algebraica que, en parte, es lo que se busca. En cambio, si se propone como solución a  $\phi(t) = e^{At}$  es posible aproximar su valor mediante el desarrollo en serie de potencias dado por:

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots\tag{9.14}$$

De manera que estableciendo algún criterio para truncar la serie de potencias (9.14), es posible hallar una expresión algebraica de  $\phi(t)$ . Esto permitirá:

- Determinar un modelo algebraico aproximado del modelo equivalente discreto del posicionador.
- Determinar que parámetros del modelo discreto deben ser estimados y cuales poseen un valor fijo (por ejemplo, al igual que en el caso continuo, aquellos parámetros nulos).
- Determinar un conjuntos de parámetros aproximados a modo de valor inicial y que determinen el vector de parámetros iniciales  $\hat{\theta}(0)$ .

**Desarrollo en serie de Taylor de  $\phi(t) = e^{At}$ .**

Se sabe que el desarrollo en serie de potencias de una función  $f(x)$  con derivadas de cualquier orden ( $n = 1, 2, \dots$ ) en el punto  $x_0$  está dado por

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (9.15)$$

Dado que no es posible calcular la serie con infinitos términos, entonces se recurre a aproximarla mediante un polinomio de Taylor de orden  $n$  considerando el error producto de tomar un número finito de términos. De esta manera se tiene que

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (9.16)$$

donde  $P_n(x)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  y  $R_{n+1}(x)$  es la forma del residuo de Lagrange. De esta manera, dada la función  $f : D \rightarrow R$  con derivadas de orden  $n$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$  cuya derivada de orden  $n$  es continua en dicho intervalo; supóngase también que la función  $f$  es  $n + 1$  veces derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Si se considera un punto  $x_0 \in [a, b]$  entonces, para cada punto  $x \in [a, b]$ . la función  $f(x)$  puede expresarse como

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{n + 1!}(x - x_0)^{n+1} \quad (9.17)$$

y se verifica que existe al menos un valor de  $\varepsilon$  comprendido entre  $x$  y  $x_0$  tal que el resto de la  $n$ -ésima fórmula de Taylor estará dada por

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{n + 1!}(x - x_0)^{n+1} \quad (9.18)$$

que es la forma del residuo de Lagrange mencionada anteriormente y que debe verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{n + 1!}(x - x_0)^{n+1} = 0 \quad (9.19)$$

para que la representación en serie de potencias exista.

En el caso particular de la función exponencial  $e^x$ , la serie de potencias alrededor del punto  $x_0 = 0$  (serie de Maclaurin) estará dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (9.20)$$

cuya expresión del residuo es

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\varepsilon}{n+1!} x^{n+1} \text{ para } \varepsilon \text{ entre } 0 \text{ y } x \quad (9.21)$$

y puede demostrarse que verifica la condición (9.19) por lo que será posible expresar  $e^x$  como una serie de potencias.

Volviendo a la expresión (9.16) se observa que si una función  $f(x)$  se aproxima mediante el polinomio de Taylor  $P_n(x)$  el error cometido en dicha aproximación está dado por  $R_{n+1}(x)$ . Por lo tanto, una forma de acotar el error en la aproximación es establecer una cota de error que permita determinar el grado  $n$  del polinomio de Taylor.

Observando la expresión del residuo para la función exponencial (ec. (9.21)) se tiene que la expresión de la matriz de transición de estados en función del polinomio de Taylor de grado  $n$  alrededor del instante inicial  $t_0 = 0$  estará dada por la ecuación (9.22)

$$\phi(t) = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{A^n}{n!} t^n + \frac{A^{n+1}}{n+1!} e^{A\varepsilon} t^{n+1} \text{ para } \varepsilon \text{ entre } 0 \text{ y } t. \quad (9.22)$$

Dado que nuestro objetivo es obtener  $\phi(T_s)$  la ecuación (9.22) toma la siguiente forma:

$$\phi(T_s) = I + AT_s + \frac{A^2}{2!} T_s^2 + \dots + \frac{A^n}{n!} T_s^n + \frac{A^{n+1}}{n+1!} e^{A\varepsilon} T_s^{n+1} \text{ para } \varepsilon \text{ entre } 0 \text{ y } T. \quad (9.23)$$

El problema radica ahora en determinar el valor de  $n$  que debe considerarse para asegurar una aproximación válida. Si se considera el término del residuo de Lagrange como el error de la aproximación el primer inconveniente surge debido a que el valor de  $\varepsilon$  es desconocido (solo se sabe que se encuentra entre 0 y  $T$ ) por lo que es necesario recurrir a otra solución.

Volviendo al caso general de aproximar  $f(x) = e^x$ , una primer opción es considerar una cota máxima del error tal que se cumpla

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{n+1!} |x|^{n+1} \quad (9.24)$$

condición que se cumple si existe un número real  $M$  tal que  $e^\varepsilon \leq M$ .

En el caso de la matriz de transición de estados, al ser una matriz, debería verificarse que  $e^{A\varepsilon} \leq M$  donde  $M$ , en este caso, también es una matriz lo cual no es posible ya que no se ha definido una relación de orden entre las matrices <sup>2</sup>.

Otro inconveniente es que al no poder definirse *a priori* la estructura de la matriz  $A$  no se puede seguir avanzando con esta solución. En el caso que  $A$  fuera una matriz diagonal (la cual contiene todos sus autovalores en la diagonal principal) podría realizarse un análisis del tipo “peor caso” considerando el autovalor más rápido y estableciendo como condición que  $e^{\lambda_{max}\varepsilon} \leq M$  donde  $M$  ahora es un escalar.

---

<sup>2</sup>Si bien existe toda una teoría que permita establecer un orden entre matrices dicho estudio excede el alcance de este trabajo.

Aplicar una transformación lineal a la matriz  $A$  para llevarla a la forma diagonal carece también de sentido para el cálculo propuesto.

Otra alternativa es, al no estar establecido el orden  $n$  del polinomio de Taylor a utilizar en la aproximación, desarrollar entonces el polinomio de Taylor hasta alcanzar un orden  $N < n$  tal que el término siguiente (correspondiente a  $N + 1 \leq n$ ) sea despreciable frente al  $N$ -ésimo término. De esta manera se puede expresar a la matriz de transición de estados evaluada en  $T_s$  mediante la aproximación por el polinomio de Taylor como:

$$\begin{aligned} \phi(T_s) = I + AT_s + \frac{A^2}{2!}T_s^2 + \dots + \frac{A^N}{N!}T_s^N + \frac{A^{N+1}}{(N+1)!}T_s^{N+1} + \dots \\ + \frac{A^n T_s^n}{n!} + \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}e^{A\varepsilon T_s^{n+1}} \quad \text{para } \varepsilon \text{ entre } 0 \text{ y } T. \end{aligned} \quad (9.25)$$

cuya expresión aproximada estará dada por:

$$\phi(T_s) \simeq I + AT_s + \frac{A^2}{2!}T_s^2 + \dots + \frac{A^N}{N!}T_s^N. \quad (9.26)$$

El problema se reduce ahora al cálculo del número entero  $N$ . Para esto se utilizará la ecuación (9.26) considerando también el término de que depende de  $N + 1$ :

$$\phi(T_s) \simeq I + AT_s + \frac{A^2}{2!}T_s^2 + \dots + \frac{A^N}{N!}T_s^N + \frac{A^{N+1}}{(N+1)!}T_s^{N+1} \quad (9.27)$$

Ahora, dado que para el cálculo de  $N$  deben compararse los términos  $A^N T_s^N / N!$  y  $A^{N+1} T_s^{N+1} / (N+1)!$  deben resolverse previamente dos cuestiones:

1. Para el cálculo es necesario elevar la matriz  $A$  a potencias elevadas dependiendo de los resultados que se obtienen al incrementar el valor de  $N$  lo que complica la situación.
2. Ambos términos son matrices, de manera que aparece de nuevo el problema de comparar matrices lo cual carece de sentido. Por lo tanto, deberá establecerse algún otro criterio que permita comparar ambos términos utilizando otra variable.

Con respecto a la primer cuestión, se halló la forma de expresar la ecuación (9.27) en una forma “anidada” mediante una forma que se utiliza generalmente para realizar los cálculos en computadora. Dicha forma se obtiene sacando como factor común al término  $AT$  sucesivamente como se muestra en la ecuación (9.28).

$$\begin{aligned} \phi(T_s) &\simeq I + AT_s + \frac{A^2}{2!}T_s^2 + \frac{A^3}{3!}T_s^3 + \dots + \frac{A^N}{N!}T_s^N + \frac{A^{N+1}}{(N+1)!}T_s^{N+1} \text{ de la ecuación (9.25)} \\ &\simeq I + AT_s \left\{ I + \frac{AT_s}{2} + \frac{A^2 T_s^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{A^{N-1} T_s^{N-1}}{2 \cdot 3 \dots (N-1)N} + \frac{A^N T_s^N}{2 \cdot 3 \dots N \cdot (N+1)} \right\} \\ &\simeq I + AT_s \left\{ I + \frac{AT_s}{2} \left[ I + \frac{AT_s}{3} + \dots + \frac{A^{N-2} T_s^{N-2}}{3 \dots (N-1)N} + \frac{A^{N-1} T_s^{N-1}}{3 \dots N \cdot (N+1)} \right] \right\} \\ &\vdots \\ &\simeq I + AT_s \left\{ I + \frac{AT_s}{2} \left[ I + \frac{AT_s}{3} \left( I + \dots \left( I + \frac{AT_s}{N} + \frac{A^2 T_s^2}{N \cdot (N+1)} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.28)$$

De la ecuación anterior, se tiene que ahora  $N$  debe ser tal que  $A^2T_s^2/N(N+1)$  sea despreciable frente a  $AT_s/N$ .

Si bien el problema de elevar la matriz  $A$  a potencias elevadas quedó resuelto, los términos a comparar siguen siendo matrices.

La solución al segundo problema no es del todo directa y aquí solo se tratará **suponiendo que la matriz  $A$  es diagonal o que existe una transformación lineal que permite llevar a la matriz  $A$  del modelo de estados continuo no diagonal a la forma diagonal** como es el caso del modelo propuesto por el posicionador cuyos polos son reales y distintos. Para esto se utilizarán transformaciones lineales que matemáticamente son un cambio en la base del sistemas de coordenadas, pero de gran utilidad en el área del control moderno ya que permiten una percepción distinta del problema sin alterar las características del mismo. Es decir, si a un sistema se le aplica una transformación lineal, sus características como ubicación de los polos, observabilidad, controlabilidad, etc., permanecerán inalteradas (ya que lo único que cambia es el modelo que representa al sistema y no el sistema en sí mismo). Supóngase entonces que existe una matriz de transformación  $T$  que permite pasar del espacio de estados original  $x$  al espacio transformado  $z$  tal que

$$z = Tx \quad (9.29)$$

y cuya inversa permitirá volver al sistema original de forma que

$$x = T^{-1}z = Pz \quad (9.30)$$

quedando definida la matriz  $P$  que será utilizada para pasar de un sistema a otro. Puede demostrarse entonces que, dado un sistema cuyo modelo de estados está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (9.31)$$

si se aplica la transformación  $x = Pz$  se tiene el sistema transformado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_z z + B_z u \\ y &= C_z z \end{aligned} \quad (9.32)$$

donde

- $A_z = P^{-1}AP$ .
- $B_z = P^{-1}B$ .
- $C_z = CP$ .

Análogamente, si se estuviera en el espacio  $z$  y se aplicara la transformación inversa para retornar al espacio original  $x$  se tendría que:

- $A = PA_zP^{-1}$
- $B = PB_z$
- $C = C_zP^{-1}$ .

Es este concepto de transformaciones para obtener modelos más “sencillos” para un determinado análisis o aplicación es el que se utilizará para resolver el problema de hallar el orden del polinomio de Taylor que aproxima a la función  $\phi(T_s)$ . (Para más información sobre transformaciones y modelos de especial interés ver [7],[8]).

Dentro del grupo de los modelos de especial interés aparece el modelo diagonal cuya característica principal es que, para el caso de un sistema con polos reales y distintos, los autovalores de la matriz (que determinan la ubicación de los polos del sistema) se encuentran sobre la diagonal principal de la matriz  $A$  (que en este informe se denominará  $A_{diag}$ ) de manera que la estructura general del modelo para un sistema de orden  $n$  puede expresarse de la siguiente forma<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{diag}x + B_{diag}u \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x + B_{diag}u \\ y &= C_{diag}x \end{aligned} \quad (9.33)$$

Volviendo al problema de aproximar  $\phi(T_s)$  se pueden suponer dos casos:

1. La matriz  $A$  del sistema real es diagonal, por lo tanto se cumple que  $A = A_{diag}$ .
2. La matriz  $A$  del sistema real no es diagonal (como en el caso del modelo propuesto para el posicionador), pero existe una transformación lineal  $P$  tal que la matriz del sistema original puede escribirse como

$$A = PA_{diag}P^{-1}. \quad (9.34)$$

Si se considera la primera hipótesis, la ecuación (9.27) estará dada por:

$$\phi(T_s) = I + A_{diag}T_s + \frac{A_{diag}^2 T_s^2}{2!} + \dots + \frac{A_{diag}^N T_s^N}{N!} + \frac{A_{diag}^{N+1} T_s^{N+1}}{(N+1)!}. \quad (9.35)$$

Expresando  $A_{diag}$  en su forma matricial y suponiendo que el  $n$ -ésimo autovalor se encuentra asociado al polo más rápido del sistema de manera que  $\lambda_n = \lambda_{máx}$  ( $\lambda_{máx}$  es el autovalor de mayor módulo) se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi(T_s) &= I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix} T_s + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix}^2 T_s^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{N!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix}^N T_s^N + \frac{1}{(N+1)!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix}^{N+1} T_s^{N+1} \end{aligned} \quad (9.36)$$

---

<sup>3</sup>En el caso que el sistema posea polos de orden múltiple o complejos conjugados la matriz  $A_{diag}$  no adopta la forma diagonal mostrada, sino que adquiere una estructura similar denominada *Forma de Jordan*. Para más información ver [8]

ecuación que puede expresarse como un vector de orden  $n \times 1$  donde cada fila es el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial  $e^{\lambda_i T}$ . Esto se muestra en la ecuación (9.37).

$$\phi(T_s) = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 T_s + \frac{\lambda_1^2}{2!} T_s^2 + \dots + \frac{\lambda_1^N}{N!} T_s^N + \frac{\lambda_1^{N+1}}{(N+1)!} T_s^{N+1} \\ 1 + \lambda_2 T_s + \frac{\lambda_2^2}{2!} T_s^2 + \dots + \frac{\lambda_2^N}{N!} T_s^N + \frac{\lambda_2^{N+1}}{(N+1)!} T_s^{N+1} \\ \vdots \\ 1 + \lambda_{máx} T_s + \frac{\lambda_{máx}^2}{2!} T_s^2 + \dots + \frac{\lambda_{máx}^N}{N!} T_s^N + \frac{\lambda_{máx}^{N+1}}{(N+1)!} T_s^{N+1} \end{bmatrix} \quad (9.37)$$

Se puede verificar entonces que **para un determinado valor de  $N$  el mayor error en la aproximación propuesta se tiene para el término asociado a  $\lambda_{máx}$ .**

Si se considera ahora el segundo caso donde  $A \neq A_{diag}$ , sustituyendo la matriz  $A$  del sistema original por su equivalente en función de la matriz  $A$  del modelo diagonal ( $A_{diag}$ ) dada por la ecuación (9.34) en la ecuación (9.27) se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(T_s) = I + (PA_{diag}P^{-1})T_s + \frac{(PA_{diag}P^{-1})^2}{2!} T_s^2 + \dots + \\ + \frac{(PA_{diag}P^{-1})^N}{N!} T_s^N + \frac{(PA_{diag}P^{-1})^{N+1}}{(N+1)!} T_s^{N+1}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Por propiedad distributiva (teniendo en cuenta la multiplicación a izquierda y derecha), la ecuación (9.38) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\phi(T_s) = P \left( I + A_{diag}T_s + \frac{A_{diag}^2}{2!} T_s^2 + \dots + \frac{A_{diag}^N}{N!} T_s^N + \frac{A_{diag}^{N+1}}{(N+1)!} T_s^{N+1} \right) P^{-1} \quad (9.39)$$

donde, sustituyendo por la forma matricial de  $A_{diag}$  al igual que en la ecuación (9.36) se obtiene la aproximación por serie de Taylor para el término entre paréntesis. Ver ecuación (9.40).

$$\begin{aligned} \phi(T_s) = P \left( I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix} T_s + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix}^2 T_s^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{N!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix}^N T_s^N + \frac{1}{(N+1)!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{máx} \end{bmatrix}^{N+1} T_s^{N+1} \right) P^{-1}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Si bien ahora el cálculo no es tan directo ya que hay que tener en cuenta que la multiplicación por  $P$  y su inversa  $P^{-1}$  a los extremos, se sigue verificando que el mayor error estará asociado a todos aquellos términos relacionados al autovalor de mayor valor absoluto ( $\lambda_{máx}$ ).

Siguiendo con la suposición que el polo más rápido es el polo eléctrico de acuerdo a lo establecido en la sección anterior, entonces el cálculo de  $N$  se reduce a resolver la

siguiente desigualdad obtenida a partir de la expresión “anidada” (9.28):

$$\text{Hallar } N \text{ tal que } \frac{|\lambda_{m\acute{a}x}|T_s}{N} > 10 \frac{|\lambda_{m\acute{a}x}|^2 T_s^2}{N+1} \quad (9.41)$$

Simplificando la ecuación anterior se tiene que  $N$  deberá ser tal que:

$$\boxed{N > 10|\lambda_{m\acute{a}x}|T_s - 1}. \quad (9.42)$$

Para determinar el valor de  $N$  se toman los siguientes valores:

- $|\lambda_{m\acute{a}x}| = 336,7 \text{ rad/seg.}$
- $T_s = 1 \text{ msec.}$  (La justificación de este valor se verá en la sección de donde se tiene que

$$N > 3,36 \Rightarrow \boxed{N = 4} \quad (9.43)$$

De esta manera se tiene que la expresión aproximada de  $\phi(T_s)$ , que a partir de ahora se denominará como  $\tilde{\phi}(T_s)$  la cual estará dada por:

$$\tilde{\phi}(T_s) = I + AT_s + \frac{A^2 T_s^2}{2!} + \frac{A^3 T_s^3}{3!} + \frac{A^4 T_s^4}{4!} \quad (9.44)$$

y que puede expresarse en forma anidada:

$$\tilde{\phi}(T_s) = I + AT_s \left\{ I + \frac{AT_s}{2} \left[ I + \frac{AT_s}{3} \left( I + \frac{AT_s}{4} \right) \right] \right\}. \quad (9.45)$$

La ecuación (9.45) será considerada como la expresión de  $\phi(T_s)$  para los cálculos de aquí en adelante.

### Estructura paramétrica del modelo de estados discreto del posicionador.

A partir de la estructura paramétrica del modelo de estados continuo propuesta en la ecuación (9.4), sustituyendo la estructura de la matriz  $A$  propuesta en la ecuación (9.45) permitirá obtener la estructura paramétrica de la matriz  $A_D$  del modelo discreto<sup>4</sup>. Entonces, dada la matriz  $A$  del modelo continuo del posicionador de antena cuya expresión paramétrica está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

Sustituyendo dicha ecuación en la expresión de  $\tilde{\phi}(T_s)$  se tiene que:

$$A_D = \tilde{\phi}(T_s) = \begin{bmatrix} a_{D11} & a_{D12} & 0 \\ a_{D21} & a_{D22} & 0 \\ a_{D31} & a_{D32} & 1 \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

---

<sup>4</sup>De aquí en adelante el subíndice D se utilizará para referirse al modelo discreto o parámetros del modelo discreto

donde cada elemento  $a_{Dij}$  es función de los parámetros de la matriz  $A$  de la ecuación (9.46).

La matriz  $B_D$  correspondiente al modelo discreto se sabe que estará dada por <sup>5</sup>

$$B_D = \int_0^{T_s} \phi(\delta) \cdot B \cdot d\delta \quad (9.48)$$

Si se considera a  $\tilde{\phi}(\delta)$  como una aproximación de  $\phi(\delta)$  dada por la ecuación (9.44), se puede demostrar que es posible integrar término a término obteniéndose como resultado que:

$$\begin{aligned} B_D &= \left[ IT_s + AT_s^2 + \frac{A^2 T_s^3}{2!} + \frac{A^3 T_s^4}{3!} + \frac{A^4 T_s^5}{4!} \right] B \\ &= T_s \left[ I + AT_s + \frac{A^2 T_s^2}{2!} + \frac{A^3 T_s^3}{3!} + \frac{A^4 T_s^4}{4!} \right] B \\ &= T_s \tilde{\phi}(T_s) B \end{aligned} \quad (9.49)$$

Procediendo de igual manera que con la matriz  $A_D$  se obtuvo que la estructura paramétrica de la matriz  $B_D$  que estará dada por:

$$B_D = \begin{bmatrix} b_{D11} \\ b_{D21} \\ b_{D31} \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

Por lo tanto, la estructura paramétrica que determinará que parámetros deben estimarse en el proceso de identificación del modelo discreto del posicionador de antena estará dada por la siguiente estructura de modelo:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} a_{D11} & a_{D12} & 0 \\ a_{D21} & a_{D22} & 0 \\ a_{D31} & a_{D32} & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} b_{D11} \\ b_{D21} \\ b_{D31} \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] &= [0 \ 0 \ 1] x[k] \end{aligned} \quad (9.51)$$

De esta forma es posible determinar que parámetros que deben ser estimados cuando se trabaje con el modelo Taylor-Made discreto y cuales no (debido a que su valor es conocido) en el proceso de identificación.

El modelo obtenido en la ecuación (9.51) también permitirá determinar el vector de parámetros  $\theta_0$  que contiene los valores iniciales de cada parámetro incógnita. El mismo será obtenido en la sección siguiente

### 9.3.1 Modelo aproximado del modelo continuo y el equivalente discreto del posicionador de antenas. Valores iniciales.

Para la determinación de los valores aproximados se consideraron aquellos valores conocidos (como por ejemplo la constante de tiempo del polo eléctrico), aquellos valores de los cuales se tienen una idea aproximada de su valor (como la reducción del sistema mecánico)

---

<sup>5</sup>Observar que  $\phi(\delta)$  es equivalente a  $\phi(t)$  con el correspondiente cambio de variables.

y para aquellos valores que son absolutamente desconocidos se tomaron parámetros de un motor de similares características que se encuentra en el Laboratorio de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación (LEICI) cuyos datos se encuentran en la publicación [12]. De esta manera se tiene que dado el modelo continuo de la ecuación (9.1) una aproximación del modelo se obtiene si se suponen los siguientes parámetros:

1. Parámetros conocidos/medidos:

| Parámetro | Valor               |
|-----------|---------------------|
| $R_a$     | 30 <i>ohm</i>       |
| $L_a$     | 89 <i>mH</i>        |
| $R_a/L_a$ | 337 <i>rads/seg</i> |
| $G_{pwr}$ | 104                 |

Cuadro 9.1: Cuadro de parámetros conocidos o medidos del modelo del posicionador.

2. Parámetros aproximados medidos experimentalmente:

| Parámetro | Valor |
|-----------|-------|
| $R_{AZ}$  | 1438  |

Cuadro 9.2: Cuadro de parámetros aproximados del modelo del posicionador.

3. Parámetros de un motor DC con similares prestaciones:

| Parámetro | Valor                                       |
|-----------|---|
| $K_b$     | 0.0132[V · s/rad]                           |
| $K_i$     | 0.0132[N · m/A]                             |
| $B$       | $2,3 \times 10^{-4}$ [Nm/(rad/seg)]         |
| $J$       | $3,9 \times 10^{-4}$ [kg · m <sub>2</sub> ] |

Cuadro 9.3: Parámetros de un motor DC de laboratorio con características similares al utilizado cuyos parámetros son desconocidos.

Sustituyendo estos valores en el modelo propuesto se tiene que el modelo aproximado continuo estará dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -336,7 & -1,4831 & 0 \\ 338 & -0,5897 & 0 \\ 0 & 0,0007 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 11,24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a \\ y(t) &= [0 \ 0 \ 1] \tilde{x} \end{aligned} \quad (9.52)$$

O, si se considera el Modelo Ampliado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -336,7 & -1,4831 & 0 \\ 338 & -0,5897 & 0 \\ 0 & 0,0007 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ctrl} \\ y(t) &= [ 0 \ 0 \ 1 ] x \end{aligned} \quad (9.53)$$

cuyos parámetros determinaran el vector de parámetros iniciales

Determinadas la matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  del modelo continuo, por lo visto en la sección (9.3) puede aproximarse el modelo discreto cuyos parámetros serán utilizados como elementos del vector inicial del modelo discreto (observar que deben tenerse en cuenta varios decimales por tratar con el modelo discreto).

Para es caso del posicionador, su modelo discreto para  $T_s = 1mseg$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{x}[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,713956 & -0,001258 & 0 \\ 0,286834 & 0,999186 & 0 \\ 1,0611 \times 10^{-7} & 6,9974 \times 10^{-7} & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0,008024 \\ 0,003224 \\ 1,19272 \times 10^{-9} \end{bmatrix} v_a[k] \\ y(t) &= [ 0 \ 0 \ 1 ] x[k] \end{aligned} \quad (9.54)$$

Si se considera ahora el modelo ampliado propuesto, su equivalente discreto estará dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,713956 & -0,001258 & 0 \\ 0,286834 & 0,999186 & 0 \\ 1,0611 \times 10^{-7} & 6,9974 \times 10^{-7} & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0,166857 \\ 0,067035 \\ 2,47998 \times 10^{-8} \end{bmatrix} u_{ctrl}[k] \\ y(t) &= [ 0 \ 0 \ 1 ] x[k] \end{aligned} \quad (9.55)$$

### Aclaraciones Sobre el Modelo Aproximado Discreto.

El modelo de estados discreto obtenido en la sección anterior es solamente válido a la frecuencia de muestreo  $T_s = 1mseg$  a utilizar durante el ensayo de identificación. Por lo tanto, si se utilizara una frecuencia de muestro diferente, deberían calcularse nuevamente las matrices  $A_D$ ,  $B_D$  y  $C_D$  utilizando las ecuaciones (9.13).

La utilización del modelo discreto en este caso es entonces a modo de verificación de los resultados obtenidos durante la identificación ya que la herramienta de Matlab para identificar sistemas (System Identification Toolbox) trabaja con modelos discretos.

El Toolbox de identificación provee funciones que permiten pasar del modelo equivalente discreto al modelo continuo. Dichas funciones también serán utilizadas oportunamente.

No debe olvidarse que el objetivo de todo este proceso será obtener el modelo continuo del posicionador.

## 9.4 Controlabilidad y Observabilidad del Posicionador de Antena.

Uno de los requisitos fundamentales para identificar un sistema es que el mismo sea completamente controlable y completamente observable. La controlabilidad del sistema per-

mitirá que la entrada  $u[n]$  aplicada al mismo pueda hacer que el sistema evolucione de un estado a otro en un tiempo finito y la observabilidad asegurará que la salida  $y[n]$  contenga información sobre todos los estados del sistema (requisito necesario para implementar un observador de orden completo como el Filtro de Kalman).

Si bien el modelo obtenido en la sección anterior no ha sido validado aún, es necesario asegurarse que es posible asegurar la controlabilidad y observabilidad completa del mismo. Para esto se utilizará el Test de Kalman el cual asegura que si, dado un sistema de orden  $n$ , el número de estados controlables estará dado por el rango de la matriz de controlabilidad  $Q$  dada por:

$$Q = [B \mid A \cdot B \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot B]. \quad (9.56)$$

De forma análoga, el número de estados observables estará dado por el rango de la matriz de observabilidad dada por:

$$O = [C^T \mid (C \cdot A)^T \mid \dots \mid (C \cdot A^{n-1})^T]. \quad (9.57)$$

Para más información ver [8].

Si bien el objetivo es obtener el modelo del posicionador de antena únicamente, dado que por las limitaciones mencionadas en las secciones anteriores deberá utilizarse con el “modelo ampliado”, si bien la diferencia entre ambos modelos es la ganancia lineal  $G_{pwr}$ , a modo de verificación se analizará la controlabilidad y la observabilidad de ambos modelos.

**Modelo del posicionador** A partir del modelo (9.1) se tiene que:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a^2} & \left(\frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{K_i K_b}{J_{eq} L_a}\right) \frac{1}{L_a} \\ 0 & \frac{K_i}{J_{eq} L_a} & \left(-\frac{K_i R_a^2}{J_{eq} L_a} - \frac{B_{eq} K_i}{J_{eq}^2}\right) \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & \frac{K_i}{R_{AZ} J_{eq} L_a} \end{bmatrix} \quad (9.58)$$

cuyo determinante está dado por:

$$\det(Q) = \frac{K_i^2}{L_a^3 J_{eq}^2 R_{AZ}} \neq 0. \quad (9.59)$$

que será distinto de cero ya que se trata de parámetros físicos cuyo valor es mayor que cero. Por lo tanto el rango de la matriz es igual a 3 de manera que puede asegurarse que el posicionador de antena (para el modelo propuesto) es **completamente controlable**.

Luego, la matriz de observabilidad estará dada por:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_{AZ}} & 0 \\ \frac{K_i}{R_{AZ} J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{R_{AZ} J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

y su determinante tomará el valor

$$\det(O) = \frac{K_i}{R_{AZ}^2 J_{eq}} \neq 0 \quad (9.61)$$

que también será distinto de cero por tratarse de magnitudes físicas. De esta manera se establece también que el sistema es **completamente observable**

**Modelo Ampliado del posicionador** A partir del modelo (9.2) la matriz de controlabilidad estará dada por:

$$Q_{amp} = \begin{bmatrix} \frac{G_{pwr}}{L_a} & -\frac{R_a G_{pwr}}{L_a^2} & \left( \frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{K_i K_b}{J_{eq} L_a} \right) \frac{G_{pwr}}{L_a} \\ 0 & \frac{K_i G_{pwr}}{J_{eq} L_a} & \left( -\frac{K_i R_a^2}{J_{eq} L_a} - \frac{B_{eq} K_i}{J_{eq}^2} \right) \frac{G_{pwr}}{L_a} \\ 0 & 0 & \frac{K_i G_{pwr}}{R_{AZ} J_{eq} L_a} \end{bmatrix} \quad (9.62)$$

y su determinante:

$$\det(Q_{amp}) = \frac{K_i^2 G_{pwr}}{L_a^3 J_{eq}^2 R_{AZ}} \neq 0. \quad (9.63)$$

que también será distinto de cero ya que la ganancia  $G_{pwr}$  solo afecta a la entrada del sistema, pero no a la transferencia entre los estados y la entrada. Por lo tanto se establece que el rango de la matriz es igual a 3 y que el modelo ampliado del posicionador también es **completamente controlable**.

En el caso de la matriz de observabilidad es la misma que para el modelo estándar por lo que el modelo ampliado también es **completamente observable**

De esta forma se puede garantizar que, si el experimento de identificación es llevado a cabo correctamente, es posible obtener un modelo capaz de representar toda la dinámica del sistema real.

## 9.5 Diseño e Implementación del Experimento de Identificación.

Como se vio en el Capítulo 7, el proceso de Identificación está basado en la obtención de las señales de entrada y salida del sistema que provean la suficiente información para estimar un modelo matemático del mismo. El procedimiento para obtener dichas señales se conoce como *experimento de identificación* y consiste en proveer los medios necesarios para trabajar sobre el sistema incógnita y obtener las señales de entrada-salida que provean la información necesaria para obtener un modelo válido.

El diseño del experimento de identificación, además del hardware necesario, tiene en cuenta otros aspectos como por ejemplo la señal utilizada para excitar al mismo, que señales medir y cómo medirlas, como manipular dichas señales (como por ejemplo mediante el acondicionamiento previo o posterior al experimento), etc., y es aquí donde surge el concepto de “experimento informativo”.

Utilizando la misma notación que en el Capítulo 7, dado un conjunto de datos  $Z$  se dice que es lo “suficientemente informativo” con respecto a un conjunto de posibles modelos  $\mathcal{M}^*$  si permiten diferenciar entre dos modelos diferentes dentro del mismo conjunto. De lo anterior, se define un experimento “suficientemente informativo” si genera un conjunto de datos  $Z^N$  lo suficientemente informativos de acuerdo a la definición anterior.

En las secciones siguientes se describirán cada uno de los aspectos considerados a la hora del diseño del experimento de identificación para luego mostrar los resultados obtenidos.

Si bien existen diversas formas de construir un experimento de identificación, el mismo fue diseñado a partir del hardware y la instrumentación disponibles en el IAR.

### 9.5.1 Estructura propuesta para el ensayo de Identificación.

En primer lugar es necesario definir que señales se consideraran como la entrada  $u[n]$  y salida  $y[n]$ . En el Capítulo 7 se propusieron dos alternativas:

1. Considerar un modelo del posicionador de antena solamente.
2. Ó considerar lo que se denominó “modelo ampliado” en el cual se incluye la electrónica de potencia.

Como convención, en la teoría de Identificación de Sistemas se asigna a la señal de entrada el símbolo  $u[n]$  y a la salida  $y[n]$  como se vio en los ejemplos vistos hasta ahora. En la figura 9.11 se puede ver la asignación requerida para identificar el modelo del posicionador para un sentido de movimiento, donde puede verse que la entrada al sistema que se quiere identificar es la tensión de armadura  $V_a$  del motor DC.

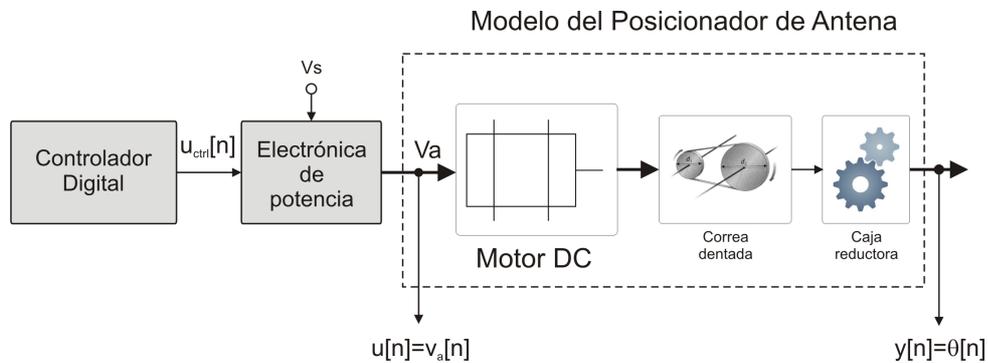


Figura 9.11: Asignación de la entrada y salida para identificar el modelo del posicionador de antena.

Si bien lo ideal sería contar con un modelo del posicionador independiente de la electrónica de potencia (de manera que pueda ser utilizado sin importar que se utilice otra fuente de poder) desde el punto de vista práctico esto no es posible ya que no se cuenta con la instrumentación necesaria que permita asociar la tensión de armadura  $V_a$  aplicada al motor DC (o lo que es lo mismo, la entrada  $u[n]$ ) con la salida  $y[n]$  (posición) asociada en el  $n$ -ésimo instante.

Además, el fabricante de los módulos de potencia (AMC) asegura que los mismos pueden considerarse como una ganancia lineal.

Por lo tanto, si se considera el modelo ampliado, la entrada  $u[n]$  será la salida del controlador digital (generada por microprocesador Rabbit3000) y la salida al sistema  $y[n]$  (o lo que es lo mismo, la posición  $\theta(t)$  muestreada cada 1 milisegundo) obtenida mediante el mismo controlador como se muestra en la figura 9.12.

Un aspecto a tener en cuenta es que si se considera al bloque “Electrónica de Potencia” como una ganancia lineal de valor  $G_{pwr}$ , entonces es posible (mediante un preprocesamiento de la señal) considerar a la hora de identificar el sistema a la señal:

$$v_a[n] = G_{pwr} \cdot u_{ctrl}[n] \quad (9.64)$$

teniendo en cuenta que cualquier retardo existente en la electrónica de potencia será asociado al modelo del posicionador de antena.

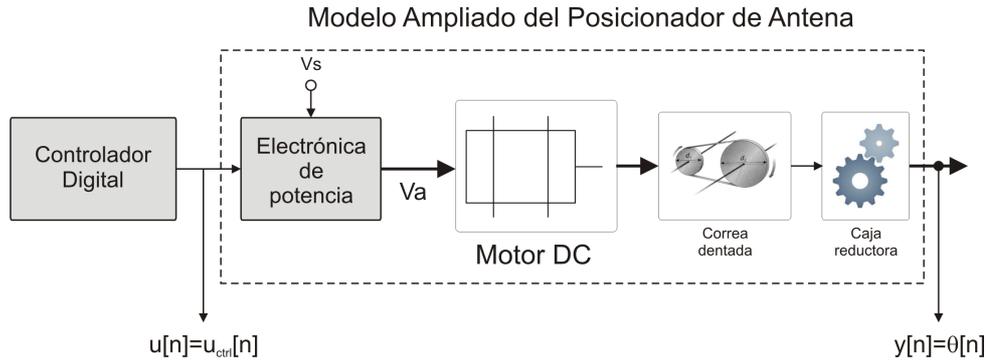


Figura 9.12: Asignación de las señales  $u[n]$  e  $y[n]$  al modelo ampliado del posicionador.

Por lo tanto, hasta aquí se definió:

1. Que la entrada al sistema ( $u[n]$ ) será la señal generada por el microcontrolador digital y la salida del sistema  $y[n]$  será la posición  $\theta(t)$  obtenida con el mismo controlador digital como se observa en la figura 9.12.
2. Se considerará a la electrónica de potencia como una ganancia lineal de valor  $G_{pwr}$  de manera que podrá obtenerse un modelo del posicionador independientemente de la etapa de potencia y verificar su validez.

Siguiendo con el diseño del experimento, dado que solamente se cuenta con el microprocesador Rabbit3000 para generar la señal de control de los módulos PWM, el mismo deberá ser el encargado de generar la señal  $u[n]$  y de recolectar las muestras a la salida  $y[n]$  asegurando un período de muestro  $T_s$  constante cuyo valor se determinará más adelante.

Luego, como se verá en la sección siguiente, la señal  $u[n]$  deberá cumplir ciertos requisitos y no podrá ser generada por el microprocesador, por lo tanto, se recurrirá a generar la señal  $u[n]$  mediante una computadora personal para luego almacenarla en la memoria del microprocesador, el cual recorriendo dicha memoria irá generando la señal que será aplicada al posicionador. Un primer paso a la estructura del laboratorio se muestra en la figura 9.13.

En las siguientes secciones se tratarán con más detalles cada uno de los aspectos mencionados para llegar a la estructura final del experimento de identificación cuyos resultados serán analizados en la sección 9.5.7 y en el capítulo 10.

### 9.5.2 Sobre la señal de excitación $u[n]$ . Condición “*Persistently Exciting*”. Factor de Cresta.

La selección de la señal de entrada a la hora del diseño del experimento de identificación es importante ya que, desde el punto de vista práctico, **la señal de entrada es el único elemento que puede manipularse por el diseñador**. Además, deben tenerse en cuenta otros aspectos como que señales son aplicables al sistema en cuestión y que características poseen las mismas.

No solo el tipo de señal a utilizar debe especificarse, sino que también deberá especificarse cómo se manipulará la misma, el rango de la señal y el comportamiento de la

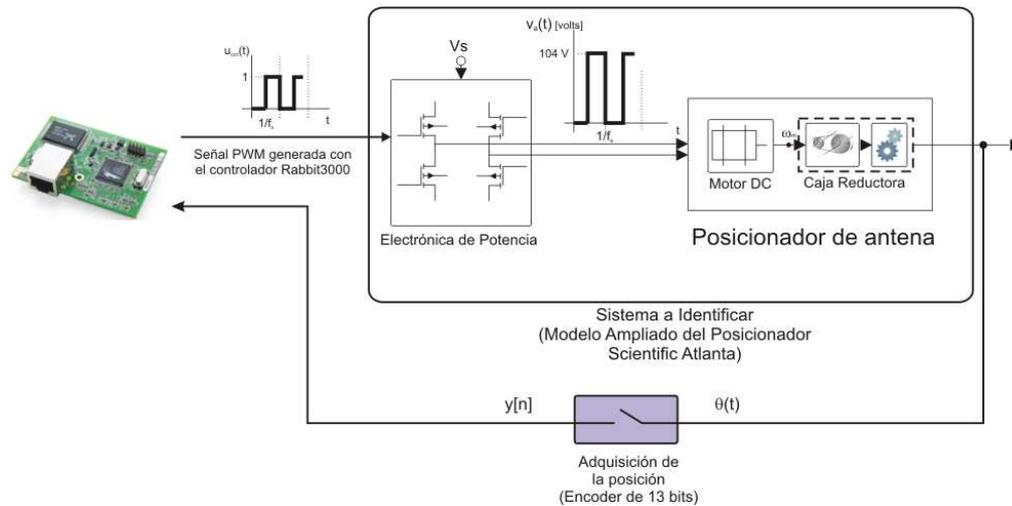


Figura 9.13: Primera aproximación a la estructura del laboratorio para llevar a cabo el experimento de identificación.

misma cuando es muestreada. De esta manera se busca asegurar que el conjunto de datos generado a partir de  $u[n]$  e  $y[n]$  almacenarán toda la información necesaria sobre el comportamiento dinámico del sistema. Si esto no fuera así el modelo obtenido no sería válido y debería repetirse el experimento.

En líneas generales, los criterios a tener en cuenta pueden resumirse de la siguiente forma:

1. Para obtener la máxima información posible, el experimento de identificación debe llevarse a cabo bajo condiciones similares a las condiciones de operación del sistema y dentro del mismo rango de trabajo. Esto reduce la introducción de “bias” (apartamiento del valor medio) en los parámetros del modelo resultante.
2. La señal de entrada debe excitar a toda la dinámica del sistema. Esto depende más del espectro de la señal utilizada y no de su forma en el tiempo. Por lo tanto, el rango de frecuencias de la señal de entrada debe ser aquel que provea la mayor energía en el rango de frecuencias de interés. Ésto se conoce como condición *Persistently Exciting* y se verá en la sección siguiente.
3. El nivel de la señal de entrada debe cumplir el rango de variación deseado.
4. La señal de entrada debe ser capaz de proveer la mayor cantidad de energía posible. Para esto se define el *Factor de Cresta*, parámetro que también se verá más adelante.
5. La señal debe poder aplicarse al sistema sin comprometer su integridad física.

Cada uno de estos factores se tratará con más detalle en las secciones siguientes.

### Condición de Persistencia en la Excitación (*Persistently Exciting Condition*).

Como se vio al principio de esta sección el requerimiento principal del experimento de identificación es que sea lo suficientemente informativo de manera que los datos obtenidos

cumplan dicha condición. Esto se traduce en que, para un sistema a lazo abierto, la señal  $u[n]$  utilizada debe cumplir la condición *persistently exciting* que se define de la siguiente forma ([17]):

**Condición Persistently Exciting 9.5.1** *Una señal cuasi-estacionaria  $u[n]$ , con densidad espectral de potencia  $\Phi_u(f)$ , se dice que es del tipo “Persistently Exciting” de orden  $n$  si, para todos los filtros de la forma:*

$$M_n[q] = m_1q^{-1} + \dots + m_nq^{-n} \quad (9.65)$$

la relación

$$|M_n(e^{j2\pi f})|^2 \Phi_u(f) \equiv 0 \quad (9.66)$$

implica que  $M_n(e^{j2\pi f}) \equiv 0$ .

Lo anterior se traduce en que,  $u[n]$  es del tipo *Persistently Exciting* de orden  $n$  si  $\Phi_u(f)$  es distinta de cero en al menos  $n$  puntos en el intervalo  $-1/2 < f < 1/2$  por lo que la densidad espectral de potencia  $\Phi_u(f)$  debe tener componentes no nulas en el ancho de banda del sistema que se quiere identificar.

Otra manera de realizar el análisis es a partir de la función de autocovarianza (o función autocorrelación para una señal con valor medio nulo)  $R_{uu}(\tau)$  dada por:

$$R_{uu}(\tau) = Eu[n] \cdot u[n - \tau] \quad (9.67)$$

ya que se puede demostrar (ver [17]) que la señal  $u[n]$  es *persistently exciting* de orden  $n$  si la matriz de orden  $n \times n$  dada por:

$$\bar{R}_n = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \dots & R_u(n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \dots & R_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix} \quad (9.68)$$

es no singular (o lo que es lo mismo es de rango  $n$ ).

Esta condición asegura, por ejemplo, que la Ecuación Normal definida en el Apéndice C tenga solución.

### El factor de Cresta.

Siguiendo con el mismo objetivo que es obtener la mayor información posible del sistema dinámico, no solo es necesario que la señal  $u[n]$  posea componentes en todo el espectro de frecuencias de interés, sino que dichas componentes posean la máxima amplitud posible para excitar los distintos modos del sistema y que sus efectos aparezcan a la salida. Es por esto que en la práctica se busca utilizar una señal que aplique la mayor potencia posible a la entrada del sistema. El problema es que lo anterior se encuentra limitado por la amplitud máxima y mínima que puede tomar la señal de entrada  $u[n]$  ( $u_{min} < u < u_{max}$ ).

Un factor de mérito que define dicha propiedad de la forma de onda es el *Factor de Cresta* que, para una señal con valor medio nulo, se define como:

$$C_r^2 = \frac{\max u^2[n]}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u^2[n]} \quad (9.69)$$

De la ecuación anterior, se desprende que desde el punto de vista del experimento de identificación, la mejor señal es aquella con menor factor de cresta. El mínimo valor teórico posible  $C_r = 1$  se obtiene con señales binarias y simétricas:  $u[t] = \pm u$ .

### El Periodograma.

Es una herramienta para el análisis de las señales a utilizar y aquellas obtenidas del sistema durante el experimento de identificación y se trata de *una aproximación de la densidad espectral de potencia* de la señal que se está analizando en base a un número finito de muestras. En esta sección se da una breve introducción sobre en qué consiste el periodograma y como calcularlo. Si se desea más información, puede referirse a [17],[24] o [22].

En el caso del experimento de identificación, el objetivo será analizar si las señales utilizadas como entradas  $u[n]$  son capaces de excitar al sistema en el rango de frecuencias de interés, es decir, verificar si cumple la condición Persistently Exciting con el objetivo que toda la información de la dinámica del mismo aparezca a la salida.

Supóngase una secuencia finita  $x[n]$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Su transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) estará dada por:

$$X_N(\omega) = \sum_{n=1}^N x[n]e^{-j\omega n} \quad (9.70)$$

y se sabe que es una función continua y periódica de período  $2\pi$  en  $\omega$  a partir de la cual se puede reconstruir la señal  $x[n]$  tomando solamente el período  $[-\pi, \pi]$ .

Si se considera ahora un número finito de frecuencias de dicho intervalo tal que  $\omega[k] = 2\pi k/N$  se tiene que  $X(2\pi k/N)$  indica el “peso” de la frecuencia  $\omega[k]$  en la descomposición espectral de  $x[n]$ . Por lo tanto, la magnitud

$$S_N[k] = |X(2\pi k/N)|^2 \quad (9.71)$$

es una medida de la **potencia de la señal** a la frecuencia  $\omega[k]$  y se denomina periodograma de la señal  $x[n]$ .

Si se observa la ecuación (9.71), el periodograma consiste en los coeficientes  $X(2\pi k/N)$  de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) de la señal  $x[n]$  elevados al cuadrado.

Por lo tanto, el periodograma se define como una aproximación de la densidad espectral de potencia de un proceso obtenido a partir de una realización del mismo. Se puede demostrar (ver [22]) que el valor promedio del periodograma tiende a la densidad espectral de potencia del proceso cuando el número de muestras  $N$  tiende a infinito. Es decir

$$E\{S_N[k]\} = E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N x[n]e^{-j2\pi kn/N} \right|^2 \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi_{xx}(\omega). \quad (9.72)$$

En la práctica debe tenerse en cuenta que lo que realmente se quiere estimar es la densidad espectral de potencia  $\phi_{ss}(\omega)$  de la señal continua  $s(t)$  la cual se supone es un proceso estacionario que al ser filtrada utilizando un filtro antialiasing genera una señal de ancho de banda limitado que muestreada da lugar a la señal  $x[n]$  que es un proceso

estacionario discreto cuya densidad espectral de potencia  $\phi_{xx}(\omega)$  y es proporcional a la densidad espectral de potencia del proceso continuo en el ancho de banda considerado según la siguiente relación [24]:

$$\phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{T_s} \phi_{ss} \left( \frac{\omega}{T_s} \right) \text{ para } -\pi < \omega < \pi \quad (9.73)$$

donde  $T_s$  es el período de muestro.

Luego, al solo poder trabajar con un número finito de muestras de la señal  $x[n]$  esto hace que solamente se adquieran  $L$  muestras de la señal  $x[n]$ , lo que equivale a multiplicar por una secuencia  $w[n]$  de largo  $L$  (lo que se conoce como “ventaneo” o “windowing”). De esta manera, si se adquieren un total de  $ML$  puntos formando  $M$  segmentos consecutivos, cada uno de dimensión  $L$ , entonces, el promedio del periodograma puede calcularse la siguiente forma <sup>6</sup>:

$$\overline{S_N[k]} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{L} \left| \sum_{n=1}^L w[n] x[n + mL] e^{-j2\pi kn/N} \right|^2 \right\} \quad (9.74)$$

y es un estimado consistente de  $\phi_{xx}$ .

En la figura 9.14 se muestra la señal

$$x(t) = \text{sen}(2\pi 50t) + 2 * \text{sen}(2\pi 100t); \quad (9.75)$$

la cual es muestreada a  $F_s = 1000$  Hz y su correspondiente periodograma considerando  $N = 512$  calculado con la función `periodogram()` de Matlab (se muestran solo las frecuencias positivas). Si bien el periodograma es también una secuencia, se acostumbra a graficarlo a través de líneas continuas para facilitar la lectura.

La forma de la señal se debe a que el cálculo se realiza a partir de la correlación aperiódica de la señal  $x[n]w[n]$  para luego transformarla al dominio de Fourier, por lo tanto, la variabilidad del periodograma puede deberse tanto a pocas muestras involucradas en el cálculo (de acuerdo al desplazamiento relativo de las señales) o debido a las componentes de frecuencia de la señal. Para  $N = L$  los estimados del periodograma para cada frecuencia  $\omega = 2\pi k/N$  no están correlacionados.

Por lo tanto, al no estar promediado el periodograma, para el observador la información buscada se encuentra en el valor medio de la señal obtenida.

### 9.5.3 Señales de Entrada para la Identificación de Sistemas. Propiedades.

Si bien pueden usarse señales sinusoidales, escalones o señales aleatorias, *para la identificación de sistemas lineales es deseable utilizar una señal a la entrada con componentes dentro del espectro de interés que además tenga el menor factor de cresta posible.*[17].

Las señales más comúnmente utilizadas que cumplen las condiciones establecidas anteriormente se muestran a continuación:

---

<sup>6</sup>Tener en cuenta que el número de puntos  $N$  para calcular la TDF de  $x[n]$  puede ser distinto al tamaño  $L$  de la ventana  $w[n]$  por lo que las dimensiones de ambas secuencias deberán ajustarse para obtener un periodograma de largo  $N$

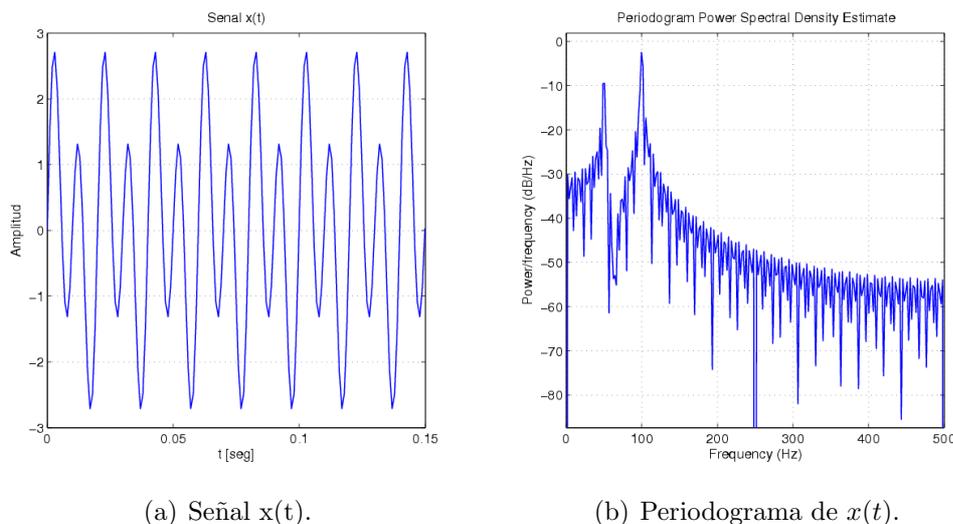


Figura 9.14: Periodograma de  $x(t)$  para  $N = 512$ .

### Ruido Blanco Gaussiano Filtrado (Filtered Gaussian White Noise).

Se genera un señal de ruido blanco Gaussiano la cual se filtra utilizando un filtro lineal. Con la elección del filtro adecuado, es posible generar una señal con componentes en cualquier porción del espectro. Ver figura 9.15.

### Señal Binaria Aleatoria (Random Binary Signal).

Una señal binaria aleatoria es un proceso aleatorio que asume solamente dos valores que puede ser generada, por ejemplo, generando ruido blanco Gaussiano con media nula y filtrándolo utilizando un filtro lineal con un ancho de banda especificado ajustando la salida a  $u_{min}$  o  $u_{max}$  dependiendo del signo de la señal de salida del filtro.

Dicha señal tendrá factor de cresta 1. El problema radica en que al tomar solamente el signo de la señal filtrada, se modifica el espectro de la señal que ingresa al sistema. Ver figura 9.15.

### Señal Binaria Pseudo-Aleatoria (Pseudo-Random Binary Signal o PRBS).

A diferencia de la señal binaria aleatoria, la señal PRBS es una señal determinística con propiedades de ruido blanco generada utilizando la siguiente ecuación en diferencias:

$$u[n] = \text{rem}(a_1[n - 1] + \dots + a_k[n - k], 2) \quad (9.76)$$

donde la función  $\text{rem}(x, 2)$  es el resto de dividir  $x$  por 2 en módulo 2. Por lo tanto, la señal  $u[n]$  asume los valores 0 y 1 (pero luego pueden ajustarse a cualquier valor). Como resultado se obtiene una señal periódica de período máximo  $M = 2^n - 1$  donde  $n$  es un entero mayor que tres que puede asumir a los sumo  $2^n$  valores diferentes.

En el caso de utilizar un solo período cuyo largo máximo será  $M$ , se estará en presencia de una *Señal PRBS de máxima longitud*, la cual es de especial interés ya que posee las siguientes propiedades de primer y segundo orden:

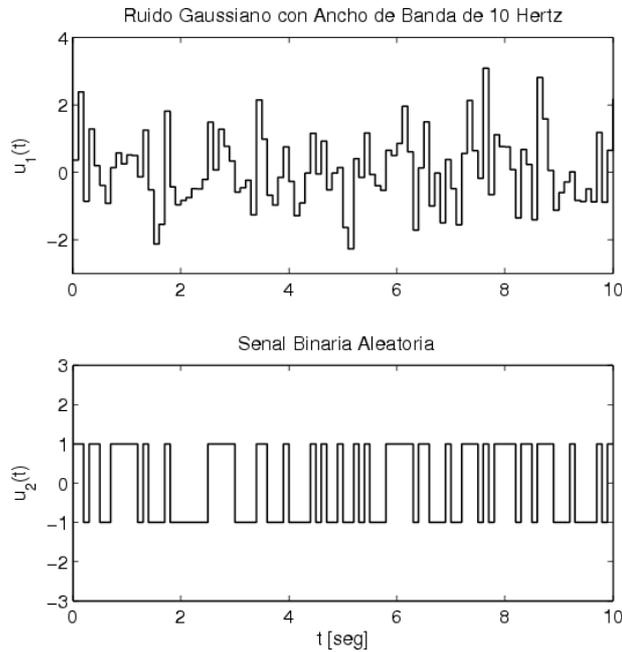


Figura 9.15: Ejemplo de una señal de Ruido Gaussiano con ancho de banda limitado y una señal binaria aleatoria obtenida a partir de la primera (considerando el signo solamente que toma  $u_1(t)$  en cada instante).

1. Si se considera una señal PRBS que solo puede tomar los valores  $+\bar{u}$  y  $-\bar{u}$ , entonces su valor medio estará dado por:

$$u_u = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M u[n] = \frac{\bar{u}}{M} \quad (9.77)$$

2. y función de autocorrelación:

$$R_{uu}[k] = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M u[n] \cdot u[n+k] = \begin{cases} \bar{u}^2 & \text{para } k = 0, \pm M, \pm 2M \dots \\ -\frac{\bar{u}^2}{M} & \text{para cualquier otro caso} \end{cases} \quad (9.78)$$

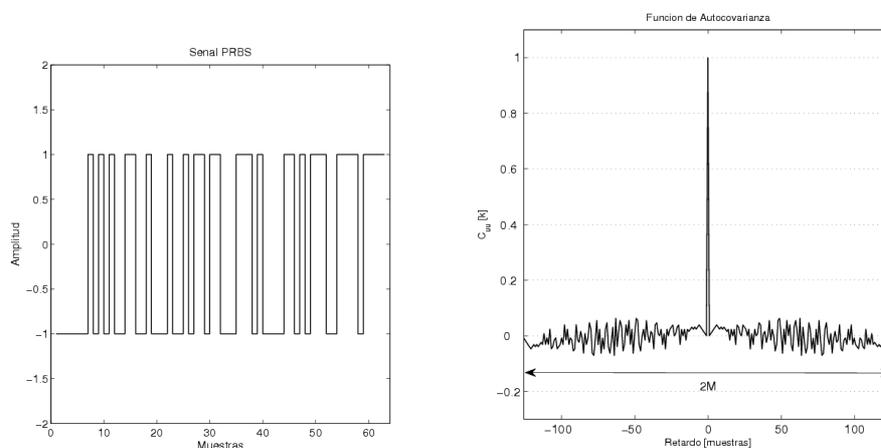
de donde se desprende que, al no tener media cero, la función de autocorrelación será distinta de la función autocovarianza. En la figura 9.16(a) se muestra una señal PRBS de máxima longitud con un largo de 127 muestras y su correspondiente función de autocovarianza.

Resulta interesante observar que el valor de la función autocovarianza para los valores apartados del origen se encuentran por debajo de los  $13dB$  con respecto al valor correspondiente a  $k = 0$  lo que da una idea de la independencia entre las sucesivas muestras de la señal.

Recordar que la función de covarianza es la función de correlación sin considerar la media del proceso definida como:

$$C_{xy}[k] = E\{(x[n] - \bar{x})(y[n+k] - \bar{y})\} \quad (9.79)$$

y que por lo tanto su valor máximo siempre estará en el origen.



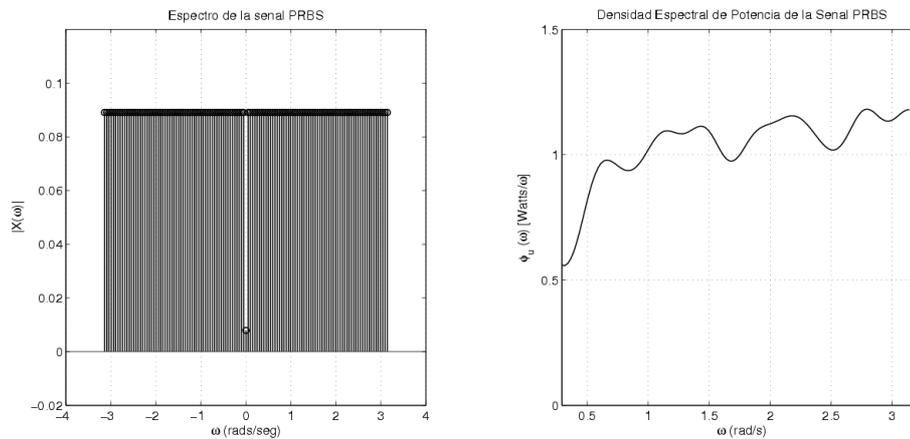
(a) Señal PRBS con  $n = 7$  y  $M = 127$ . (b) Función de Autocovarianza de la señal PRBS.

Figura 9.16: Ejemplo de una señal PRBS de máxima longitud (se considera un solo período). La función de covarianza permite observar las características de ruido blanco de la señal.

Si bien en la figura 9.16 se verifica que es posible suponer que las muestras de la señal PRBS no están correlacionadas entre si y por lo tanto asegurar el cumplimiento de la condición persistently exciting, otro aspecto importante a determinar es si dicha señal es capaz de excitar al sistema en cuestión dentro del rango de frecuencias de interés. Para esto es de especial interés determinar la densidad espectral de potencia de dicha señal. Si bien para no perder generalidad el eje temporal se trató en función de muestras de la señal, esto equivale a considerar una tasa de muestreo  $T_s = 1$ . En la figura 9.17(a) se muestra el espectro de la señal de la figura 9.16(a). Si bien se trata de una sola realización de la PRBS el objetivo es mostrar que el espectro de dicha señal posee componentes en todo ancho de banda considerado. Asimismo, en la figura 9.17(b) se muestra la densidad espectral de potencia de la misma señal obtenida mediante Análisis Espectral (por el método de Blackman-Tukey. Ver [17]) para el rango de frecuencias positivas.

A partir del análisis anterior y analizando el factor de cresta de la señal PRBS se concluye que:

- La señal PRBS posee propiedades de ruido blanco Gaussiano siempre y cuando los cálculos se realicen durante períodos enteros (múltiplos de  $M$ ). De no ser así las condiciones (9.77) y (9.78) no se verifican.
- Si se cumple la condición anterior, la matriz que contenga las muestras de la entrada al sistema será invertible. Por ejemplo, la ecuación normal del Apéndice C tendrá solución.
- Al igual que la señal binaria aleatoria, la señal PRBS tiene factor de cresta óptimo.



(a) Espectro de la señal calculado con FFT. (b) Estimación de la densidad espectral de potencia.

Figura 9.17: Aproximación del espectro de la señal PRBS de la figura 9.16.

### Otros tipos de Señales Posibles.

Dependiendo del tipo de sistema con que se esté tratando, puede que las señales anteriores no puedan ser aplicadas para el modelo que se desea obtener. Por lo tanto, también existen otros tipos de señales como las señales Chirp que consisten en una senoide cuya frecuencia varía en un determinado rango durante un período específico de tiempo o señales con compuestas por la suma de otras señales sinusoidales con características distintas. Por ejemplo, señales compuestas por tonos de 10 frecuencias distintas, cada una con la misma amplitud.

Para más información ver [17].

### 9.5.4 Señales a utilizar. Propiedades.

Dado que los cálculos para obtener el modelo del posicionador se llevaron a cabo de manera “off-line”, fue posible generar la señal de entrada, acondicionarla de acuerdo a algún criterio y luego realizar el experimento de identificación.

Dado que en este caso la electrónica de potencia es comandada a través del microprocesador Rabbit se optó por generar la señal  $u[n]$  utilizando una computadora personal, luego se transfirió a la memoria del microprocesador el cual ajustó la señal de comando de los módulos de potencia (ciclo de trabajo de la señal PWM) de acuerdo a lo indicado por la señal sintetizada en la memoria del mismo.

A partir del estudio realizado en la sección 9.5.3 y considerando que:

- Se pretende estimar un modelo lineal del posicionador de antena.
- No se tiene un conocimiento certero de la dinámica del sistema y, basándose en que las suposiciones realizadas para llevar a cabo los experimentos previos son correctas, entonces la señal  $u$  a utilizar debería ser diseñada para excitar al sistema en el ancho de banda de interés. Esto implica: que la señal de entrada tenga una densidad

espectral de potencia con componentes en todo el rango de de interés y factor de cresta con valor cercano a 1.

- La señal debe ser tal que el microprocesador pueda trasladar dicha señal desde la memoria hasta la salida PWM en cada instante de muestro  $T_s$  marcado por el microprocesador.
- El largo  $N$  de la señal debe ser tal que:
  1. En el intervalo de tiempo  $NT_s$  que dure el experimento excitar toda la dinámica del posicionador.
  2. Sea posible almacenarlo en la memoria del microprocesador.

Por lo anterior y basándose en el estudio de la sección 9.5.3 se decidió:

1. Utilizar una señal del tipo PRBS como señal de entrada  $u[n]$ .
2. El nivel de la señal  $u[n]$  debe variar entre 0 y 1. Esto se debe a que el sistema es excitado con PWM unipolar.
3. El tamaño de las señales debe ser de  $N = 16kbytes$  ( $N = 16384$ ). Ésto se debe solo se disponen de 64 kbytes de memoria RAM extendida para almacenar datos (el resto son utilizados por el compilador del microprocesador para almacenamiento de programa y otras variables) los cuales deben albergar los  $16kb$  de muestras de la señal PRBS más  $32kb$  de muestras de la posición adquiridas durante el ensayo (recordar que las muestras de posición tienen un largo de palabra de 13 bits por lo que ocupan 2 bytes de memoria). En total se ocupan 42kb para datos del experimento. Debe tenerse en cuenta que el número mínimo para obtener un primer estimado del vector de incógnitas del modelo  $\theta$  es  $N_{min} = 36$  muestras. Por lo tanto, el número especificado de muestras permitirá implementar un algoritmo recursivo.
4. Para  $T_s = 1mseg$  la duración de cada ensayo será de aproximadamente 16 segundos de manera que podrán observarse desde variaciones muy rápidas a variaciones muy lentas.

Dado que el experimento puede repetirse varias veces, se generaron diferentes señales las cuales fueron generadas con la función `idinput()` de Matlab. Esta función permite generar patrones de señal dependiendo del valor que tomen sus parámetros.

#### Sintaxis de la función `idinput()`.

De acuerdo a la documentación de Matlab, la sintaxis de la función `idinput()` para generar una señal PRBS de  $N$  muestras de longitud máxima es la siguiente:

$$u = idinput(N, 'prbs', banda, nivel) \quad (9.80)$$

Donde:

- $banda = [0 B]$  siendo  $B$  el parámetro que hace que la señal generada sea constante durante el intervalo de tiempo  $(1/B) \times T_s$ . El valor por defecto es  $[0 1]$ .

- *nivel* indica los niveles entre los cuales oscilará la señal PRBS. Dado que se utilizará PWM unipolar para excitar al sistema los niveles a utilizar serán [0 1] donde 0 corresponde al 0% de ciclo de trabajo del PWM y 1 al 100%.

Las señales generadas **considerando el período de muestro**  $T_s = 1mseg$  se muestran a continuación (tener en cuenta que las señal que excitará al sistema será siempre continua):

### Señal 1 ( $u_1$ ).

Esta señal fue generada con los siguientes parámetros:

```
u_1=idinput(16384,'prbs',[0\text{ }1],[0\text{ }1])
```

por lo que la señal generada alterna valores entre 1 y 0 cada 1 mseg y es la señal más rápida con la que se puede excitar al sistema según lo establecido.

La señal generada se muestra en la figura 9.18.<sup>7</sup>

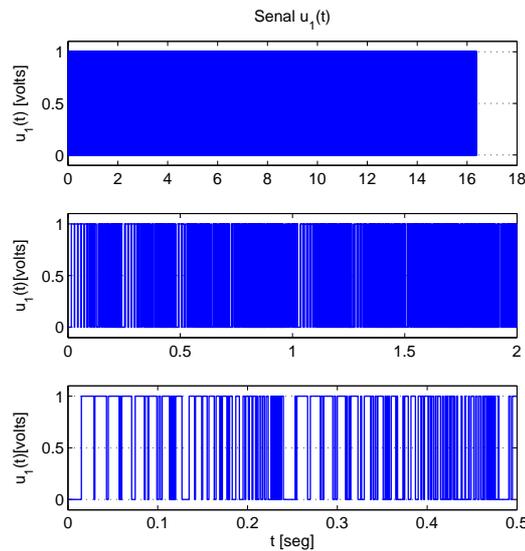


Figura 9.18: Señal  $u_1[n]$  a utilizar en un ensayo de experimento de identificación

La función de autocovarianza el periodograma ajustado a la frecuencia de muestreo de la señal muestreada  $u_1[n]$  se muestran en las figura 9.19.

Propiedades de la señal  $u_1$ :

- Factor de cresta: 1,0185.
- Diferencia entre el valor central y los valores laterales: 16.98dB.

Como puede observarse, esta señal es muy parecida a la señal PRBS teórica definida en la sección 9.5.3 y es una señal que varía extremadamente rápido por lo que puede darse el caso que el sistema no responda a las variaciones cuando se produce una transición de

---

<sup>7</sup>Si bien las señales de entrada son discretas, en los gráficos se mostrarán utilizando líneas continuas para facilitar la visualización

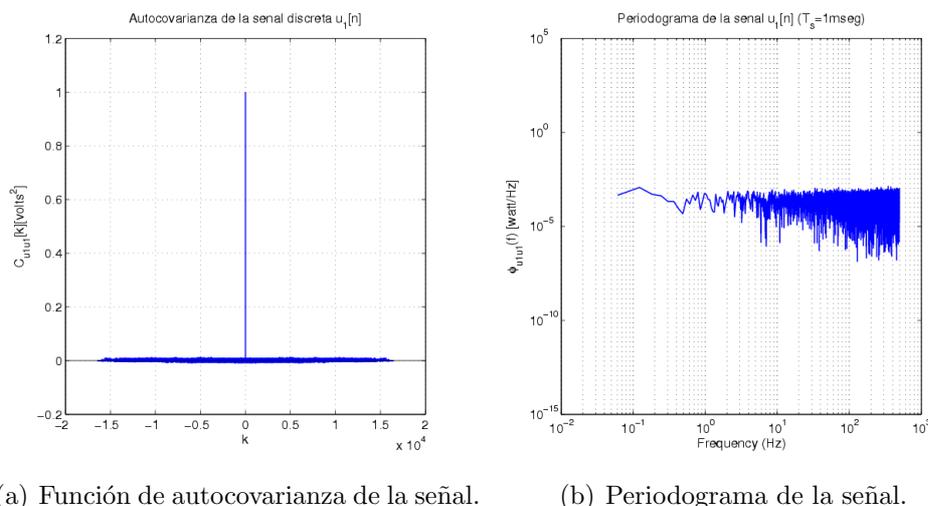


Figura 9.19: Propiedades de la señal  $u_1[n]$

estado sino que responda a su valor medio por lo que a la salida no se registrarían aceleraciones bruscas. Por esta razón, se decidió generar señales PRBS con distintas propiedades para obtener la mayor cantidad de datos posibles.

### Señal 2 ( $u_2$ ).

De la misma forma que en el caso anterior, ésta señal fue generada con los siguientes parámetros:

```
u_2=idinput(16384,'prbs',[0\text{ }0.02],[0\text{ }1])
```

donde a diferencia de la señal número 1, el parámetro ahora se ajusta para que:

- Durante determinados intervalos de tiempo la señal se mantenga en alto durante tiempo de subida (rise time) de la velocidad angular  $\omega_m$ .

Como se calculó previamente, el tiempo de subida de la velocidad angular es de 42 milisegundos, por lo que a una frecuencia de muestreo de 1kHz permitiría obtener 42 muestras de la salida, lo cual es más que suficiente para observar el fenómeno transitorio.

La señal generada se muestra en la figura 9.20.

La función de autocovarianza el periodograma ajustado a la frecuencia de muestreo de la señal muestreada  $u_1[n]$  se muestran en las figura 9.21.

Propiedades de la señal  $u_2$ :

- Factor de cresta: 1,1005.
- Diferencia entre el valor central y los valores laterales: 10.96dB.

### Señal 3 ( $u_3$ ).

A diferencia de la señal anterior, el parámetro  $B$  de la función `idinput()` se ajustó para cumplir la misma condición que la señal anterior en base al número de muestras pero durante el tiempo de subida de la señal asociada al polo más rápido (corriente de

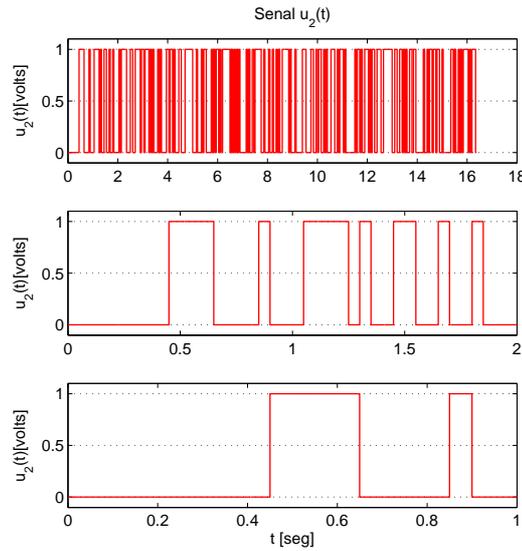
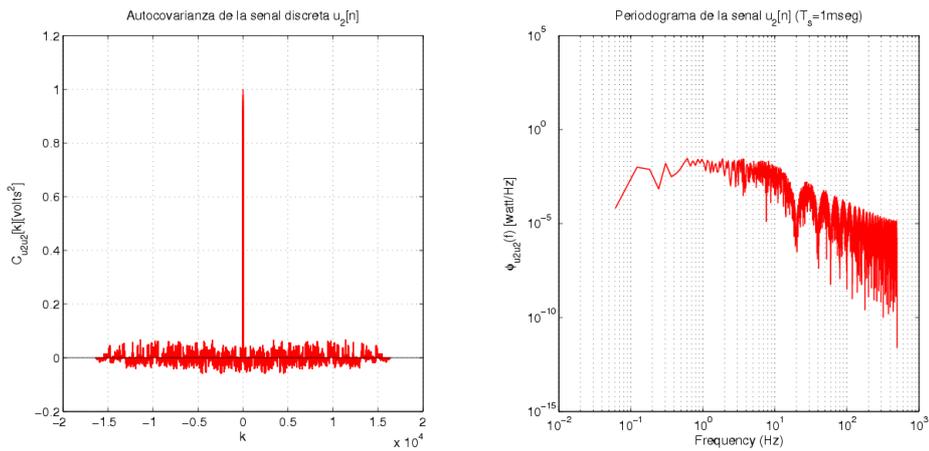


Figura 9.20: Señal  $u_1[n]$  a utilizar en un ensayo de experimento de identificación



(a) Función de autocovarianza de la señal. (b) Periodograma de la señal.

Figura 9.21: Propiedades de la señal  $u_1[n]$

armadura). Como se vio en la sección 9.2.2 el tiempo de subida de la corriente de armadura  $i_a$  del motor DC es de 6.5 milisegundos de forma tal que se verifica que la evolución de la corriente de armadura del motor DC es mucho más rápida que la evolución de la velocidad angular. Es por esto que en este caso, para la misma frecuencia de muestreo, se ajustó el valor del parámetro  $B$  a  $B = 0,15$  que asegura estados en alto (o bajo) de la señal PRBS de 66 milisegundos asegurando 6 muestras de la salida durante el tiempo de subida de la señal.

De esta manera, la señal sintetiza a partir de la función `idinput` con los siguientes parámetros:

```
u_3=idinput(16384,'prbs',[0\text{ }0.15],[0\text{ }1])
```

cuya evolución temporal se observa en la figura 9.22

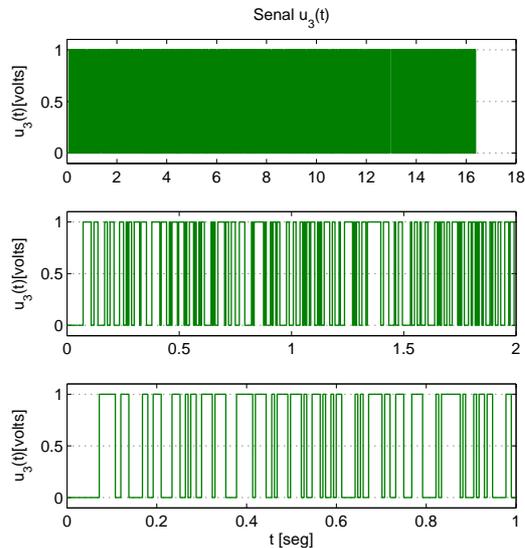
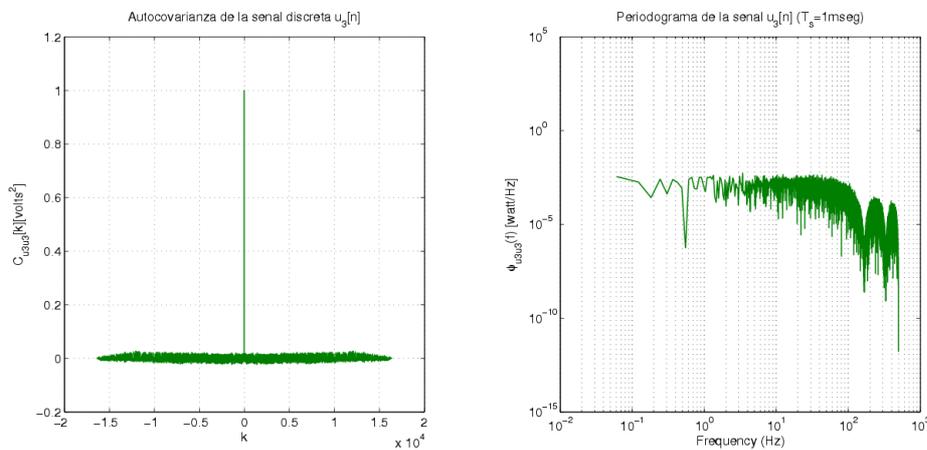


Figura 9.22: Señal  $u_3[n]$  a utilizar en un ensayo de experimento de identificación

La función de autocovarianza el periodograma ajustado a la frecuencia de muestreo de la señal muestreada  $u_2[n]$  se muestran en las figura 9.23.



(a) Función de autocovarianza de la señal. (b) Periodograma de la señal.

Figura 9.23: Propiedades de la señal  $u_3[n]$

Propiedades de la señal  $u_2$

- Factor de cresta: 1,0227.
- Diferencia entre el valor central y los valores laterales: 15.22dB.

### Señal 4 ( $u_4$ ).

Finalmente se optó por generar una señal “extremadamente lenta” con respecto a las señales anteriores. En éste último caso el parámetro  $B$  se ajustó para mantener estados de alto o bajo con una duración de 100 milisegundos, es decir, el doble de la constante de tiempo de la señal de velocidad angular.

El código utilizado fue el siguiente:

```
u_4=idinput(16384,'prbs',[0\text{ }0.00001],[0\text{ }1])
```

y cuya evolución temporal se observa en la figura 9.24 donde es evidente que es una señal que cambia de nivel de manera más lenta que las anteriormente consideradas.

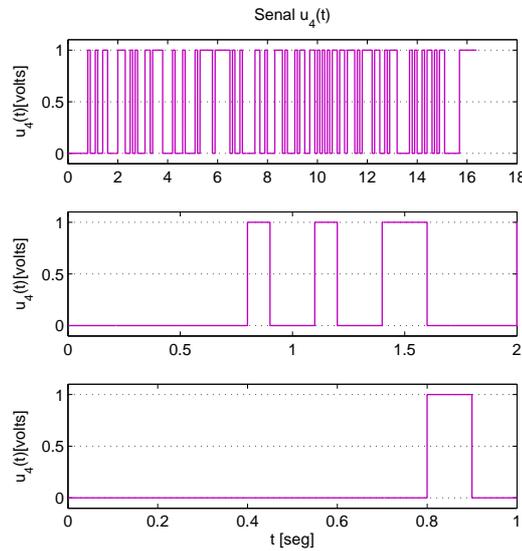


Figura 9.24: Señal  $u_4[n]$  a utilizar en un ensayo de experimento de identificación

La función de autocovarianza y el periodograma de la señal  $u_4$  se muestran en las figura 9.25.

- Factor de cresta: 1,0781.
- Diferencia entre el valor central y los valores laterales: 10dB.

En las figuras anteriores se puede observar una marcada diferencia en lo que respecta a la función de covarianza de la señal. En la figura 9.25(a) se observa un incremento en el nivel de los valores laterales de la función de covarianza de manera que la diferencia entre el valor central correspondiente al desplazamiento nulo ( $k = 0$ ) principal y los valores laterales es de 10dB mientras que para la señal 1 es de 16,98dB lo que denota que las sucesivas muestras de la señal 4 ya no son tan independientes como en la señal 1. En la sección siguiente se comparan las distintas señales de entrada que se aplicarán al posicionador de antena.

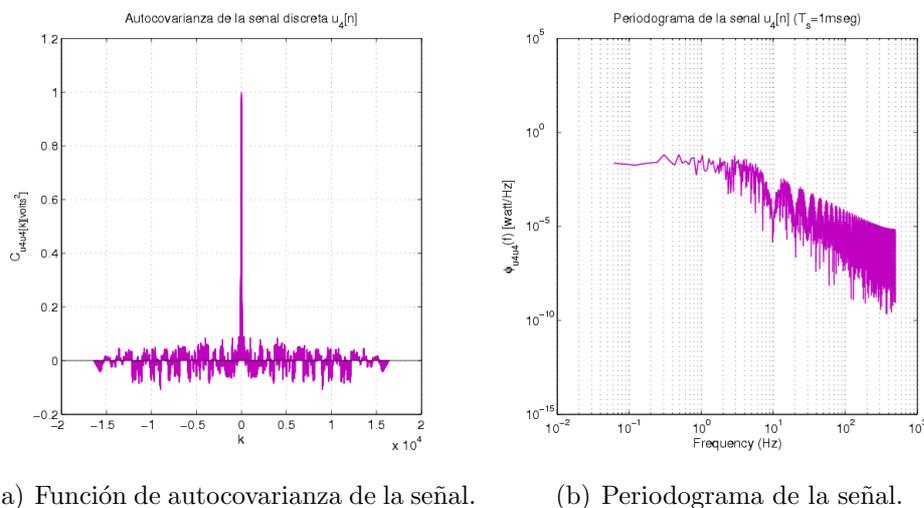


Figura 9.25: Propiedades de la señal  $u_4[n]$

| Señal | $C_r$  | $C_r[\text{dB}]$ |
|-------|--------|------------------|
| $u_1$ | 1.0185 | 0.0159           |
| $u_2$ | 1.1005 | 0.831            |
| $u_3$ | 1.0227 | 0.194            |
| $u_4$ | 1.0781 | 0.653            |

### 9.5.5 Comparación de las Señales de Excitación a utilizar.

En primer lugar se resume en el cuadro 9.5.5 el valor del Factor de Cresta de cada señal.

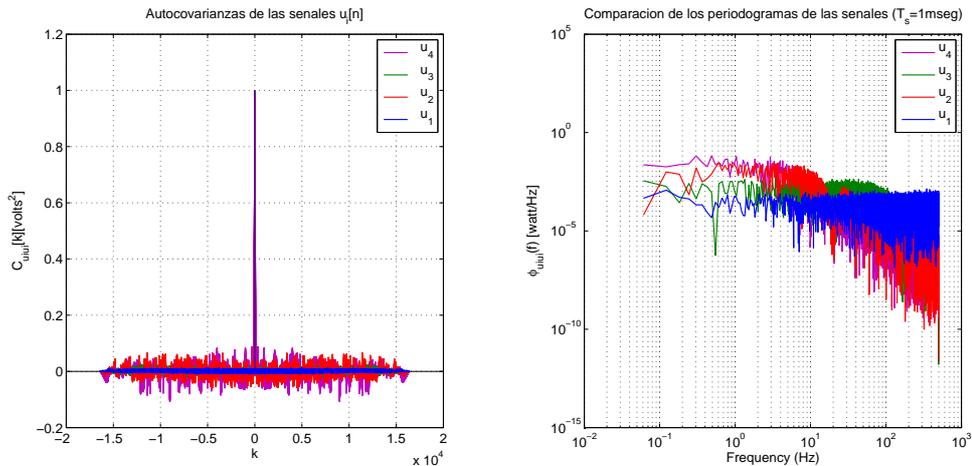
En el cuadro 9.5.5 se observa que el factor de cresta de cada señal es próximo al valor teórico óptimo de 1 (o  $0\text{dB}$ ). Para establecer un punto de comparación, puede considerarse el factor de cresta de una señal sinusoidal es de 1.41 (o  $3\text{dB}$ ). Si se considerara únicamente el factor de cresta, entonces la señal  $u_1$  sería la señal apropiada para realizar el experimento. Dado que el resto de las señales poseen un valor de factor de cresta próximo a 1 se suponen también válidas para el experimento de identificación.

En la figura 9.26 se muestran las funciones de covarianza y el periodograma de las 4 señales a a modo de comparación.

Como puede observarse en la figura 9.26(a) es evidente que a medida que se agregan intervalos donde la señal no varía (se mantiene en estado alto o bajo), los lóbulos laterales de la señal de covarianza aumentan su nivel y por lo tanto la señal PRBS pierde sus propiedades de ruido blanco.

El mismo efecto se observa en los periodogramas de la figura 9.26(b)<sup>8</sup>. Si bien las señales  $u_2$  y  $u_4$  no poseen una densidad espectral de potencia uniforme en absolutamente todo el ancho de banda hasta  $500\text{Hz}$  como es el caso de las señales  $u_1$  y  $u_3$  pero si poseen una densidad de espectral de potencia constante dentro del ancho de banda de  $100\text{Hz}$  que

<sup>8</sup>Tener en cuenta que la densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la señal, por lo tanto analizar la función de autocovarianza (que es la función de autocorrelación sin considerar el valor medio de la señal) o el periodograma de la misma señal son dos formas distintas de observar los mismos efectos.



(a) Comparación de la función de autocovarianza

(b) Comparación del Periodograma.

Figura 9.26: Comparación de la función de autocorrelación y de la densidad espectral de potencia de las distintas señales de entrada  $u_i[n]$ .

es el ancho de banda de interés (recordar que el ancho de banda estimado del sistema es de  $50\text{Hz}$ ).

Por lo tanto, se concluye que las cuatro señales generadas son aptas para llevar a cabo el experimento de identificación ya sea por su factor de cresta cercano al valor uno o por mostrar una densidad espectral de potencia constante dentro del ancho de banda de interés.

Los resultados de los experimentos serán mostrados en la sección 9.5.7.

### Cantidad de muestras a recolectar.

Como se anticipó en las secciones anteriores

- *El número de muestras a recolectar es 16384 muestras.*

El número propuesto no es arbitrario y se debe a que:

- Cumple con la cantidad mínima de muestras del vector de parámetros incógnita  $\theta$  y permite además aplicar un algoritmo recursivo.
- Las muestras de la señal  $u[n]$  puede representarse como variables de tipo carácter (char) de manera que la señal  $u[n]$  ocupará 16kB de memoria RAM.
- Las muestras de la señal  $y[n]$  puede representarse como variables de tipo entera (int) por lo que la señal  $y[n]$  ocupará 32kB de memoria RAM.

De esta manera se ocuparán 48kB de los 64kB de memoria RAM extendida en el controlador digital.

### Frecuencia de Muestreo.

La selección de la frecuencia de muestreo está ligada a las constantes de tiempo del sistema. Si se elige una frecuencia de muestro extremadamente alta con respecto a la dinámica del sistema se obtendrían datos redundantes, datos que aportan poca información y que además pueden traer otras dificultades de implementación como por ejemplo, ocupar en poco tiempo toda la memoria disponible en el sistema de adquisición como ocurriría en el caso que se esta analizando.

Luego, una frecuencia de muestreo extremadamente baja puede que no registre todos los fenómenos dinámicos presentes en el sistema.

Un valor ampliamente usado en la práctica es tomar una frecuencia de muestreo 10 veces mayor que el ancho de banda del sistema (o lo que se supone que es el ancho de banda del sistema). Lo anterior se corresponde a tomar aproximadamente entre 5 a 8 muestras durante el tiempo de subida de la señal asociada al polo más rápido cuando se excita al sistema con un escalón a la entrada. De esta manera también se asegura que se cumple el teorema del muestreo.

En el caso del experimento de identificación del posicionador, el tiempo de subida de la señal de corriente de armadura, que es la señal determinada por el polo eléctrico del sistema, es de 6.5 milisegundos. Basándose en el valor anterior, en la cantidad de muestras que pueden almacenarse en la memoria del controlador y en una frecuencia de muestro que se sabe experimentalmente que el controlador puede mantener garantizando que no se perderán datos se optó por:

- Utilizar una frecuencia de muestreo de 1kHz o lo que es lo mismo, un período de muestro  $T_s = 1$  milisegundo.

Dicho valor asegura de 6 a 7 muestras durante el tiempo de subida de la señal lo cual cumple con el criterio de diseño establecido en los párrafos anteriores.

Para más información ver [18].

### 9.5.6 Estructura Final del Experimento de Identificación.

En la sección 9.5.1 se dio una primera aproximación a al diseño del experimento de identificación donde se establecía que señales serían consideradas como entrada y salida del sistema y el hardware a utilizar para excitar al sistema y recolectar los datos generados. Una vez seleccionadas las señales  $u[n]$  a utilizar en el experimento de identificación el próximo paso es especificar cómo llevar a cabo el experimento.

En base a los recursos disponibles se optó por el siguiente procedimiento:

- Llevar a cabo el cálculo de los parámetros de manera “off-line”. Por lo tanto, no es necesario procesar los datos adquiridos en tiempo real, sino que basta con almacenarlos en una memoria para ser procesados más tarde.
- Utilizar un computadora personal equipada con Matlab ya que cuenta con el Toolbox de Identificación de sistemas, que no solo provee de todos los algoritmos vistos en el Capítulo 7, sino que además cuenta con herramientas de análisis, cálculo y selección. De hecho, la función *idinput()* utilizada para generar las señales  $u[n]$  pertenece a dicho Toolbox.

- Como se definió anteriormente utilizar el microprocesador Rabbit3000 para excitar el sistema y adquirir las muestras de la salida del mismo.

Por lo anterior, se diseñó un ensayo de laboratorio que realice lo siguiente:

1. Utilizando Matlab en la computadora personal se generó la señal  $u_i[n]$  correspondiente al  $i$ -ésimo ensayo. La señal generada es una señal del tipo PRBS que consta de un total de 16384 muestras que toman valores entre 0 y 1.
2. Una vez generada la señal en el paso 1 se procedió a almacenar muestra a muestra en la memoria del microprocesador. Cada muestra ocupa una posición de memoria de 8 bits. Para la comunicación entre la computadora personal se programaron tanto el microprocesador como el Matlab (mediante scripts) para establecer una comunicación serie utilizando el estándar RS-232.
3. Una vez almacenadas las muestras de la señal  $u[n]$  en la memoria del microprocesador, el mismo ejecuta una función que recorre una por una cada posición de memoria utilizando técnicas de punteros y dependiendo del valor que encuentre es que modifica el valor de la señal PWM que comanda la electrónica de potencia.

En este caso es muy sencillo ya que un “1” en una posición de memoria equivale a un ciclo de trabajo del 100 %, es decir, que se está aplicando la máxima amplitud de tensión de armadura  $v_a$  a la entrada del posicionador (104 Volts).

En caso de encontrar un “0” el ciclo de trabajo de la señal PWM es 0 % de manera que la tensión aplicada al posicionador es 0 volts.

Por lo tanto, la señal aplicada a la entrada del motor DC (o lo que es lo mismo, del sistema a posicionador) es una réplica de la señal en la memoria amplificada por una ganancia  $G_{pwr}$  provista por la etapa de potencia.

**Ésta acción se realiza cada 1 milisegundo.**

4. Utilizando técnicas de multitasking, antes del próximo instante de muestro se adquiere la posición  $y[k]$  del posicionador correspondiente a la  $k$ -ésima muestra de  $u[k]$ . El valor adquirido de posición posee un largo de 13 bits (ver sección 8.3.6) de manera que cada muestra de posición de memoria ocupa dos bytes de 8 bits.

Los datos adquiridos de posición se almacenan en 32kB de memoria RAM del módulo RCM3000 utilizando también técnicas de punteros.

5. Una vez finalizado el experimento de identificación que dura aproximadamente 16 segundos y adquiridas todas las muestras de posición  $y[n]$  las mismas son transmitidas a la computadora mediante el mismo canal serie y almacenadas por la misma función de Matlab. Con esto se pone fin al experimento de identificación para dar lugar a la etapa de cálculo del modelo.

En la figura 9.27 se muestra la estructura final del laboratorio implementado para llevar a cabo los experimentos de identificación.

En la figura 9.28 se tienen algunas imágenes del sistema real implementado

Los programas desarrollados para llevar a cabo este experimento fueron:

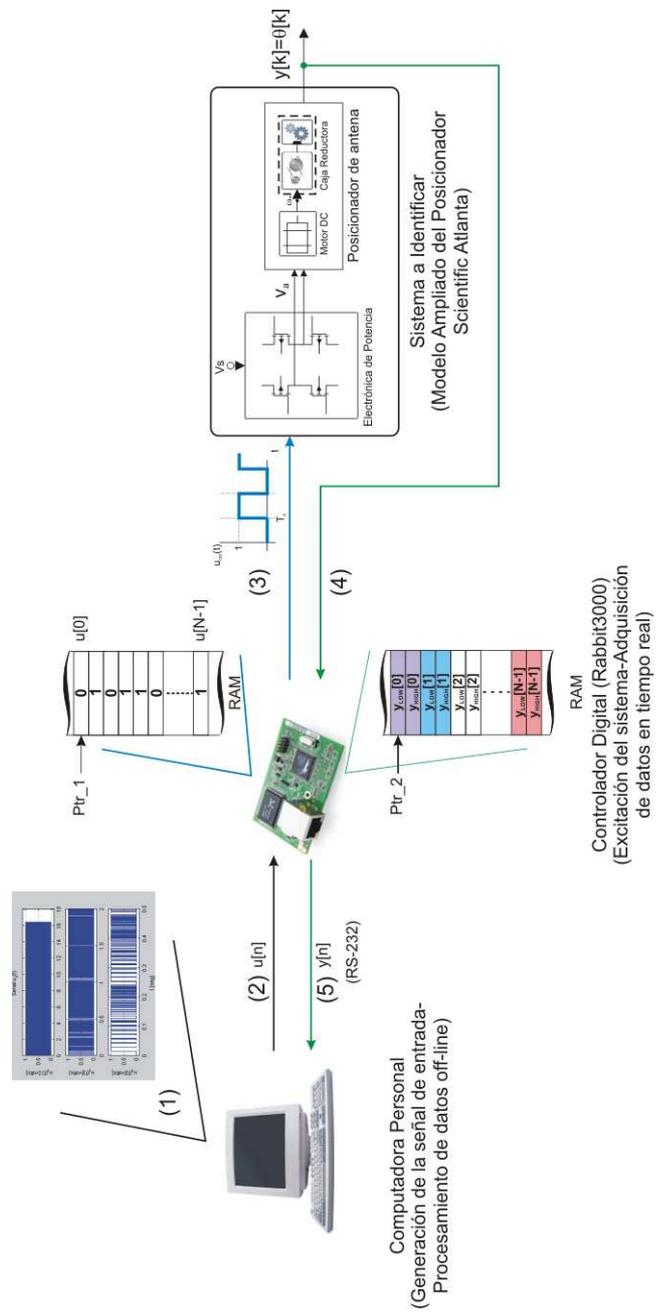
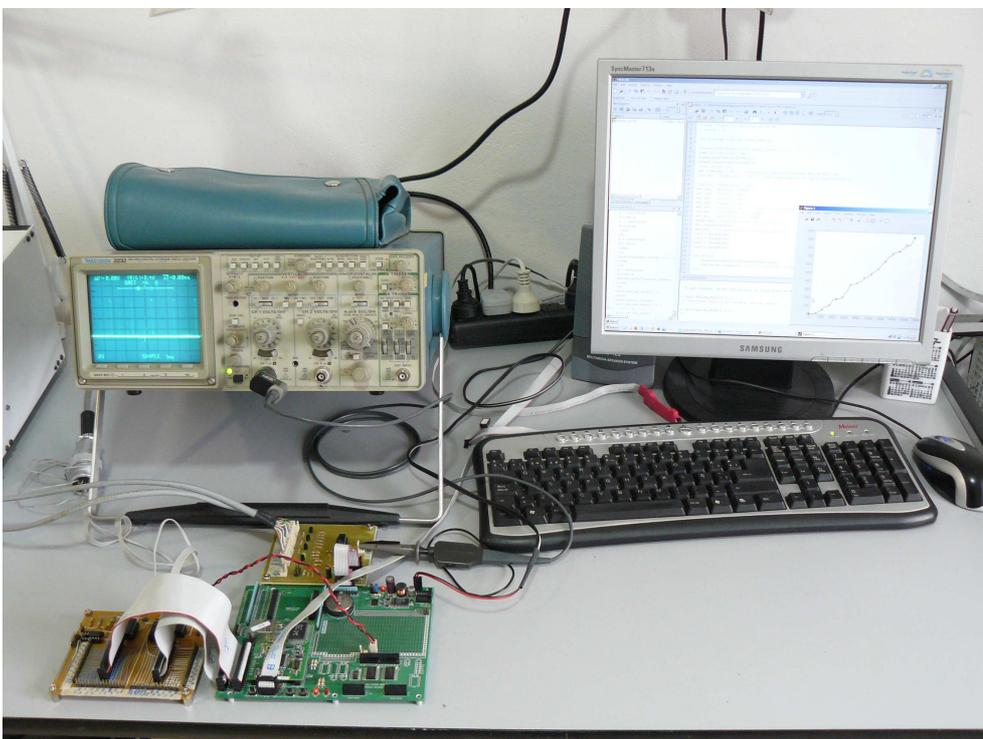


Figura 9.27: Estructura final del laboratorio para llevar a cabo los experimentos de identificación.



(a) Sistema completo.



(b) Controlador digital Rabbit3000 y electrónica de control.

Figura 9.28: Imágenes de la estructura del experimento implementado para llevar a cabo el experimento de identificación.

**En Matlab.** *ISIS\_posicionador\_exp\_1.1.0.m*

**En el Microprocesador.** *ISIS\_ROTADOR\_PRBS\_VER\_1.1.0*

cuyo código se incluirá en el CD-ROM adjunto del informe final.

### 9.5.7 Resultados obtenidos. Selección de los datos a utilizar.

En la figura 9.29 se muestran la salida  $y_i$  del posicionador (sistema incógnita) asociada a la correspondiente señal  $u_i$  utilizada para excitarlo.

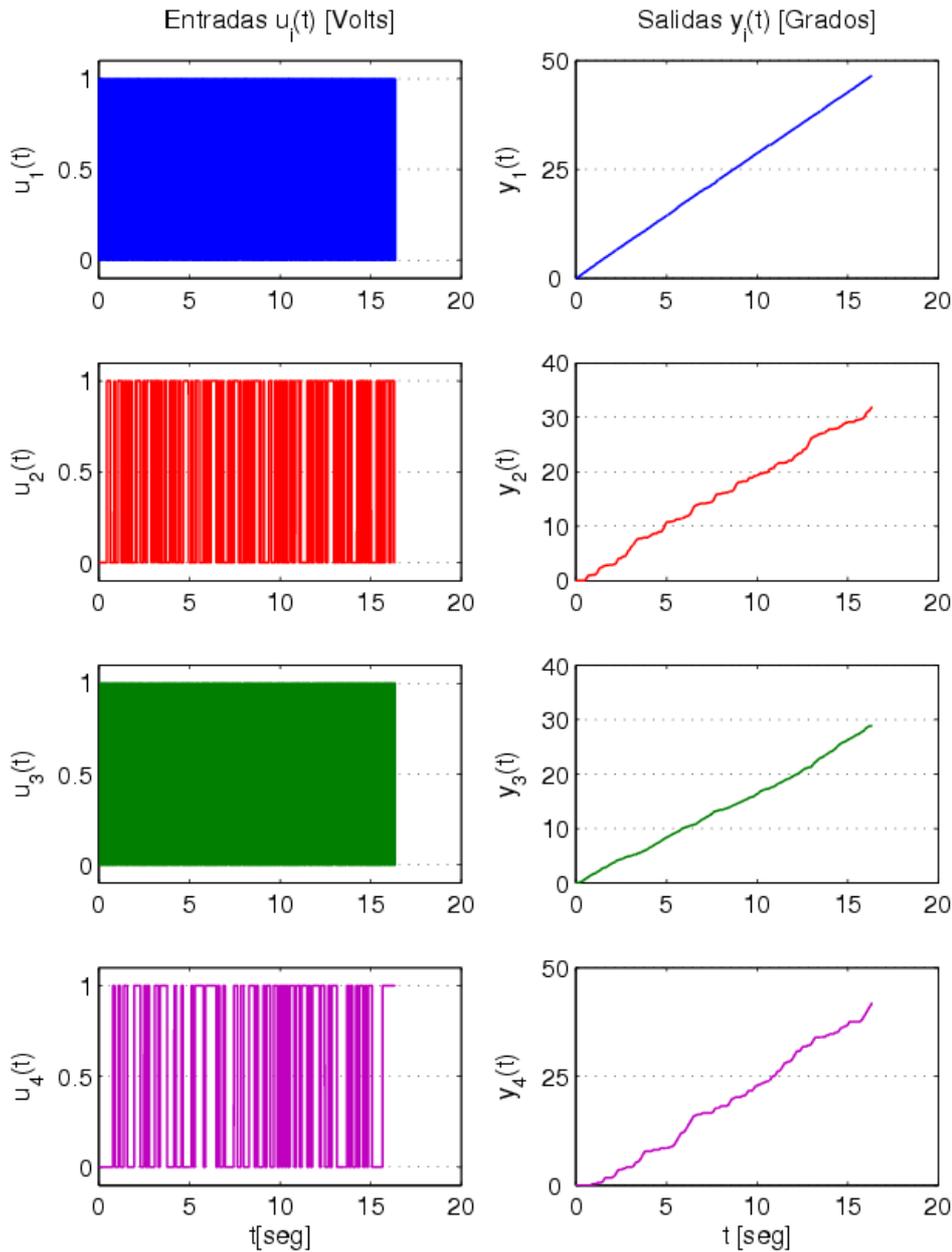


Figura 9.29: Resultados de los experimentos de identificación. Respuesta del sistema a las distintas entradas  $u_i$ .

Resulta interesante observar el comportamiento de la salida  $y_1$ . La señal  $u_1$  es la señal con cambios más rápidos que puede generarse, es decir, en cada instante de muestreo es

posible que la señal cambie su estado lo que equivale a excitar al sistema con una señal cuadrada de  $500Hz$ . Como puede verse, la señal  $y_1$  no registra las aceleraciones bruscas como el resto de las señales lo que puede interpretarse como que  $y_1$  es la respuesta al valor medio de la señal  $u_1$  por lo que es esperable que el modelo obtenido a partir de esta señal.

El resto de las señales son capaces de registrar los fenómenos transitorios al cambiar de estado la señal de entrada por lo que es de esperar que contengan la suficiente información para la estimación de un modelo válido del sistema.

### 9.5.8 Determinación del parámetro $n_k$ .

Como se vio en el Capítulo 7 el parámetro  $n_k$  mide el retardo entre la entrada y la salida del sistema y debe ser especificado a la hora de la elección del modelo.

La determinación del parámetro  $n_k$  se realizó midiendo el retardo entre la entrada y la salida tomando como datos las señales correspondientes al experimento 4, es decir, cuando la señal de entrada es la señal  $u_4[n]$  y la salida  $y_4[n]$  ya que en dicho experimento se utilizó la señal de excitación más lenta. Considerando los primeros instantes de tiempo del experimento se observa que la salida del sistema responde un intervalo  $\Delta t$  después que se aplicó la excitación a la entrada.

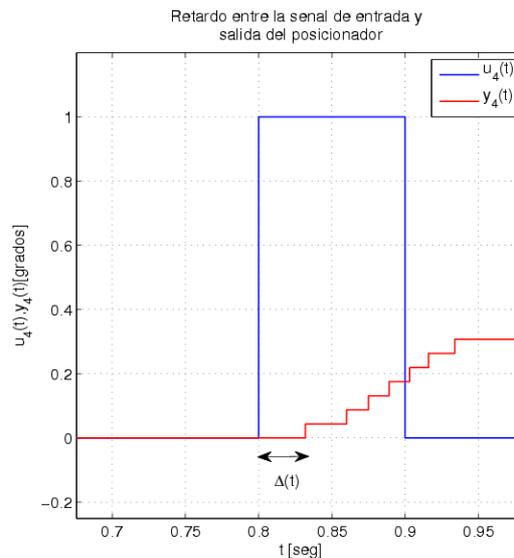


Figura 9.30: Retardo entre la entrada y la salida del posicionador

De donde se tiene que la cantidad de intervalos de muestreo en el retardo estará dados por:

$$n_k = \frac{\Delta t}{T_s} = \frac{33mseg}{1mseg} \Rightarrow \boxed{n_k = 33} \quad (9.81)$$

En la figura 9.5.8 se muestra el retardo entre la entrada y la salida desde que se produce un cambio en el ciclo de trabajo de la señal PWM (1 corresponde al 100 %) en el controlador digital.

Con esto se pone fin a la etapa de obtención de datos del posicionador de antena Scientific Atlanta a partir de la experimentación sobre el mismo.

Con los datos obtenidos se procederá en el capítulo siguiente a la estimación de un modelo matemático que permita obtener un modelo de estados con el objetivo de permitir el diseño del lazo de control por modo deslizante.

## 9.6 Resumen.

En este capítulo se resumieron todas las actividades realizadas con el objetivo de obtener toda la información sobre el sistema posicionador para la determinación del modelo matemático del mismo.

Toda la información obtenida, ya sea en base a los modelos propuestos o a los experimentos previos en el sistema se utilizó para converger en el diseño y la implementación del experimento de identificación.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que para el experimento de identificación, la instrumentación utilizada será la misma que se utilizará en el diseño del lazo de control final lo que asegura que será apta para dicha aplicación.

En el capítulo siguiente, se utilizarán los datos obtenidos para la estimación del modelo de estados del posicionador de antena.

# Capítulo 10

## Estimación del Modelo de Estados del Posicionador. Segunda Parte: Estimación del Modelo.

### 10.1 Introducción

El capítulo anterior se dedicó enteramente a obtener la máxima información sobre el posicionador de antena que es el sistema que se quiere identificar. Por un lado, se trató de obtener toda la información posible en base a experimentos sencillos dada la cantidad de interrogantes a resolver para el diseño del experimento de identificación. Una vez diseñado el experimento se obtuvieron los datos de entrada-salida del sistema que serán el punto de partida para el análisis de este capítulo donde la atención se centrará en la estimación del modelo del posicionador en base a toda la información recolectada.

En la primera parte de este capítulo se describe brevemente la herramienta utilizada para la estimación del modelo que es el Toolbox de Identificación de Sistemas de Matlab como también las herramientas de procesamiento y análisis de las que dispone el mismo para el tratamiento de los datos obtenidos.

Una vez definidas las herramientas utilizadas se muestran los resultados obtenidos a partir del esquema de trabajo propuesto en la sección 7.13.4.

Como cierre del proceso de identificación se selecciona el modelo de estados (dentro de los posibles candidatos) que se tendrá en cuenta para el diseño del lazo de control en el capítulo 11.

### 10.2 El Toolbox de Identificación de Sistemas.

El Toolbox de Identificación de Sistemas de Matlab (System Identification Toolbox ó SIT) es un conjunto de funciones que permiten, una vez obtenidos los datos de entrada y salida, llevar a cabo el resto de las tareas involucradas en el proceso de identificación que consisten en: el procesamiento y acondicionamiento de los datos recolectados, la selección de una estructura de modelo, la selección de un criterio de ajuste de parámetros, la estimación de los parámetros de dicho modelo y finalmente, la validación del modelo obtenido.

Si bien cada una de las funciones disponibles pueden ser ejecutadas desde la línea de comandos, el toolbox de identificación provee una interfaz gráfica que permite presentar los datos, procesarlos, estimar modelos, analizar los mismos y exportarlos al espacio de trabajo.

En la figura 10.1 se observa el menú principal de la interfaz gráfica del toolbox de identificación. El manejo de dicha interfaz es bastante sencillo y permite trabajar al mismo tiempo con diferentes juegos de datos de entrada-salida los cuales se agrupan en los recuadros que aparecen sobre el lado izquierdo de la imagen (“Data Board”), mientras que los modelos estimados se agrupan en los cuadros sobre el lado derecho (“Model Board”).

Por ejemplo, en la figura se puede observar en la primer columna de la izquierda los datos importados correspondiente a cada uno de los experimentos realizados sobre el posicionador de antenas.

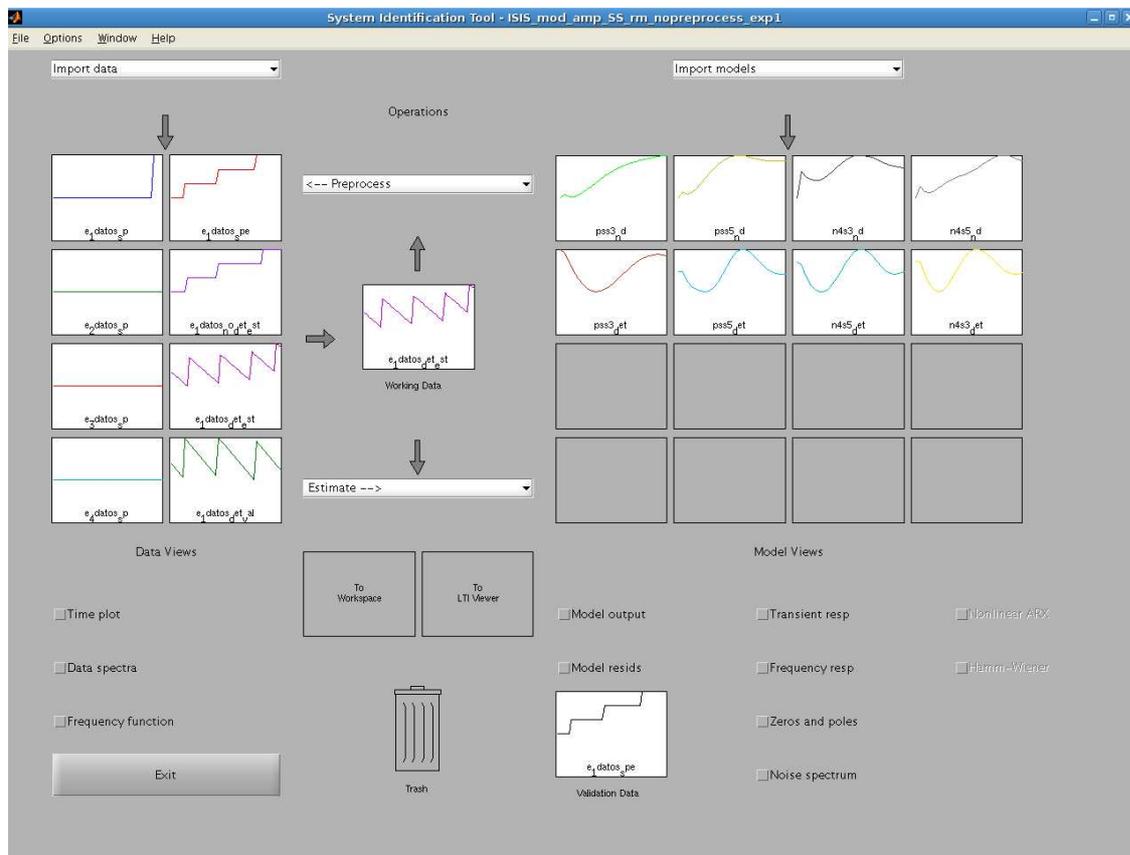


Figura 10.1: Interfaz gráfica (GUI) del Toolbox de Identificación de Sistemas.

Observando con más detalle, el menú principal de la interfaz gráfica puede dividirse en tres partes dependiendo de la operación a realizar y de los datos involucrados. A continuación se describen las funcionalidades de cada una con el objetivo de mostrar las herramientas utilizadas.

### 10.2.1 Visualización de datos (Data Views).

Corresponde a la parte izquierda de la pantalla y es donde se agrupan todas las funcionalidades que permiten no solo importar los datos del experimento de identificación, sino también hacer un análisis previo de dichos datos previo a ejecutar los algoritmos de identificación.

Las herramientas de análisis con las que se cuenta son:

**Time Plot (Gráfico en el tiempo).** Permite graficar los datos de entrada y salida en función del tiempo con el objetivo de lograr una mejor interpretación sobre el problema que se pretende resolver y poder predecir algunos resultados.

**Data Spectra (Espectro de los datos).** Ésta opción permite realizar un análisis en el dominio de la frecuencia de los datos con los que se cuenta. Dado que el espectro de la señal será calculado a partir de los datos de entrada y salida, lo que se obtendrá será una estimación de la densidad espectral de potencia cuyos resultados pueden calcularse de dos formas distintas: mediante el periodograma visto en el capítulo 9 o la estimación mediante análisis espectral vista en el Capítulo 7.13.4 del espectro de las señales.

**Frequency Function (Respuesta en Frecuencia).** Muestra la respuesta en frecuencia en módulo y fase de los datos importados. Se utiliza cuando los datos importados pertenecen al dominio de la frecuencia y no al dominio del tiempo. En el caso que se está considerando los datos importados corresponden al dominio del tiempo, por lo que esta herramienta no será utilizada.

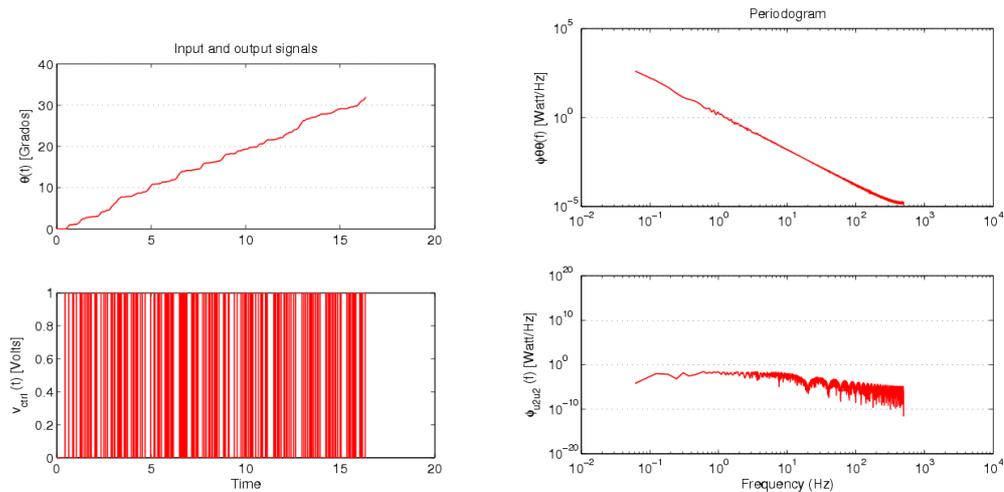
A modo de ejemplo, en la figura 10.2 se muestran los gráficos producidos por las herramientas “Time Plot” y “Data Spectra” para el conjunto de datos correspondientes al experimento 2 donde la señal de entrada es la señal  $u_2[n]$  ya analizada en el capítulo 9 y la señal de salida es la correspondiente respuesta del sistema  $y_2[n]$  (posición angular  $\theta$  para el sentido de movimiento en azimut).

El mismo procedimiento se realizó para todos los conjuntos de datos correspondientes a los cuatro experimentos de identificación llevados a cabo sobre el posicionador. Si bien los diagramas temporales y el periodograma de las señales de entrada ya habían sido mostrados en el capítulo 9, el objetivo fue verificar que el sistema sea excitado dentro del ancho de banda de frecuencias de interés establecido en el capítulo anterior (500 Hz).

### 10.2.2 Operaciones (Operations).

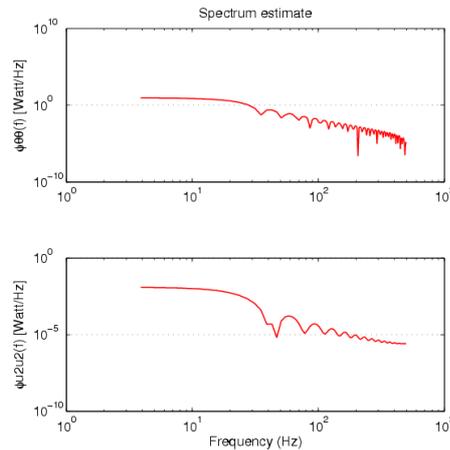
El menú de operaciones se ubica en la parte central de la GUI y está compuesto por un icono denominado “Working Data” (Datos de Trabajo) y dos menús desplegables, uno relacionado con el procesamiento de los datos y el otro con la estimación del modelo. Los mismos se describen a continuación.

**Working Data (Datos de Trabajo).** En la terminología de Identificación de Sistemas, se refiere a los datos que se utilizarán como entrada de los algoritmos de estimación de parámetros. En el caso del toolbox de identificación se refiere a los datos que pueden ser preprocesados o los datos que se utilizarán para la estimación del modelo.



(a) Evolución temporal.

(b) Periodograma.



(c) Estimación de la densidad espectral de potencia

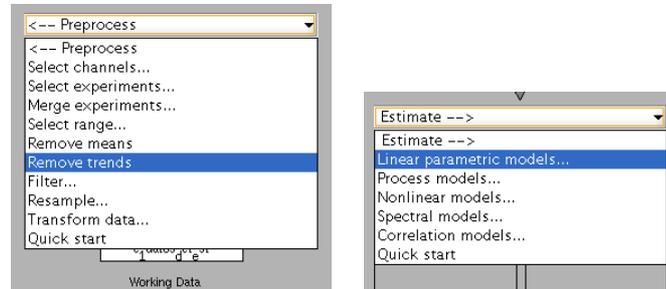
Figura 10.2: Análisis de los datos de entrada y salida asociados al experimento de identificación número 2.

**Preprocess (Preprocesamiento).** El menú de preprocesamiento ejecuta todas las funciones para el preprocesamiento y acondicionamiento de los datos obtenidos del experimento de identificación como por ejemplo la remoción de valores medios o tendencias en la evolución de los datos (detrending) con el objetivo de remover aquellas partes de la señal que no aporte información sobre la dinámica del sistema. También permite filtrar, re-muestrear y seleccionar porciones de las señales bajo análisis.

Las muestras procesadas se devuelven como nuevos juegos de datos al menú de visualización de datos. En la figura 10.3(a) se muestran las posibles opciones de preprocesamiento que ofrece el toolbox.

**Estimation (Estimación).** En el menú de estimación se ofrecen las distintas opciones

para la estimación de modelos paramétricos como no paramétricos. En la figura 10.3(b) se muestran las distintas opciones posibles.



(a) Opciones del menú de preprocesamiento de datos. (b) Opciones del menú de estimación de modelos.

Figura 10.3: Opciones de preprocesamiento y estimación de modelos de la GUI de identificación de sistemas.

Dado que el objetivo es obtener un modelo lineal paramétrico del posicionador de antena, solo se utilizarán las herramientas para la estimación de modelos de proceso (ver sección 10.8) y de modelos paramétricos lineales (ver sección 10.9).

### 10.2.3 Visualización de Modelos (Model View).

Corresponde a la parte derecha de la GUI. En ella se incluyen iconos que contienen los modelos estimados a partir de los datos presentes en el icono “Working Data” y del método de estimación utilizado. Una vez obtenido el modelo, el toolbox de identificación provee de las herramientas necesarias para la validación del mismo. Las herramientas de validación disponibles se mencionan a continuación y aquellas utilizadas se tratarán con más detalle en la sección 10.6.

**Validation Data (Datos de Validación).** De manera análoga a los Datos de Trabajo (Working Data), los datos de validación es un juego de datos de entrada-salida, en lo posible distintos a los Datos de Trabajo utilizados para estimar el modelo, que se utilizarán para analizar la bondad de dicho modelo.

**Model Output (Salida del Modelo).** Es una comparación entre la salida del modelo real almacenada en los datos de validación (salida medida  $y_i(t)$ ) y la salida del modelo simulada utilizando los datos de entrada también pertenecientes a los datos de validación (salida simulada  $\hat{y}(t)$ ). Asimismo, se calcula un parámetro que mide el “Ajuste” (FIT) del modelo estimado en base a la diferencia de la salida medida y la salida simulada.

**Residual Analysis (Análisis de Residuos).** Se divide en dos partes. Una es una medida de la independencia entre la entrada  $u[n]$  del sistema y el error presente a la salida del modelo estimado con respecto a la salida real calculada como la correlación entre ambas señales. En el caso que el error no sea independiente con respecto a la entrada, esto significa que existen fenómenos que el modelo estimado no puede

reproducir y que es entonces susceptible a cambios en la entrada por lo que debería ajustarse un nuevo modelo o sino tener en cuenta esa limitación.

Otra medida que permite el análisis de residuos es la medida de la independencia de los errores entre sí calculada como la autocorrelación de los residuos del error. La independencia de los errores asegura que el modelo de error es correcto.

Como criterio práctico, los valores obtenidos deben hallarse dentro de los límites de los intervalos de confianza. Por esto

- *Se utilizarán durante todo el proceso intervalos de confianza al 99 %.*

Este test se tratará con más detalle en la sección 10.6.

**Transient Response (Respuesta Transitoria).** Permite graficar la respuesta al escalón o la respuesta al impulso del modelo estimado. También permite calcular el intervalo de confianza para cada respuesta.

**Frequency Response (Respuesta en Frecuencia)** Esta opción grafica el Diagrama de Bode del modelo estimado.

**Zeros and Poles (Polos y Ceros).** Permite graficar la ubicación de los polos y ceros en el plano  $s$  para modelos continuos o en el plano  $z$  para modelos discretos.

**Noise Spectrum (Espectro de la Perturbación).** Para modelos del tipo entrada-salida de la forma  $y[n] = G[q]u[n] + w[n]$  muestra el contenido espectral de la perturbación  $w[n]$ .

En el proceso de identificación del modelo del posicionador, si bien se utilizaron todas las herramientas de análisis, la salida del modelo junto con el parámetro FIT y el análisis de residuos resultan novedosas al ser exclusivas del proceso de identificación y por eso se les dedica un apartado especial en la sección 10.6.

## 10.3 Análisis y Preprocesamiento de los Datos de Entrada - Salida.

En esta sección se describirán las herramientas del SIT utilizadas para el procesamiento y acondicionamiento de los datos adquiridos en los experimentos de identificación descriptos en el capítulo 9 junto con los resultados obtenidos.

Para más información sobre aquellas herramientas que no fueron utilizadas, el lector puede referirse a [19].

### Filtrado.

El filtrado de las señales de entrada-salida previo a la estimación del modelo tiene tres funciones:

1. Filtrar el error de predicción dado por  $e(n, \theta) = y_m[n] - \hat{y}[n]$ .

2. La reducción del bias en el modelo estimado.
3. Remover perturbaciones en los datos adquiridos. Esto se refiere a remover las perturbaciones fuera del ancho de banda del sistema debido a una baja relación señal a ruido en el sistema de adquisición de datos y también el filtrado de componentes de baja frecuencia, como por ejemplo offsets que no aporten información sobre la dinámica del sistema.

Para más información sobre estos aspectos referirse a [17].

En el caso del proceso de identificación del posicionador, en esta primer etapa no se utilizará un prefiltrado de la señal debido a que:

- No existe una especificación sobre las propiedades del error de predicción ni sobre el modelo de ruido.
- Las señales utilizadas poseen características similares a las que serán utilizadas durante el funcionamiento normal por lo que se supone que el bias en el modelo estimado será mínimo.
- Al ser la salida  $y[n]$  digitalizada directamente por el encoder de posición se supone que el sistema de adquisición no introduce perturbaciones a los datos que se utilizarán para la estimación.

Otro aspecto interesante a considerar, es que el ancho de banda de las señales utilizadas (a excepción de la señal  $u_1$ ) posee componentes dentro del un ancho de banda de 100 Hz que es el ancho de banda sobre el que se pretende estudiar el sistema (ver análisis de la sección 9.5.4).

### Remoción de Valores Medios (offsets) y Tendencias (Trends).

Las señales de entrada-salida del sistema pueden ser afectadas por perturbaciones de baja frecuencia, offsets, apartamientos de su valor real (Drift), tendencias (por ejemplo, debido a la presencia de un integrador) que marcan de alguna manera la evolución temporal de dicha señal o variaciones periódicas, las cuales pueden provenir del propio modelo o de fenómenos ajenos al mismo, como por ejemplo, perturbaciones y offsets en el sistema de adquisición de datos.

Dado que cualquiera de los fenómenos puede que se quiera (o no) que sea incorporado al modelo del sistema, la teoría de identificación de sistema ofrece dos opciones:

1. Remover de los datos medidos (llámense provisoriamente  $u_m[n]$  e  $y_m[n]$ ) aquellos fenómenos que se creen son perturbaciones o no aportan información sobre el sistema mediante el preprocesamiento de los datos.
2. Dejar que el modelo de ruido se encargue del modelado de las perturbaciones. Por ejemplo, utilizar como estructura de modelo el modelo Box-Jenkins visto en el Capítulo 7.13.4 ya que esta estructura de modelo contempla un modelo de ruido.

Un ejemplo sencillo de este problema se obtiene de analizar un modelo lineal con estructura ARX determinado por la siguiente ecuación:

$$A[q]y[n] = B[q]u[n] + v[n] \quad (10.1)$$

y que representa tanto las propiedades dinámicas del sistema (como  $y$  varía respecto de  $u$ ) como las propiedades estáticas, como por ejemplo, si  $u$  es constante tal que  $u[n] = U$  entonces el sistema estará en estado estacionario y por lo tanto  $y$  también será constante de forma que:

$$A[1]Y = B[1]U \quad (10.2)$$

donde se verifica que la ecuación (10.2) es un caso especial de la ecuación 10.1 y que solo relaciona los niveles de señal pero no aporta ninguna información sobre la dinámica del sistema de forma tal que no tiene sentido tenerla en cuenta.

En el caso de las señales utilizadas para el posicionador y dada la estructura del sistema de medida y la corta duración de los ensayos se consideraron significativos los efectos de offsets, drift y trends presentes tanto en las señales de entrada como de salida.

### Offsets.

En primer lugar, las señales de entrada  $u_i[n]$  utilizadas varían sus valores entre 0 y 1 por lo que es evidente que poseen un valor medio no nulo de manera que se optó por remover su valor medio. Si bien existen varias forma de realizarlo (ver [17] - Capítulo 14) se optó por sustraer a las señales aplicadas al sistema su valor medio. De esta manera, la nueva señal de entrada para cada caso estuvo dada por:

$$u_i[n] = u_{im}[n] - \bar{u}_i = u_{im}[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_{im}[n] \quad (10.3)$$

### Remoción de la Tendencia (Detrending).

Observando la señales de salida  $y_i(t)$  se puede observar que dichas señales son crecientes en el tiempo lo que no significa que el sistema sea inestable, sino que al girar el plato en azimut en cada revolución la posición se incrementa en  $2\pi, 4\pi, \dots$ . Esto se debe a que el sistema posee un integrador a la salida para poder medir la posición angular del mismo ( $\theta(t)$ ). Este efecto del integrador es considerado como un “*equilibrio variante en el tiempo*” y tampoco aporta información nueva al sistema entre muestra y muestra.

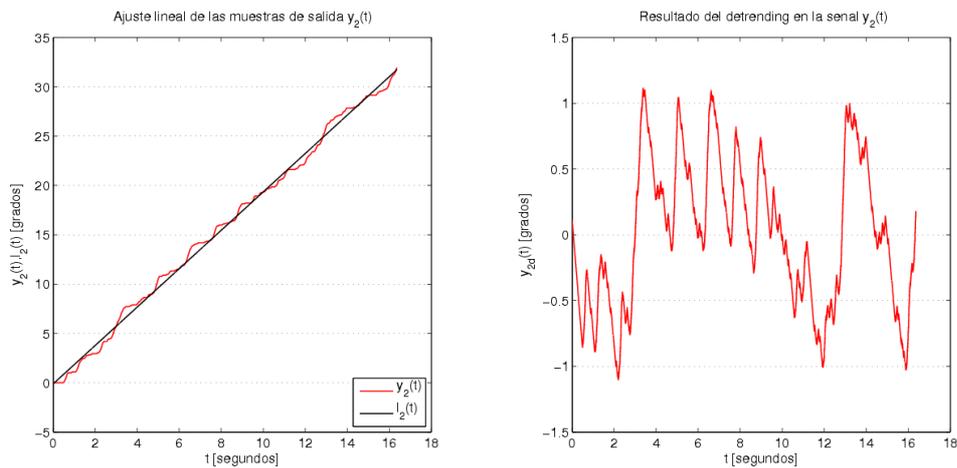
Para resolver el problema se hizo un detrending en la señal que consiste en:

1. En base a las muestras medidas ajustar una recta por mínimos cuadrados  $l_i(t)$ .
2. Restar la recta ajustada  $l_i(t)$  a la señal  $y_i(t)$  para obtener la nueva señal de salida a utilizar para el ajuste del modelo dada por:

$$y_{id} = y_i(t) - l_i(t) \quad (10.4)$$

Lo anterior se muestra para el caso de la señal  $u_2(t)$  en la figura 10.4:

1. La recta ajustada por mínimos cuadrados esta dada por:  $l_2(t) = 1,9462 \cdot t - 0,1122$ . La misma se muestra en la figura junto con la señal  $y_2(t)$ .
2. En la figura se muestra la señal resultante  $y_{2d}(t) = y_2(t) - l_2(t)$ .



(a) Ajuste lineal de las muestras de salida medidas. (b) Resultado del detrending de la señal de salida.

Figura 10.4: Resultado de aplicar detrending a la señal de salida  $y_2(t)$ .

**NOTA:** Recordar que en realidad se trata de señales discretas donde  $t = nT_s$ .

Un aspecto que no debe olvidarse es que el efecto del integrador sigue estando presente en la señal de salida a la cual se le aplicó un detrending ya que la única forma de remover el integrador sería derivando la señal  $y(t)$ . Mediante el detrending lo que realiza es eliminar la información acumulada en el integrador con el paso del tiempo cuyo efecto a la salida puede predecirse.

### Preprocesamiento Realizado a las Señales de Entrada-Salida del Experimento de Identificación.

Como resultado del análisis anterior, el preprocesamiento de las señales de entrada-salida correspondientes a cada experimento consistió en:

1. Remover el valor medio de las señales de entrada  $u_i(t)$ .
2. Realizar un detrending en cada una de las señales de salida  $y_i(t)$  para luego remover el valor medio.
3. Dividir cada una de las señales en dos porciones. Una para ser utilizada como Datos de Trabajo y la otra para utilizarse como Datos de Validación. Para esto se utilizó la herramienta Range del SIT.

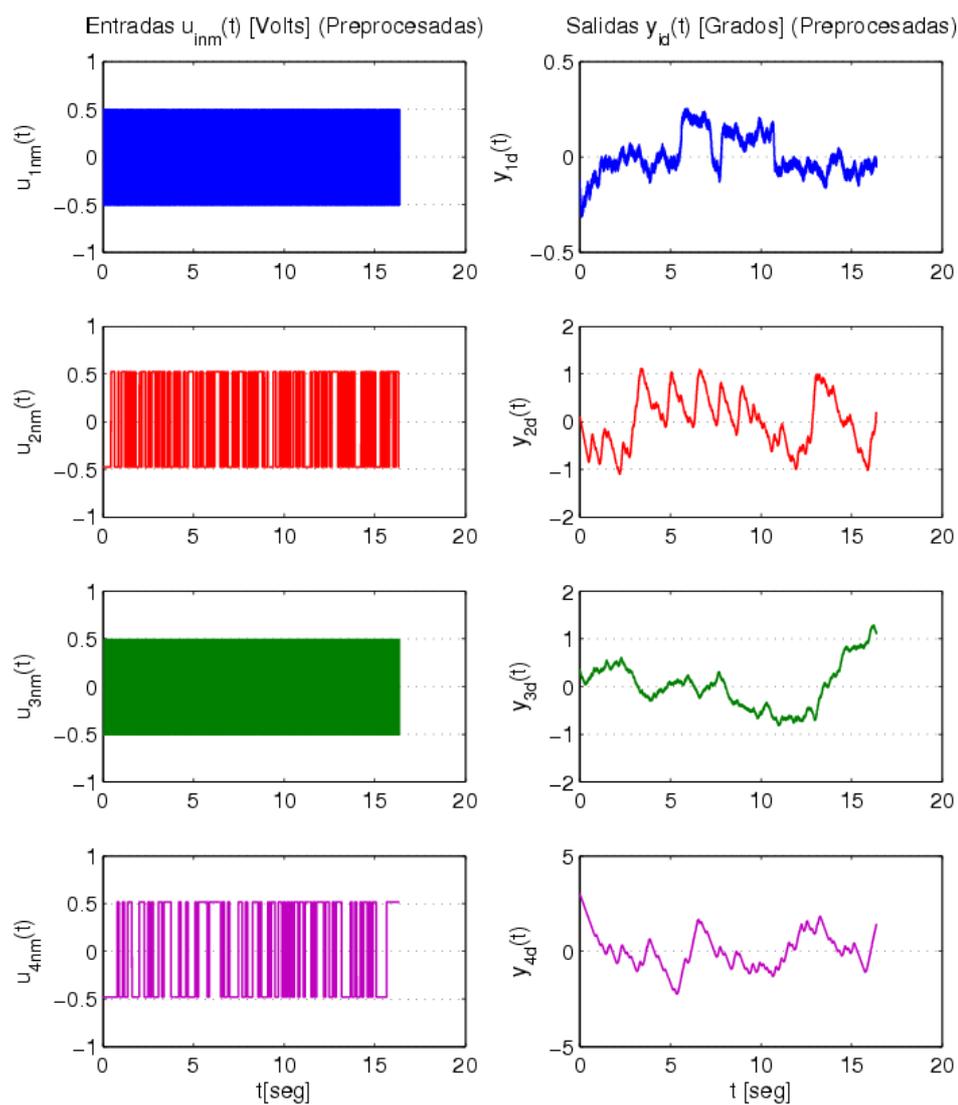


Figura 10.5: Señales de entrada-salida preprocesadas.

Las señales resultantes de los dos primeros pasos se muestran en la figura 10.5 <sup>1</sup>.

Las señales preprocesadas serán utilizadas cuando el modelo a estimar no contemple un integrador en su estructura.

Resulta interesante analizar la respuesta en frecuencia de las señales preprocesadas. En las figuras 10.6 y 10.7 se muestra la Densidad Espectral de Potencia (DEP) de cada una de las señales obtenida a partir del periodograma y la DEP de la misma señal estimada mediante análisis espectral mediante el procedimiento de Blackman-Tukey (obtiene un estimado de la respuesta en frecuencia denominado “*periodograma suavizado*”). Para más información ver [17]).

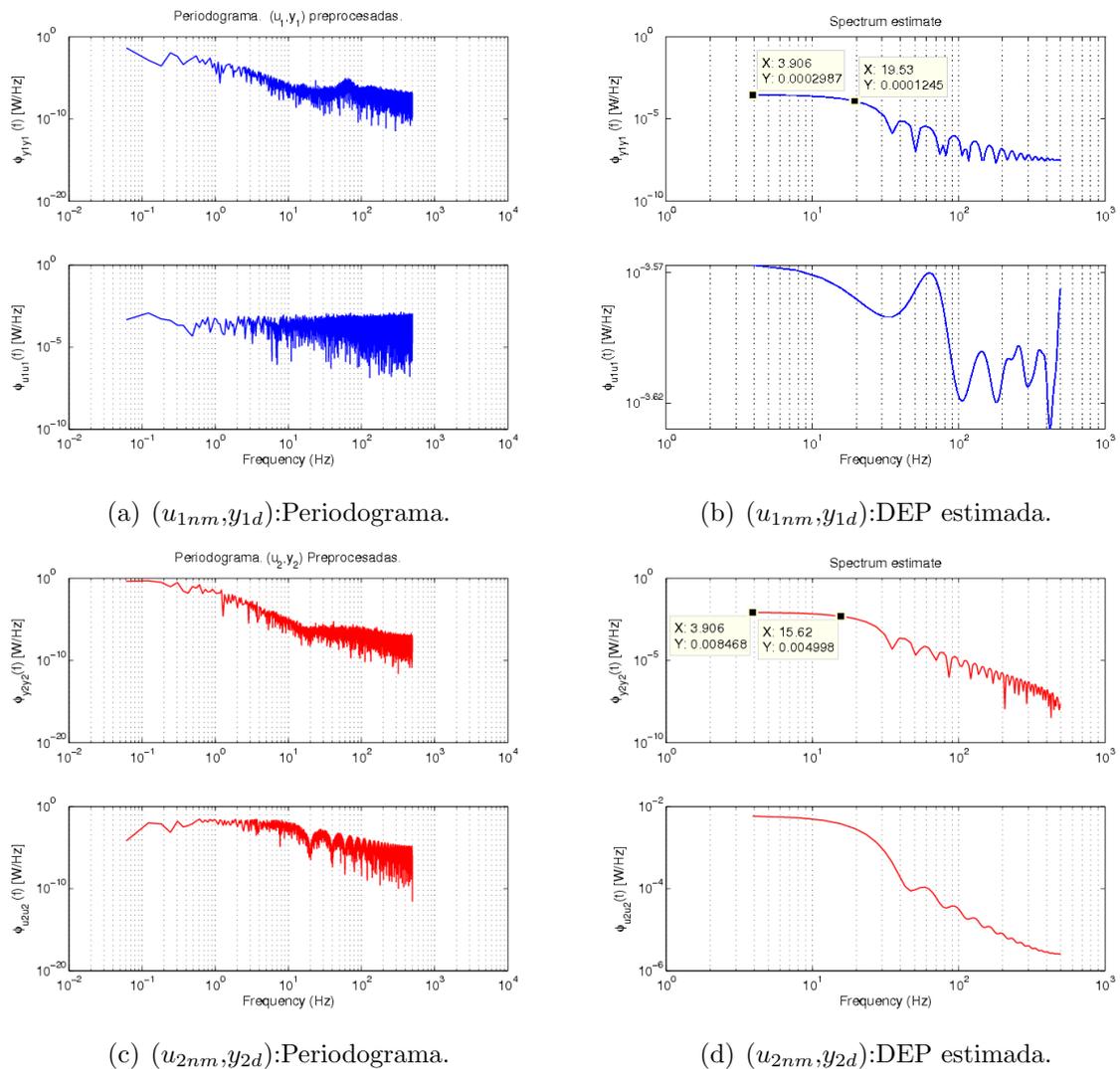
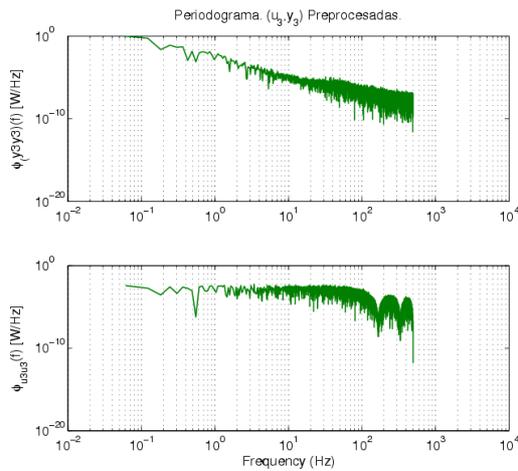


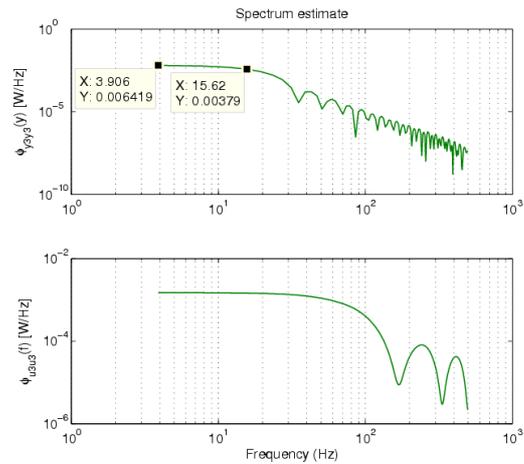
Figura 10.6: Análisis en el dominio de la frecuencia de las señales a utilizar en la estimación de parámetros (Parte 1).

En las figuras anteriores resulta interesante notar dos cosas:

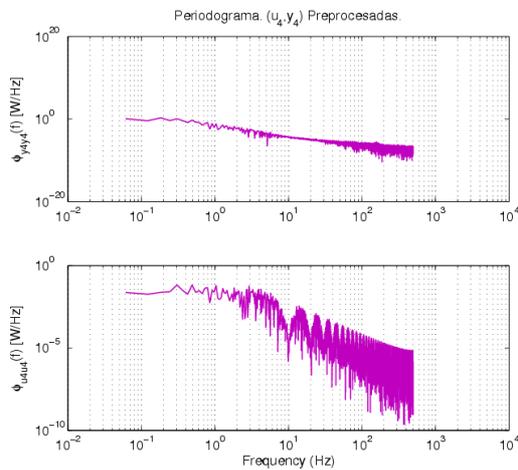
<sup>1</sup>El subíndice *nm* significa sin valor medio (“*no mean*”) mientras que el subíndice *d* significa sin tendencia (“*detrended*”).



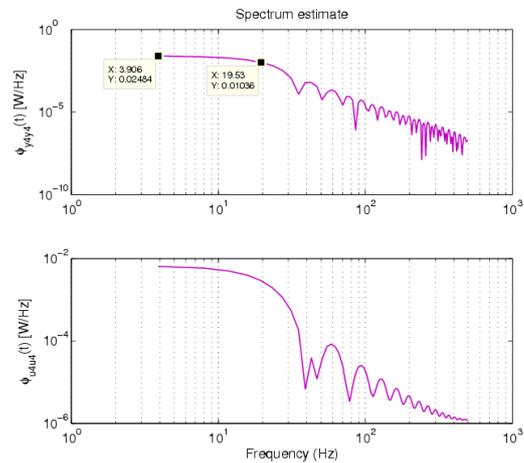
(a)  $(u_{3nm}, y_{3d})$ : Periodograma.



(b)  $(u_{3nm}, y_{3d})$ : DEP estimada.



(c)  $(u_{4nm}, y_{4d})$ : Periodograma.



(d)  $(u_{4nm}, y_{4d})$ : DEP estimada.

Figura 10.7: Análisis en el dominio de la frecuencia de las señales a utilizar en la estimación de parámetros (Parte 2).

1. Que las señales preprocesadas de entrada mantienen las mismas componentes espectrales en el rango de frecuencias de interés.
2. Las señales de salida presentan una atenuación de  $3dB$  todas alrededor de los  $15Hz$  ( $95rads/sec$ ) de manera que no sería extraño estimar un polo dominante en ese orden de frecuencias.

Éste análisis preliminar se realizó de forma introductoria. Los resultados obtenidos se verificarán una vez obtenidos y validados los modelos resultantes.

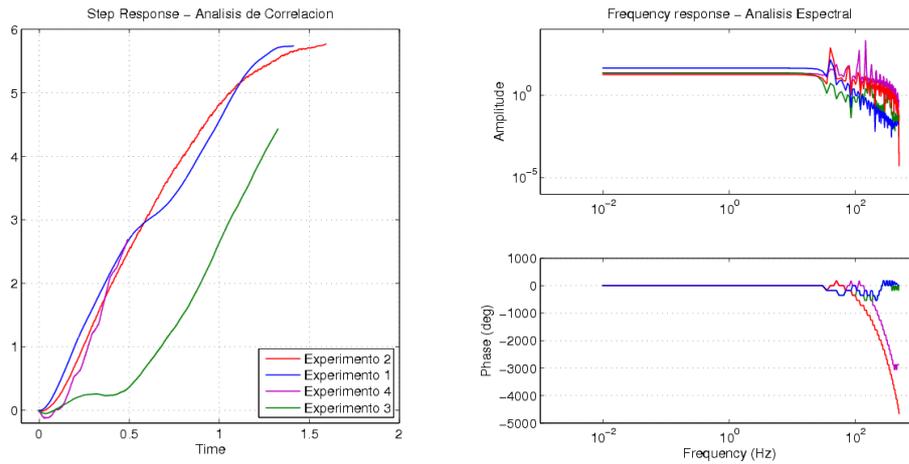
## 10.4 Respuesta en Frecuencia y Respuesta al Escalón

Como se vio en el Capítulo 7.13.4, es posible estimar la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso (o al escalón) del sistema incógnita mediante análisis espectral y

análisis de correlación sin necesidad de estimar un modelo paramétrico.

En la práctica, obtener la respuesta en frecuencia y la respuesta al escalón es uno de los primeros pasos realizados una vez determinadas las señales de entrada-salida ya que luego se comparan los resultados obtenidos con la respuesta de los modelo estimados.

En la figura 10.8 se muestran la respuesta en frecuencia y al escalón para cada juego de señales de entrada salida considerado. Estos datos se utilizarán más tarde a la hora de la validación de los modelos estimados.



(a) Análisis de Correlación.

(b) Análisis Espectral.

Figura 10.8: Análisis espectral y de correlación para cada uno de los juegos de datos de entrada-salida adquiridos en los experimentos de identificación.

En la figura anterior se observa que, a pesar de utilizar las señales preprocesadas (con detrending), la información del integrador no se pierde.

## 10.5 Estimación de Modelos. Métodos Disponibles.

En la versión 7 del Toolbox de identificación de sistema de Matlab, las dos herramientas disponibles para la estimación de modelos paramétricos lineales son dos: Modelo de Proceso (Process Models) y Modelos Paramétricos Lineales (Linear Parametric Models). (Ver figura 10.3(b).)

En líneas generales, el modelo de proceso es una herramienta provista por Matlab para el cálculo de funciones transferencia de sistemas continuos de bajo orden orientados al control (por eso se lo llama modelo de proceso). En cambio, la herramienta de estimación de modelos paramétricos lineales está orientada a la estimación de los modelos vistos en el capítulo 7.13.4. Cada una se describe en las secciones siguientes.

### Modelo de Proceso

Esta herramienta del toolbox de identificación permite estimar la función transferencia sistema incógnita en el dominio de Laplace de sistemas que puedan ser representados como máximo con un integrador, tres polos (dos de ellos pueden ser complejos conjugados), un cero y un retardo en el tiempo entre la entrada y la salida.

Si bien el objetivo de todo el proceso llevado a cabo en este informe es obtener el modelo de estados, ésta herramienta resultó útil para, en una primera etapa, estimar la ubicación de los polos del posicionador y determinar la validez de las medidas realizadas en el capítulo 9.

A partir de los experimentos realizados por el posicionador se estimó la ubicación del polo eléctrico del sistema y del polo asociado a la parte mecánica por lo tanto, si además se considera en integrador a la salida del sistema se tiene que la función transferencia estará caracterizada por:

- Un polo en el origen  $s_1 = 0$ .
- Un polo en  $s_2 = -52\text{rads/seg}$  (polo asociado a la parte mecánica).
- Un polo en  $s_3 = -336,9\text{rads/seg}$  (polo eléctrico).

De los cuales, a partir de las suposiciones realizadas para llevar a cabo las medidas, el valor que se cree verdadero (aunque deberá verificarse) es el polo eléctrico.

Luego, durante la medida del tiempo de subida de la velocidad angular se observó cierto sobrepaso en la señal lo cual daba a suponer que: si se cumplía la aproximación de polo dominante, entonces existía un par de polos complejos conjugados que no estaban siendo contemplados en el modelo y se asociaron al sistema reductor. Esto dio origen a proponer la estimación de modelos de orden 5.

Dado que la herramienta de modelo de proceso solo puede calcular transferencia de orden cuatro, se optó por modelar un modelo de orden 3 utilizando como parámetro de referencia la frecuencia de corte del polo eléctrico (o lo que es lo mismo su constante de tiempo).

En la figura 10.9 se muestra un ejemplo de la GUI de la herramienta de estimación de modelos de proceso utilizada en el procedimiento de identificación donde se ajustaron los parámetros del cuadro 10.1.

Cuadro 10.1: Ejemplo de configuración utilizado para estimar el modelo de proceso del posicionador de antena.

| Parámetro                                    | Valor               | Tipo de parámetro |
|--|---------------------|-------------------|
| Constante de tiempo del polo eléctrico       | $T_{p1} = 2,97mseg$ | Valor fijo        |
| Constante de tiempo apróx. del polo mecánico | $T_{p2} = 19mseg$   | Valor Inicial     |
| Retardo entre la entrada y la salida         | $T_d = 33mseg$      | Valor Inicial     |
| Valor aproximado de la ganancia del sistema  | $K = 0,391$         | Valor Inicial     |

Con el objetivo de estimar una función transferencia con la siguiente estructura:

$$T(s) = \frac{K \cdot e^{-T_d s}}{s \cdot (1 + T_{p1}s) \cdot (1 + T_{p2}s)} \quad (10.5)$$

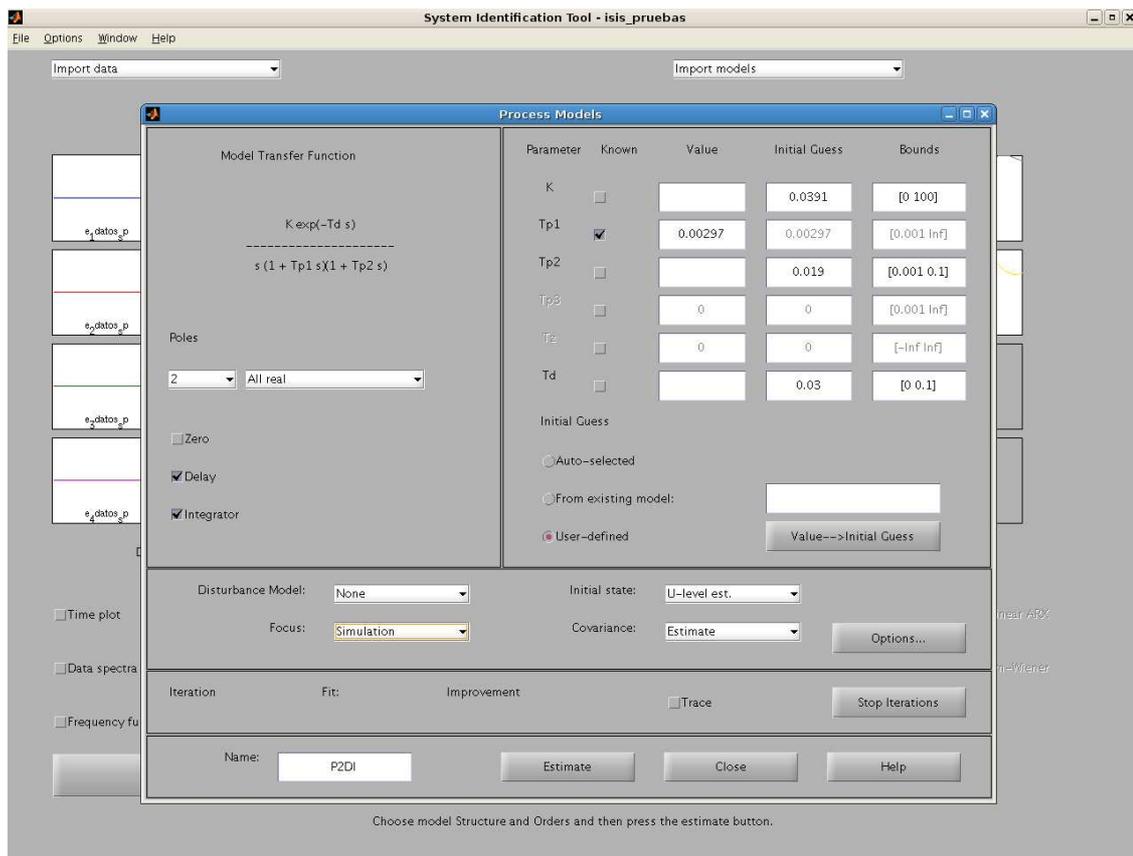


Figura 10.9: Menú de configuración del modelo de proceso. Observar la estructura de la función de transferencia estimada.

Dentro de las opciones de configuración se encuentran:

**Disturbance Model .** (Modelo de ruido) Permite contemplar un modelo de ruido de orden 1 o 2.

**Focus (Foco).** Establece restricciones al algoritmo de estimación dependiendo del uso del uso final del modelo. Las opciones utilizadas fueron prediction (tiende a minimizar el error de predicción) y Stability (fuerza al algoritmo a estimar un modelo estable).

**Initial State (Estado Inicial).** Dado que se trata de sistemas dinámicos, estos pueden tener estados iniciales distintos de cero. De manera que estado inicial puede especificarse como cero, dejar que Matlab estime un valor, setear a cero o utilizar la opción U-Level en el caso de poseer un sistema con un integrador y los datos de entrada-salida no haber sido preprocesados mediante un detrending.

**Covariance (Covarianza).** Su cálculo permite estimar la incertidumbre del modelo y el intervalos de confianza de la salida del modelo.

De acuerdo a la documentación del toolbox de identificación el método utilizado para la estimación de los parámetros del modelo de proceso es el Método de Predicción de Errores (PEM) visto en el capítulo 7.13.4.

El modelo resultante obtenido junto con su análisis de validación será tratado en la sección 10.8.

### Modelos Paramétricos.

El toolbox de identificación de sistemas provee el soporte para la estimación de los modelos paramétricos más comunes como ARX, ARMAX, Output Error y Box-Jenkins. Además permite estimar modelos de estados preestablecidos (Ready-Made) o modelos a medida (Tailor-Made) definidos por el usuario. Las opciones disponibles junto con el menú de configuración se muestran en la figura 10.10.

El procedimiento consiste en, una vez determinadas las señales de entrada-salida a utilizar, seleccionar la estructura de modelo a estimar y especificar el orden de los polinomios que lo componen  $(n_a, n_b, n_c, n_d, n_f)$  dependiendo de la estructura del modelo y el retardo  $n_k$  entre la entrada y la salida medido en la 9.5.8. Por ejemplo, si se estimara un modelo tipo ARMAX caracterizado por los polinomio A,B y C entonces deben especificarse los parámetros que determinan el orden de cada polinomio más el retardo. Se especifica entonces el vector  $[n_a \ n_b \ n_c \ n_k]$ .

En el caso de estimarse un modelo de estados, se especifica el orden  $n$  del modelo y el retardo  $n_k$  de manera que debe tenerse la precaución que los estados estimados pueden no tener correlación con los estados medibles del sistema.

Para los modelos propuestos por el usuario (Tailor Made) en el caso de tener parámetros con valor fijo o modelos donde los parámetros poseen valores iniciales, la estructura del modelo es definida en el Workspace de Matlab y luego importada a la GUI.

Los métodos disponibles utilizados para la estimación fueron:

**Para modelos ARX:** PEM.

**Para modelos de estados:** PEM y N4SID

**Para modelos Tailor-Made :** PEM.

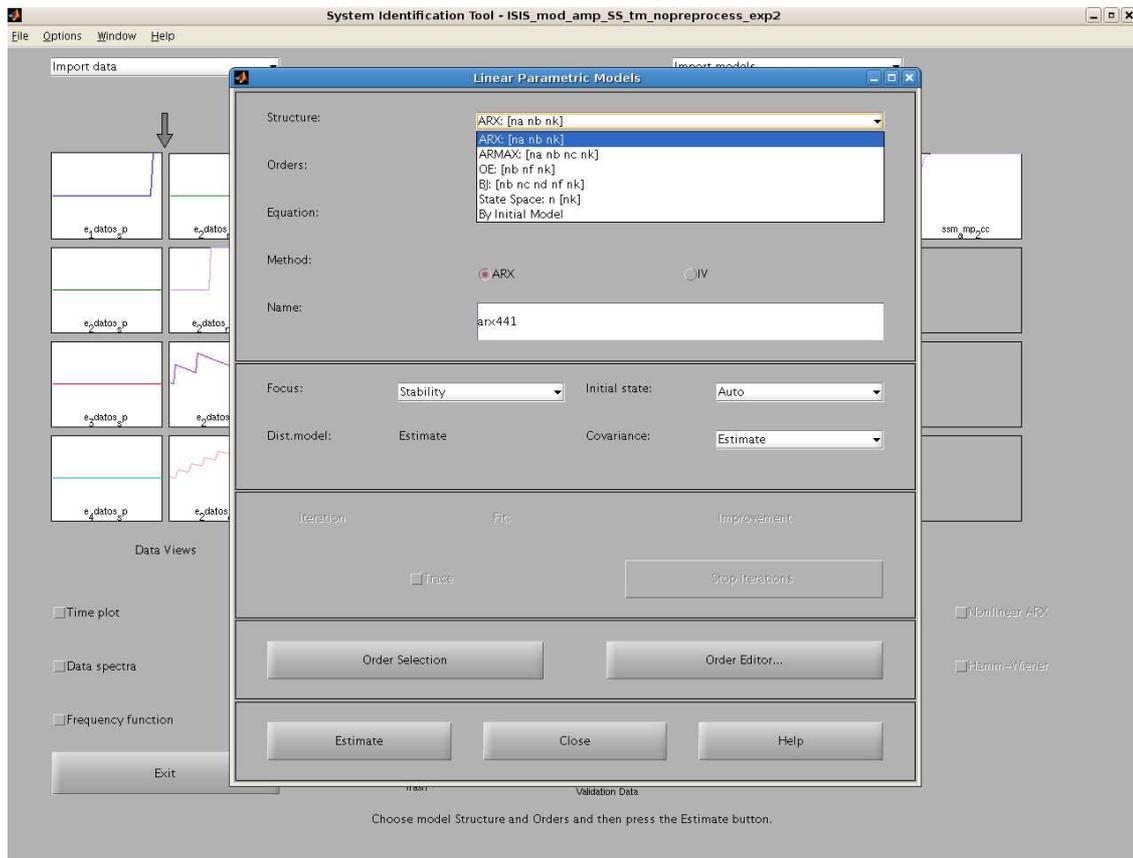


Figura 10.10: Menú de configuración del modelo de proceso. Observar la estructura de la función de transferencia estimada.

todos aplicados en su versión recursiva.

Al igual que para la estimación del modelo de proceso, la herramienta para la estimación de modelos posee diferentes opciones donde la diferencia entre cada una consiste en como ajustan la función  $w[n]$  que pesa los errores en la función de pérdidas dada por

$$J(\theta) = \sum_n^N w[n] e^T[n, \theta] e[n, \theta] \quad (10.6)$$

vista en el apéndice C. Las opciones utilizadas fueron:

**Prediction.** que calcula automáticamente la función  $w[n]$  como el producto del espectro de la señal de entrada y la inversa del modelo de ruido. Esto minimiza en error por adelantado de una muestra (“one-step-ahead”) favoreciendo el ajuste en intervalos cortos de tiempo (o lo que es lo mismo, en el rango de frecuencias altas).

**Stability.** El procedimiento es el mismo que para la opción Prediction, pero fuerza al modelo estimado a ser estable.

Con respecto a la opción que permite determinar el estado inicial del sistema, se utilizaron las opciones:

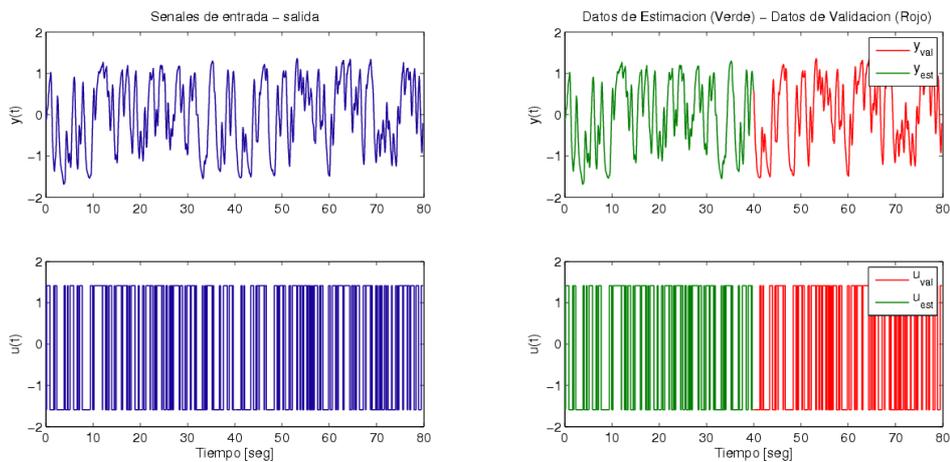
Zero. Toma todos los valores iniciales del sistema como cero.

Estimate. Dado que solamente se considera parte de los datos de entrada-salida para la estimación, puede que los mismo no correspondan a condiciones iniciales nulas y por eso también fueron estimados.

### Opción “Order Selection”.

Tanto para la estimación de modelos ARX como para modelos de estados (no preestablecidos por el usuario), el Toolbox de identificación posee una opción denominada “Order Selection” mediante la cual se realiza un “barrido” combinando diferentes órdenes  $n$  del modelo (o de los polinomios que componen la estructura del modelo) así como diferentes retardos entre la entrada y la salida ( $n_k$ ).

**Ejemplo 1** *Utilización de la opción “Order Selection”. Supóngase que se tiene un conjunto de datos de entrada salida los cuales ya han sido preprocesados y divididos tal que la mitad de los datos adquiridos se utilizan para estimar los parámetros de una determinada estructura de modelo y la otra mitad para la validación del modelo resultante (sobre esto se volverá en la sección 10.6). El conjunto de datos se muestra en la figura 10.11*



(a) Ejemplo. Señales de entrada-salida (b) Ejemplo. Separación de los datos de entrada-salida.

Figura 10.11: Datos que se utilizaran a modo de ejemplo de la utilización de las herramientas del Toolbox de Identificación de Sistemas.

En la figura 10.12 se observa el resultado de estimar todos los posibles modelos de un modelo ARX (para un determinado juego de datos de entrada-salida) utilizando el siguiente rango de valores posibles para el orden de los polinomios  $A$  y  $B$  además del retardo  $n_k$ :  $\{1 : 10; 1 : 10; 1 : 10\}$ .

De lo anterior se tiene que en total se estiman 1000 modelos.

Como resultado se tiene la gráfica de la figura 10.12 donde se resumen los modelos que mejor se ajustan dependiendo de la cantidad de parámetros y de la varianza de la señal de salida como un indicador de los fenómenos que el modelo no es capaz de modelar.

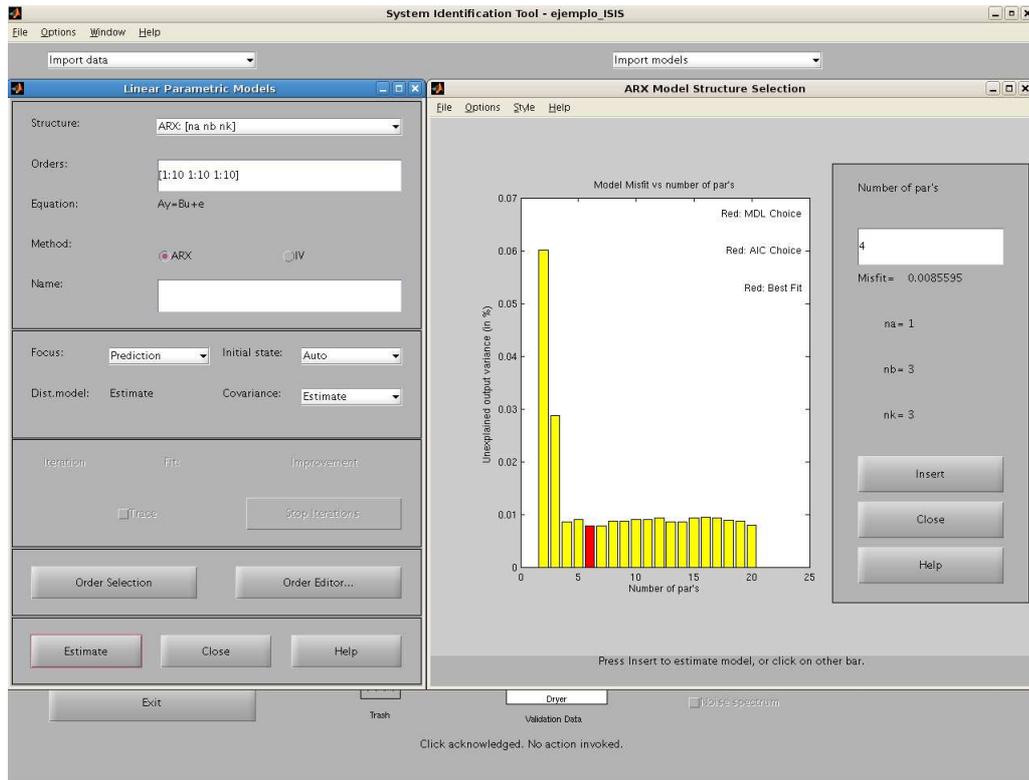


Figura 10.12: Ejemplo de la estimación de un modelo ARX usando la opción Order Selection.

Como regla general se selecciona aquel modelo que muestre la menor varianza con la menor cantidad de parámetros lo que coincide con el punto en que se curva la gráfica. Para el ejemplo dado, el mejor modelo sería aquel compuesto por cuatro parámetros ya que es el modelo de menor orden que muestra una disminución significativa en la varianza de la salida.

Para dicho modelo se tienen los siguientes órdenes de polinomios:  $n_a = 1$ ,  $n_b = 3$  y  $n_k = 3$ .

En la gráfica de la figura 10.12 también se muestra en rojo el mejor modelo de acuerdo a tres criterios que para este caso coinciden. Para el ejemplo dado, el modelo compuesto por 6 parámetros ( $n_a = 2$ ,  $n_b = 4$  y  $n_k = 2$ ) es el mejor modelo de acuerdo al criterio de ajuste FIT (más adelante se verá en que consiste) y de acuerdo a los criterios AIC (Akaike's Information Criterion) y MDL (Minimum Description Length) que son modelos que eligen aquel modelo (de todo el conjunto de modelos calculados-recordar que para este caso son mil-) compuesto por el vector de parámetros estimado  $\hat{\theta}$  que maximiza la función de densidad de probabilidad  $f(\theta; y^N)$  donde  $y^N$  son las observaciones obtenidas del sistema.

Si bien los criterios AIC y MDL se calculan de forma distinta ambos calculan es estimado de máxima verosimilitud ( $\theta_{MLE}$ ) del vector de incógnitas  $\theta$ . La diferencia radica en que el criterio AIC puede aplicarse a diferentes estructuras de modelos.

El criterio a aplicar cuando se utilicen estas herramientas es considerar como máximo un modelo de orden tres dado solamente se dispone de tres estados medibles en el sistema.

## 10.6 Herramientas de Validación.

La parte final del proceso de identificación consiste en la elección de la estructura del modelo que será utilizada, en el caso de este proyecto, a la hora del diseño del lazo de control por modo deslizante. En primer lugar debe tenerse en cuenta que más de un modelo puede ser estimado para la misma estructura para lo cual debe ser necesario definir qué evaluar y cómo hacerlo.

Los ensayos de validación no solo están orientados a determinar si un modelo es mejor que otro, sino también permiten dar una perspectiva de las virtudes y limitaciones del modelo elegido.

En Identificación de Sistemas, todas las herramientas de análisis están basadas en los datos de entrada y salida utilizados para la estimación del modelo y en los datos que se reservan para la validación del mismo y que en lo posible deben ser distintos ya que los ensayos de validación cuantifican *cuan bien el modelo es capaz de reproducir los datos reales*.

En el caso de la identificación del posicionador de antena se utilizó la mitad de los datos recolectados para la estimación y el restante para la validación.

### 10.6.1 Ajuste (FIT)

Es una de las herramientas básicas para el análisis de los modelos estimados y se basa en el análisis de los datos  $y[n]$  obtenidos del sistema real y de los datos  $\hat{y}[n|\mathbf{m}]$  donde  $\mathbf{m}$  se refiere a un elemento particular (un modelo) del conjunto de modelos posibles  $\mathcal{M}$  e  $\hat{y}$  son los datos de salida obtenidos a partir de dicho modelo. La entrada utilizada tanto para excitar el sistema real como el modelo es la misma y corresponde a los datos de entrada-salida considerados como datos de validación.

Lo anterior se muestra en la figura 10.13.

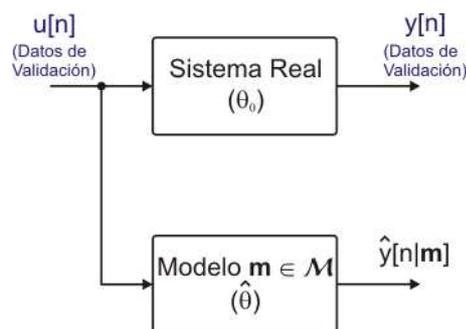


Figura 10.13: Esquema utilizado para validar el modelo estimado.

Si bien es posible analizar de forma visual ambas salidas, se puede definir un valor numérico que mida de forma normalizada la diferencia entre ambas señales durante una determinada cantidad de muestras (span). Se define entonces el siguiente índice:

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}[n|\mathbf{m}])^2 \quad (10.7)$$

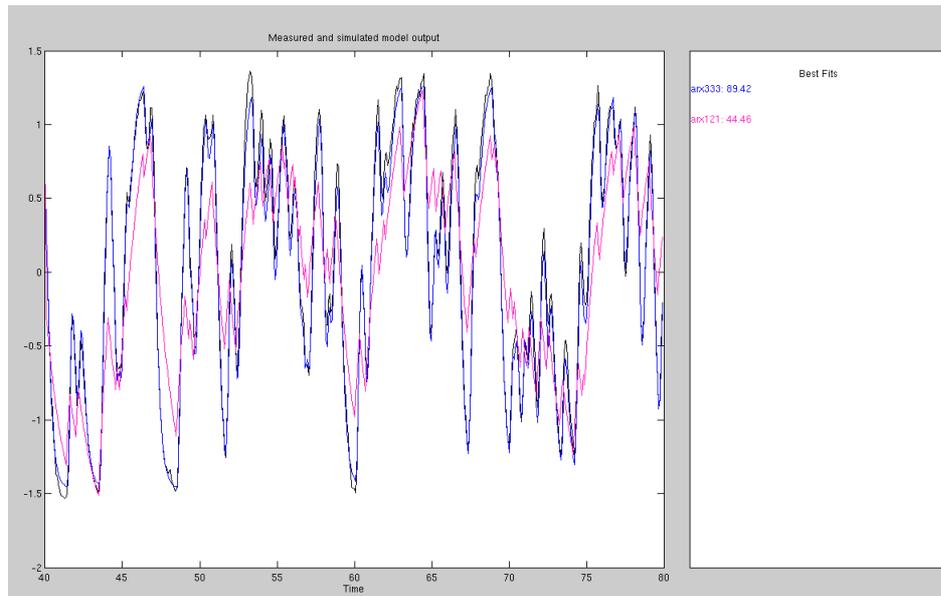


Figura 10.14: Validación de un modelo mediante el parámetro FIT.

que es la varianza muestral.

Con el objetivo de hallar una expresión normalizada se define el *coeficiente de correlación múltiple* (elevado al cuadrado) dado por:

$$R_y^2 = 1 - \frac{J(\mathbf{m})}{1/N \sum_{n=1}^N y^2[n]} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}[n|\mathbf{m}])^2}{\sum_{n=1}^N y^2[n]} \quad (10.8)$$

y que mide la proporción en que la variación total de la salida real  $y$  es explicada por el modelo.

En la práctica, el coeficiente de correlación múltiple se expresa en valores porcentuales y se remueven los valores medios de  $y$  e  $\hat{y}$ . De esta manera se define el coeficiente de ajuste FIT que, de acuerdo a la documentación del Toolbox de identificación se calcula de la siguiente forma:

$$FIT = \left( 1 - \frac{|y[n] - \hat{y}[n]|}{|y[n] - E(y[n])|} \right) \times 100\% \quad (10.9)$$

Por lo tanto, el modelo que presente el mayor valor del parámetro FIT será el mejor desde el punto de vista de la estructura del modelo.

En la figura 10.14 se muestra el resultado de la validación de dos modelos ARX estimados a partir de los datos del ejemplo 1.

La curva color negro corresponde a la salida real del sistema perteneciente al conjunto de datos de validación, mientras que las curvas azul y magenta a dos modelos ARX cuya estructura se detalla en la tabla 10.2.

Por lo tanto, desde el punto de vista del criterio FIT el modelo que mejor se ajusta es el modelo 1.

Cuadro 10.2: Parámetros de los modelos estimados cuya salida se muestra en la figura 10.14

| Parámetro | Modelo 1 (Azul) | Modelo 2 (Magenta) |
|-----------|-----------------|--------------------|
| $n_a$     | 3               | 1                  |
| $n_b$     | 3               | 2                  |
| $n_k$     | 3               | 1                  |
| FIT       | 89,42           | 44.46              |

### 10.6.2 Análisis de Residuos

Los residuos miden la diferencia entre el valor real medido y el calculado para un determinado conjunto de parámetros  $\hat{\theta}_N$  obtenido a partir de un número finito de muestras  $N$ . De esta forma, los residuos se definen como

$$\varepsilon(n) = \varepsilon(n, \hat{\theta}) = y[n] - \hat{y}[n|\hat{\theta}_N] \quad (10.10)$$

Puede observarse que si bien la ecuación anterior tiene la forma del error, en este caso se denominan residuos ya que cada muestra  $y[n]$  es comparada con  $\hat{y}[n|\hat{\theta}_N]$  que es una estimación de  $y[n]$  en base a un número finito de muestras y no su valor esperado.

De esta manera puede decirse que los residuos representan *aquella porción de los datos que el modelo no es capaz de reproducir* por lo que a partir de ellos pueden establecerse diferentes criterios para determinar la validez de un modelo.

#### Por qué se recurre al análisis de residuos

La limitación de calcular los residuos o el parámetro de ajuste FIT es que solamente se están comparando la salida del conjunto de datos  $Z^N$  con la salida del modelo sin considerar la entrada, es decir, los residuos calculados no dependen de una variable sujeta a cambios. Otro aspecto importante es que el modelo fue obtenido y validado a partir de un conjunto de datos  $Z^N$ , pero es deseable que el comportamiento deseado se verifique para cualquier conjunto de datos ya que en la realidad este será el caso. Es por lo anterior que se definen dos tipos de análisis:

1. La correlación entre los residuos y las entradas  $u[n]$ .
2. La correlación de los residuos entre sí.

los cuales se detallan a continuación.

#### Correlación entre Residuos y la Entrada al Sistema.

Para el análisis se consideran los residuos  $\varepsilon(t, \hat{\theta})$  y el conjunto de datos  $u[n]$  utilizados en para la validación del modelo estimado. La correlación entre los residuos y las entradas anteriores estará dada por:

$$\hat{R}_{\varepsilon u}^N[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon[n]u[n-k] \quad (10.11)$$

Si para cada  $k$ , el valor de la autocorrelación es pequeño (como criterio práctico se considera dentro de un determinado intervalo de confianza o) esto significa que los residuos a la salida no dependen de una señal de entrada específica, lo que los hace independientes de la señal  $u[n]$  aplicada al sistema. Otra forma de interpretar el resultado de la correlación es que, si existen rastros de entradas pasadas a la salida actual quiere decir que la dependencia del sistema real con respecto a las entradas pasadas no está siendo bien modelada por el modelo y que por lo tanto podría mejorarse.

En el caso especial de los valores correspondientes a  $k < 0$  puede significar que existe una realimentación intrínseca entre la entrada y la salida y no que el modelo es deficiente. En la figura 10.15 se muestra la correlación a la entrada para los modelos estimados en el ejemplo 1. En ella puede observarse que para el modelo de orden 3 la correlación entre la entrada y la salida se encuentra dentro del intervalo de confianza lo cual no sucede para el modelo de orden 2.

### Correlación entre Residuos.

La correlación entre residuos entre sí está dada por:

$$\hat{R}_{\varepsilon\varepsilon}^N[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon[n]\varepsilon[n-k] \quad (10.12)$$

la cual debe evaluarse para valores de  $k \neq 0$ . En caso que los valores no sean lo suficientemente pequeños (o estén fuera del intervalo de confianza) significa que los residuos  $\varepsilon[n]$  no pudieron ser correctamente predecidos por el modelo de manera que el modelo es deficiente y puede ser mejorado. En la figura 10.15 también se muestra el resultado de la autocorrelación de los residuos para los modelos del ejemplo.

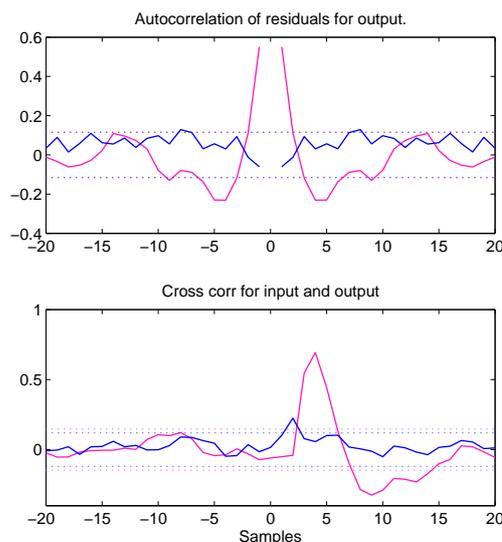


Figura 10.15: Análisis de Correlación para los modelos del ejemplo 1. Modelo 1 (orden: 3 - en azul). Modelo 2 (orden: 2- en magenta).

Por lo que se concluye que, a partir del análisis de residuos y del parámetro de ajuste FIT, para el ejemplo 1 el modelo elegido para representar matemáticamente el sistema que originó los datos de entrada-salida debería ser el modelo 1.

### 10.6.3 Respuesta en Frecuencia

Esta herramienta permite comparar la respuesta en frecuencia estimada por análisis espectral de los datos de entrada-salida con la respuesta en frecuencia del modelo estimado. En la figura 10.16 se muestra la respuesta en frecuencia calculada por análisis espectral y la respuesta en frecuencia de los modelos 1 y 2 del ejemplo que se están analizando.

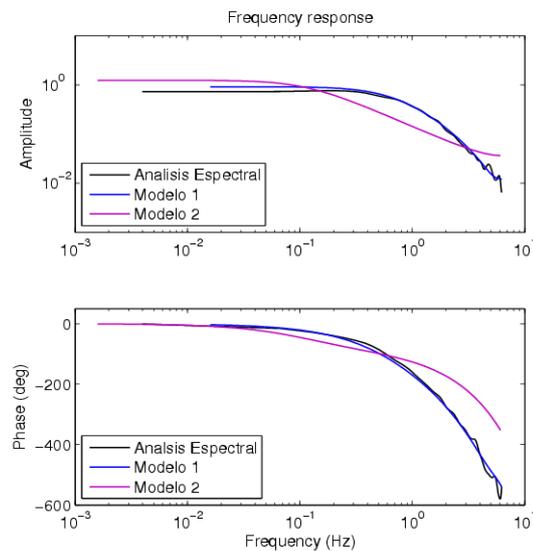


Figura 10.16: Comparación entre la respuesta en frecuencia obtenida por análisis espectral y los modelos estimados. Modelo 1 (azul). Modelo 2 (Magenta).

### 10.6.4 Respuesta Transitoria

Al igual que en el caso anterior, permite evaluar la respuesta transitoria del sistema estimada por análisis de correlación con la respuesta transitoria del modelo estimado. Al igual que en el caso anterior en la figura 10.17 se muestra la respuesta al escaló estimada por análisis de correlación y la respuesta de los modelos 1 y 2.

### 10.6.5 Polos y Ceros

Esta herramienta, además de permitir observar donde se ubican los polos y ceros del modelo estimado permite además ver si el modelo estimado está sobredimensionado o no lo cual es evidente si hay cancelaciones de polos y ceros. En la figura 10.18 se muestra el diagrama de polos y ceros para los dos modelos del ejemplo considerados hasta ahora y un nuevo modelo cuyos parámetros se ajustaron para tener un numerador y un denominador de orden 10.

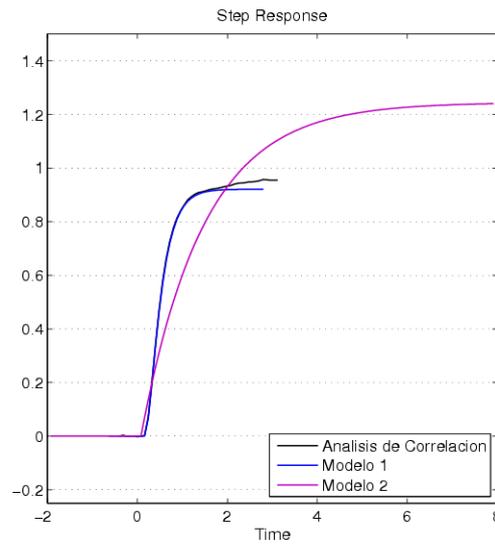


Figura 10.17: Comparación entre la respuesta al escalón obtenida por análisis de correlación y los modelos estimados. Modelo 1 (azul). Modelo 2 (Magenta).

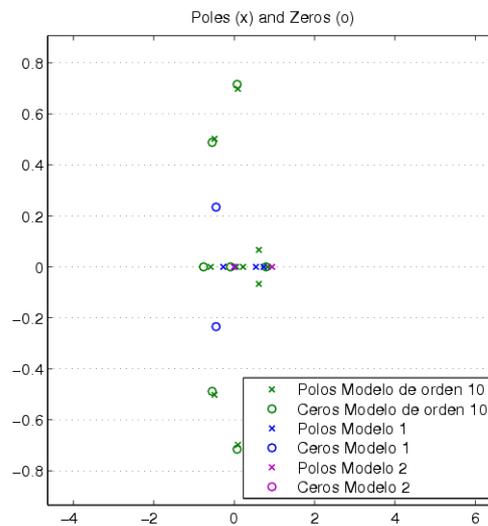


Figura 10.18: Ubicación de los polos y ceros de los modelos estimados. Observar la cancelación de polos y ceros. Modelo 1 (Azul). Modelo 2 (Magenta). Modelo de orden 10 (Verde).

En la figura anterior se puede observar la cancelación de polos y ceros del nuevo modelo al ser redundantes.

## 10.7 Estimación del Modelo del Posicionador de Antena: Procedimiento. Resultados Obtenidos.

Definidas las todas las herramientas utilizadas en el proceso de identificación del posicionador de antena Scientific Atlanta para el sentido de movimiento en Azimut se procede a mostrar los resultados obtenidos. En las secciones siguientes se muestran los pasos seguidos para llegar al modelo de estados del posicionador.

La primer parte está destinada a seguir obteniendo la mayor información posible del sistema mediante la obtención de un modelo de proceso, un modelo tipo ARX y un modelo de estados con parámetros libres, mientras que la parte final está destinada a la estimación de los parámetros del modelo de estados propuesto y verificar su validez.

Si bien la totalidad de modelos estimados fue grande, en las secciones siguientes se muestran solamente aquellos modelos que lograron los mejores resultados en la etapa de validación.

## 10.8 Modelo de Proceso del Posicionador.

En el caso de la estimación del modelo de proceso se utilizaron los juegos de señales de entrada-salida sin preprocesamiento ya que el la herramienta de estimación de modelos de procesos contempla el integrador y la opción U-Level recomendada para estos casos.

El mejor modelo obtenido a partir de los criterios de validación vistos en la sección 10.6 correspondientes a la estructura de función transferencia (10.5) se muestran en en cuadro 10.3.

Cuadro 10.3: Parámetros estimados para el modelo de proceso del posicionador de antena.

| Parámetro | Valor   |
|-----------|---------|
| $T_{p1}$  | 0.00297 |
| $T_{p2}$  | 0.09113 |
| $T_d$     | 0       |
| $K$       | 8.9123  |
| FIT       | 95.21 % |

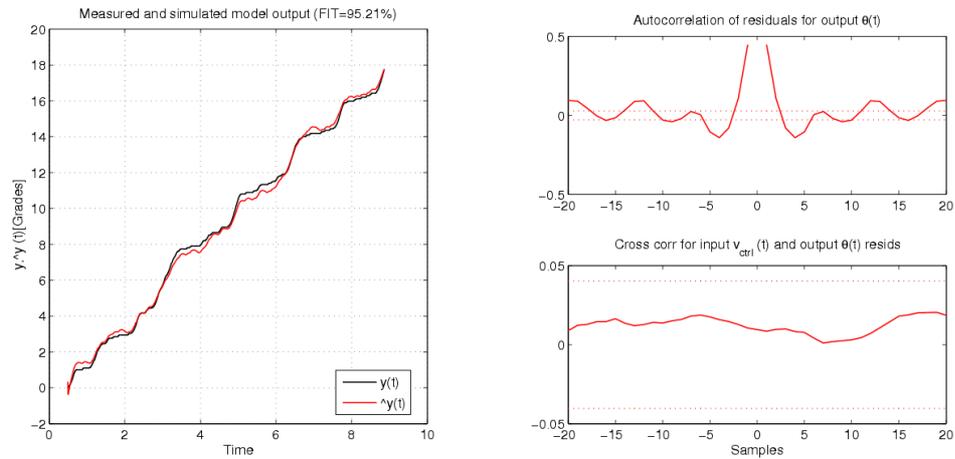
De los parámetros anteriores se tiene que la función transferencia estimada correspondiente al modelo ampliado para el movimiento en azimut del posicionador de antena está dada por <sup>2</sup>:

$$T_{amp}(s) = \frac{32867,18}{s(s + 336,7)(S + 11)} \quad (10.13)$$

En la figura 10.19 se muestran los resultados del análisis de validación del modelo.

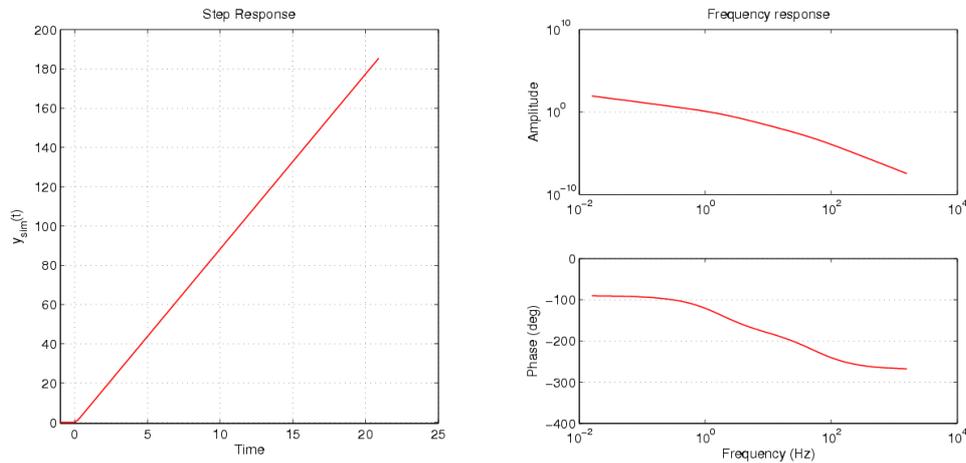
En la figura 10.19(a) se observa la respuesta real del sistema  $y(t)$  vs. la respuesta del modelo estimado  $\hat{y}(t)$  para la misma entrada. Observar el parecido entre ambas lo cual se verifica con un alto valor del parámetro de ajuste FIT (98,25 %).

<sup>2</sup>Recordar que en modelo ampliado se incluye la etapa de potencia



(a) Salida sistema real vs. salida modelo

(b) Análisis de residuos.



(c) Modelo Estimado: Respuesta al escalón. (d) Modelo Estimado: Respuesta en frecuencia.

Figura 10.19: Validación del modelo de proceso del posicionador de antena.

En la figura 10.19(b) se muestra el resultado del análisis de residuos junto con los límites de los intervalos de confianza al 99%. Se puede observar que si bien el análisis de correlación entre la entrada y la salida es aceptable ya que la gráfica se mantiene dentro de los límites del intervalo de confianza, no ocurre lo mismo para la autocorrelación de los residuos para todos los valores de retardo. Esto último puede interpretarse como una limitación del modelo dada la estructura utilizada lo cual es coincidente con las suposiciones previas realizadas a partir de las conclusiones de los experimentos previos sobre el posicionador dado que se sospechaba que el orden del sistema es mayor que tres.

En las figuras 10.19(c) y 10.19(d) se observan la respuesta al escalón y la respuesta en frecuencia del sistema estimado.

De éste análisis se destaca que:

1. Una primera estimación de la función transferencia del modelo ampliado del posi-

cionador está dada por la ecuación (10.13):

$$T_{amp}(s) = \frac{32867,18}{s(s + 336,7)(S + 11)}. \quad (10.14)$$

2. Modelando la etapa de potencia como una ganancia lineal  $G_{pwr} = 110$ , entonces la transferencia del posicionador para el sentido de movimiento en azimut estará dada por:

$$T_{pos}(s) = \frac{298,79}{s(s + 336,7)(S + 11)}. \quad (10.15)$$

3. Los polos del sistema de orden 3 se espera estén en el orden de  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -11$  y  $s_3 = -336,7$ . Esto deberá ser consistente con el modelo de estados obtenido.
4. A partir del análisis de residuos el modelo de orden tres es un **modelo de orden reducido del posicionador** (esto se verificará más adelante).

## 10.9 Estimación de Modelos Paramétricos Lineales.

Los lineamientos de trabajo propuestos en el Capítulo 7 se repiten en el cuadro 10.4.

Cuadro 10.4: Tareas propuestas para la estimación del modelo de estados del posicionador de antena.

|  | Procedimiento 1       | Procedimiento 2  | Procedimiento 3  |
|--|-----------------------|--|--|
| Modelo a estimar/Verificar                 | Función Transferencia | Modelo de Estados  | Modelo de Estados  |
| Utiliza Modelo preestablecido (Ready-made) | SI. Modelo: ARX       | SI Modelo: Modelo de estados general (Sin fijar valores de las matrices A y B) | NO   |
| Utiliza Modelo propuesto (Tailor-made)     | NO                    | NO   | SI. Modelo: Modelo de estados propuesto en el Capítulo 4.  |
| Orden del modelo                           | 3 y 5                 | 3 y 5  | 3  |
| Algoritmo de Identificación a utilizar     | PEM                   | PEM y N4SID  | PEM (El SIT no soporta N4SID para modelos preestablecidos) |

Al igual que con el modelo de proceso, los dos primeros pasos se utilizaron a modo de verificación y obtención de información sobre el sistema.

Si bien se estimaron numerosos modelos dada la cantidad de juegos de de datos de entrada-salida, en las secciones siguientes se mostrarán solamente aquellos modelos que se consideraron mejores aplicando los criterios de los tests de validación.

Para la estimación de los modelos se utilizaron las señales preprocesadas. A modo de reseña, es importante recalcar que

- *El experimento más informativo fue el experimento número dos.*

### Estimación del Modelo ARX

En esta sección se estimaran los modelos ARX de orden 3 y 5 a partir de los datos de entrada-salida obtenidos en los experimentos de identificación. Si bien para la estimación se utilizaron los cuatro juegos de señales de entrada-salida con el objetivo de verificar que los mejores resultados se obtuvieron para los datos correspondientes a los datos del experimento 2, de manera que aquí solo se mostraran los modelos obtenidos a partir de la utilización de dicho juego de datos entrada-salida.

Dado que el modelo ARX está dado por la siguiente estructura:

$$A[q]y[n] = B[q]u[n - n_k] + e[n] \quad (10.16)$$

la cual no contempla en su estructura la existencia de un integrador, entonces se utilizaran las señales preprocesadas vistas en el sección 10.3.

Haciendo uso de la herramienta “Order Selection” se estimaron todos los posibles modelos para el siguiente rango de parámetros:  $\{1 : 10; 1 : 10; 1 : 40\}$ . (Recordar que el valor medido de  $n_k$  en muestras es  $n_k = 33$ ).

La gráfica resultante se muestra en la figura 10.20 donde se puede observar que:

- El porcentaje de la varianza que no puede ser explicada por el modelo es relativamente alto.
- No existen diferencias entre modelos de orden alto y bajo.

De esta manera es posible predecir que tanto el modelo de orden 3 como el modelo de orden 5 tendrán algunas limitaciones.

Los órdenes de los polinomios que definen los modelos de orden 3 y 5 estimados se muestran en el cuadro 10.5 donde también se muestra el valor del parámetro FIT resultante.

Cuadro 10.5: Órdenes de los polinomios de los modelos ARX estimados, retardo y FIT.

| Orden | 3     | 5      |
|-------|-------|--------|
| $n_a$ | 3     | 5      |
| $n_b$ | 1     | 5      |
| $n_k$ | 34    | 34     |
| FIT   | 39.9% | 39.22% |

Las propiedades y la validez de cada modelo se analizarán por separado en las siguientes secciones.

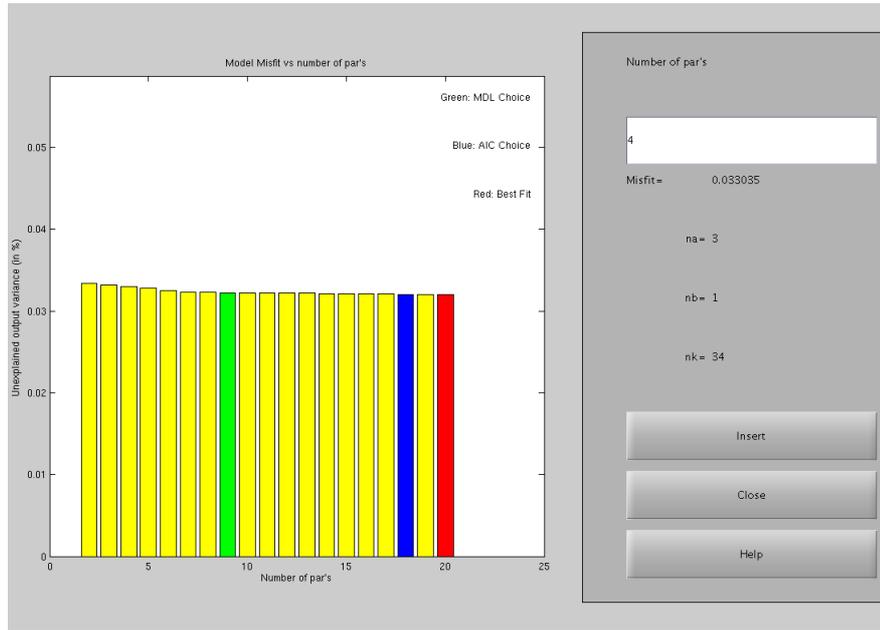


Figura 10.20: Posibles combinaciones de modelos ARX

### Análisis del Modelo ARX de Orden 3

El modelo de orden 3 caracterizado por los polinomios de orden  $n_a$ ,  $n_b$  y retardo  $n_k$  que toman los valores  $\{3; 1; 34\}$  respectivamente está caracterizado por los siguientes polinomios:

$$A[q] = 1 - 0,9195q^{-1} - 0,0006104q^{-2} - 0,07998q^{-3} \quad (10.17)$$

$$B[q] = 0,003444q^{-34} \quad (10.18)$$

cuyo equivalente continuo en el dominio de Laplace tendrá la siguiente estructura:

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) + C(s)E(s) \quad (10.19)$$

y que para este caso los polinomios están dados por:

$$A(s) = s^3 + 2526s^2 + 4,532 \times 10^{06}s - 5,575 \times 10^{05} \quad (10.20)$$

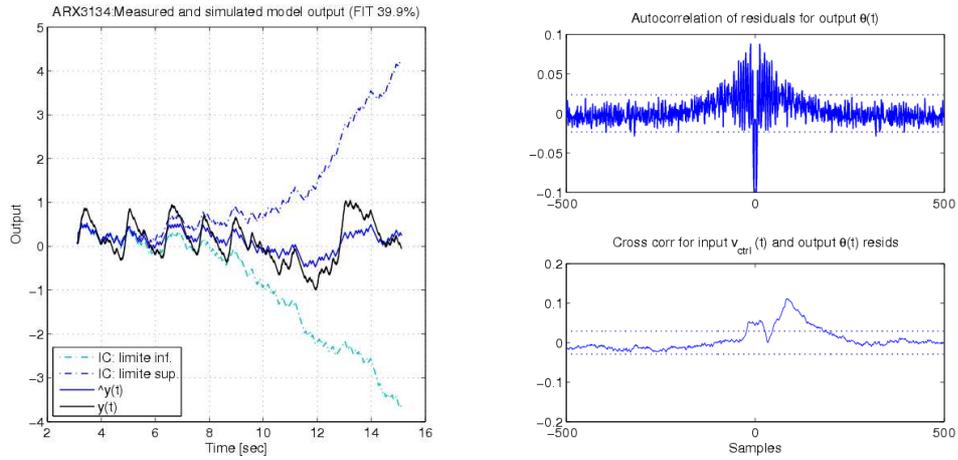
$$B(s) = 2,744s^2 + 1,028 \times 10^{04}s + 1,345 \times 10^{07} \quad (10.21)$$

$$C(s) = s^3 + 3536s^2 + 6,891 \times 10^{06}s + 3,905 \times 10^{09} \quad (10.22)$$

Del análisis de la función transferencia continua se desprende que los polos del sistema están ubicados en:  $s = 0,1$  y  $s = -1263 \pm j1713$ .

De acuerdo a lo anterior, el modelo presentaría un polo muy próximo al origen y dos polos complejos conjugados contradiciendo esto último a las conclusiones de los ensayos previos realizados sobre el sistema real y al modelo de proceso estimado.

Otras limitaciones del modelo se muestran en la figura 10.21 donde se muestra la salida simulada del sistema vs. la salida real (recordar que las señales fueron preprocesadas) y el análisis de residuos donde se pueden observar los límites del intervalo de confianza al 99%.



(a) Salida sistema real vs. salida modelo ARX de orden 3

(b) Análisis de residuos.

Figura 10.21: Comparación de la salida real con la simulada y análisis de residuos del modelo ARX de orden 3

En la figura 10.21 se evidencian otros defectos además de un parámetro de ajuste relativamente bajo. En la figura 10.21(a) se observa que los límites del intervalo de confianza al 99% toman valores muy grandes e inclusive el apartamiento con respecto a la curva real  $y(t)$  es muy significativo. En el análisis de residuos, para algunas muestras se aparta del intervalo de confianza aunque la mayoría del tiempo se mantiene dentro del mismo.

La razón de este comportamiento se atribuye a que el orden del modelo es bajo, por lo tanto, de acuerdo a lo predecido se procedió a estimar un modelo de orden 5.

### Análisis del Modelo ARX de Orden 5

El modelo de orden 5 (obtenido también mediante la herramienta “order selection”) está caracterizado por los órdenes  $\{5; 1; 34\}$  que dan lugar a los polinomios con los siguientes parámetros estimados:

$$A[q] = 1 - 0,9049q^{-1} - 0,0007229q^{-2} - 9,508 \times 10^{-06}q^{-3} - 0,005612q^{-4} - 0,08897q^{-5} \quad (10.23)$$

$$B[q] = 0,004066q^{-34} \quad (10.24)$$

y al igual que para el modelo anterior, su equivalente continuo en el dominio de Laplace dado por:

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) + C(s)E(s) \quad (10.25)$$

estará caracterizado por los siguientes polinomios:

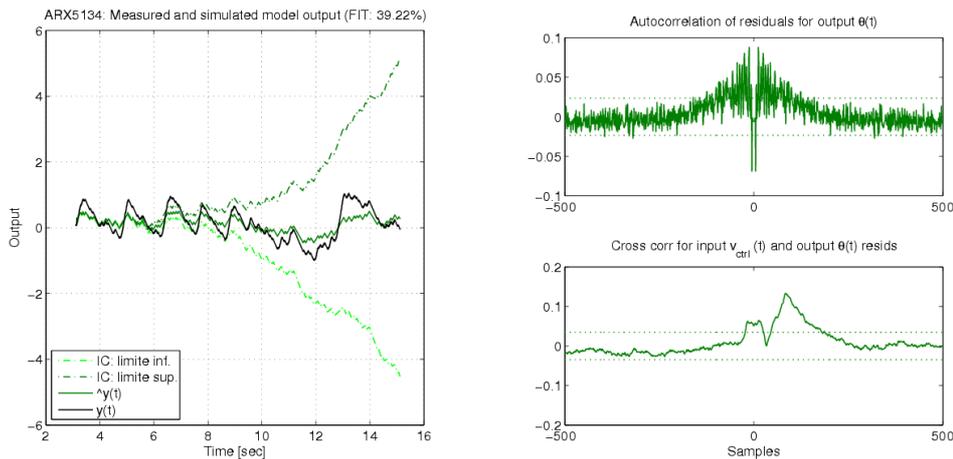
$$A(s) = s^5 + 2419s^4 + 9,003 \times 10^{06}s^3 + 8,361 \times 10^{09}s^2 + 7,73 \times 10^{12}s - 1,262 \times 10^{12} \quad (10.26)$$

$$B(s) = 2,786s^4 + 1,183 \times 10^{04}s^3 + 3,074 \times 10^{07}s^2 + 4,015 \times 10^{10}s + 2,289 \times 10^{13} \quad (10.27)$$

$$C(s) = s^5 + 3460s^4 + 1,123 \times 10^{07}s^3 + 1,66 \times 10^{10}s^2 + 1,551 \times 10^{13}s + 5,629 \times 10^{15} \quad (10.28)$$

Cuyos polos (raíces de  $A(s)$ ) están ubicados en :  $s_1 = 0,2$ ,  $s_{2,3} = -528 \pm j969$  y  $s_{4,5} = -618 \pm j2425$  donde se repite el caso anterior ya que los polos estimados se contradicen con las mediciones realizadas.

Al igual que en el caso anterior, en la figura 10.22 se muestra la salida simulada del sistema vs. la salida real y el análisis de residuos junto con los intervalos del confianza al 99%.



(a) Salida sistema real vs. salida modelo ARX de orden 5.

(b) Análisis de residuos.

Figura 10.22: Comparación de la salida real con la simulada y análisis de residuos del modelo ARX de orden 5

Dado que los mismos inconvenientes aparecen cuando se aumenta el orden, se concluye que el modelo ARX no es lo suficientemente completo para estimar el modelo del posicionador, principalmente, por la existencia del integrador en el sistema real. Como alternativa se recurrió a estimar un modelo Box-Jenkins (BJ) cuya justificación se verá en el punto siguiente.

### Estimación de un Modelo Box-Jenkins (BJ)

Si se recuerda del Capítulo 7.13.4, la estructura general de un modelo BJ es la siguiente:

$$y[n] = \frac{B[q]}{F[q]}u[n - n_k] + \frac{C[q]}{D[q]}e[n]. \quad (10.29)$$

Una práctica común cuando se sabe que la estructura del modelo dada por  $\frac{B[q]}{F[q]}$  no es suficiente para modelar todos los efectos dinámicos, como por ejemplo el efecto de un integrador, entonces se procede a que dichos efectos sean modelados por el modelo de ruido dado por  $\frac{C[q]}{D[q]}$  aprovechando, en un primer paso, la estructura del modelo Box-Jenkins como paso previo a estructuras más complejas (como modelos ARIMAX).

En el caso del modelo BJ es necesario ahora definir los cuatro parámetros  $n_b$ ,  $n_c$ ,  $n_d$  y  $n_f$  para definir los órdenes de los polinomios del modelo además del retardo entre la entrada y la salida  $n_k$ . Lo valores utilizados fueron:

- $n_b = 1$ . Se supone que el sistema no tiene ceros.
- $n_c = 1$ . No se modelan ceros en el modelo de ruido.
- $n_f = 2$ . Suponiendo un sistema de orden 3, al hacer que el estado integral sea modelado por el modelo de ruido solamente se estimaron dos polos del sistema.
- $n_d = 3$ . Como práctica general, el orden del modelo de ruido se toma un mayor que el orden del modelo de la transferencia del sistema.
- $n_k = 33$ . El retardo se ajustó tomando como referencia el retardo estimado para el mejor ajuste obtenido para los modelos ARX.

El objetivo será entonces tratar de verificar que los polos del sistema son reales como se obtuvo en el modelo de proceso y no complejos como se concluiría si solamente se hubieran estimado los modelos ARX.

El modelo BJ discreto estimado utilizando el algoritmo PEM está caracterizado por los siguientes polinomios:

$$B(q) = 1,652 \times 10^{-05} q^{-33} \quad (10.30)$$

$$C(q) = 1 - 0,7685q^{-1} \quad (10.31)$$

$$D(q) = 1 - 1,758q^{-1} + 0,7626q^{-2} - 0,004313q^{-3} \quad (10.32)$$

$$F(q) = 1 - 1,997q^{-1} + 0,9972q^{-2} \quad (10.33)$$

Al igual que para los modelos ARX, es posible hallar el equivalente continuo es cual tendrá la siguiente estructura:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{F(s)}U(s) + \frac{C(s)}{D(s)}E(s) \quad (10.34)$$

y cuyos polinomios están dados por:

$$B(s) = 0,00827s + 16,55 \quad (10.35)$$

$$C(s) = s^3 + 6443s^2 + 6,881 \times 10^6 s + 1,381 \times 10^9 \quad (10.36)$$

$$D(s) = s^3 + 5446s^2 + 1,468 \times 10^6 s + 3,422 \times 10^6 \quad (10.37)$$

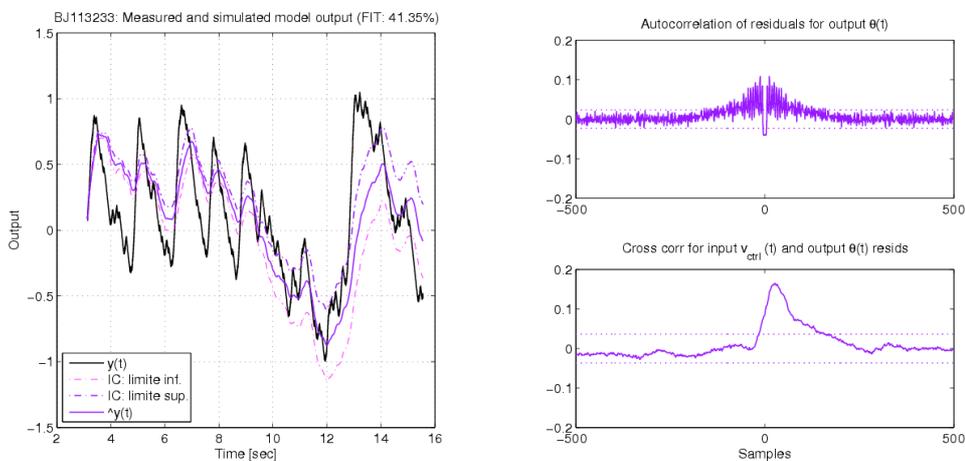
$$F(s) = s^2 + 2,845s + 0,04938 \quad (10.38)$$

A partir de donde se tiene que los polos de la transferencia entre la entrada y la salida son las raíces del polinomio  $D(s)$  y del modelo de ruido son las raíces del polinomio  $F(s)$ . Por lo tanto se tiene que:

- Polos de la transferencia entrada-salida  $Y(s)/U(s)$ :  $s_1 = -0,0175$ ,  $s_2 = -2,8278$
- polos modelo de ruido:  $s_{n1} = -5161,9$ ,  $s_{n2} = -281,1$ ,  $s_{n3} = -2,4$

En la figura 10.23(a) se puede observar que el ajuste obtenido es levemente mejor al parámetro obtenido para los modelos ARX. El rasgo más importante es que el límite de los intervalos del confianza al 99 % ya no se apartan significativamente de la curva  $y(t)$  contrario al caso de los modelos ARX estimados.

En la figura 10.23(b) se observa que el intervalo de muestras en que la gráfica del análisis de residuos permanece dentro de los intervalos de confianza es levemente mayor al de los modelos ARX mientras que la salida sigue presentando dependencia con respecto a la entrada.



(a) Modelo BJ: Salida sistema real vs. salida modelo

(b) Análisis de residuos.

Figura 10.23: Comparación de la salida real con la simulada y análisis de residuos del modelo Box-Jenkins. Observar el apartamiento de los límites del intervalo de confianza de las señales  $y(t)$  e  $\hat{y}(t)$ .

Por lo tanto, del análisis del modelo BJ si bien la mejora con respecto a los parámetros de ajuste o el análisis de residuos no fue significativa, se concluye que a partir que la estructura del modelo BJ es más completa se pudo verificar el orden de los polos obtenidos en la estimación del modelo de procesos.

Con respecto a la utilización de los modelos ARX y BJ, la misma queda descartada ya que se pretende implementar una realimentación de estados. Además, se sabe que la estructura del modelo está limitada al no considerar los efectos del integrador.

En las secciones siguientes se tratarán los resultados de la estimación del modelo de estados del posicionador de antena.

### 10.9.1 Estimación del Modelo de Estados del Posicionador. Parte 1: Modelos Ready-Made

La estimación del modelo de estados se dividió en dos partes de acuerdo al esquema de trabajo propuesto. En la primera parte se estimaron dos modelos de orden 3 y 5 con

estructura preestablecida o Ready-Made, es decir, se dejó al algoritmo la libertad de estimar todos los parámetros del modelo mientras que en la segunda parte se estimó un modelo definido arbitrariamente o “Tailor-Made” tomando las estructuras de modelo de orden 3 vistas en el capítulo 9.

Cabe aclarar que si bien en el esquema de trabajo se proponía utilizar PEM y N4SID para la estimación de los modelos preestablecidos, los resultados obtenidos utilizando PEM fueron deficientes ya sea en lo que respecta al parámetro FIT (menor al 10%) o como en el análisis de residuos (las señales permanecen fuera de los intervalos de confianza durante todo el intervalo considerado) lo cual se atribuye a la incapacidad del predictor utilizado en el cálculo para modelar los efectos del integrador. De esta manera, solo se justifica presentar los resultados obtenidos utilizando el algoritmo N4SID que lleva a cabo la estimación mediante técnicas de subespacios de estados.

En el caso de los modelos definidos por el usuario, el Toolbox de Identificación de Sistemas (SIT) solo permite ajustar los modelos utilizando PEM.

### Modelo de Estados Ready-Made de Orden 3

Si bien de los análisis del modelo de proceso y de los modelos ARX y BJ es de esperar que el modelo de orden 3 no represente toda la dinámica del sistema, el interés en seguir obteniendo información a partir de modelos del mismo orden radica en que solamente se pueden medir directamente tres estados del posicionador de antena lo cual condiciona, al menos en esta primera etapa, a utilizar un modelo de orden tres cuyos estados sean los estados del modelo propuesto en capítulo 9 (corriente de armadura  $i_a(t)$ , velocidad de giro del motor DC  $\omega_m(t)$  y posición angular del posicionador  $\theta_p(t)$ ).

El modelo de estados discreto estimado se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,56184 & 0,020624 & 0,0026201 \\ 0,21989 & 0,97354 & -0,0005171 \\ 0,0072256 & -0,0046404 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0018883 \\ -0,00032949 \\ -1,83 \times 10^{-6} \end{bmatrix} u_{ctrl}[k] \quad (10.39)$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} -0,25658 & 0,54368 & 61,919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix}$$

en el cual puede observarse que los estados se asignan como  $x_i[k]$  ya que, si se observan los coeficientes de cada una de las matrices poco se corresponden con los coeficientes del modelo propuesto discreto del posicionador, principalmente para aquellos coeficientes que componen las matrices  $B_d$  y  $C_d$ .

Utilizando la función de Matlab `d2c()` para transformar el modelo a su equivalente

continuo se tiene el siguiente modelo continuo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -581,5 & 27,62 & 3,465 \\ 294,4 & -30,18 & -0,9501 \\ 10,29 & -4,824 & -0,01635 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -0,2441 \\ -0,3041 \\ -1,559 \times 10^{-3} \end{bmatrix} u[k] \end{aligned} \quad (10.40)$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} -0,25658 & 0,54368 & 61,919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

donde también se observa que aquellos parámetros cuyo valor es conocido a “*a priori*” para el modelo cuyos estados son  $i_a(t)$ ,  $\omega_m(t)$  y  $\theta_p(t)$  no se verifican en el modelo estimado continuo.

Por lo tanto, si bien no puede negarse que el modelo estimado representa con cierto grado de aproximación al sistema real, como se verificará más adelante, el mismo no sería aplicable en la práctica si la realimentación de estados se quisiera implementar estrictamente en base a la realimentación de los estados medibles<sup>3</sup>.

Lo que si interesa determinar es la dinámica del sistema para poder contrastarla con el modelo “Tailor Made” estimado y que se detalla en la sección 10.9.2, es decir, **si ambos modelos son válidos por más que los estados utilizados para describir cada modelo sean distintos las propiedades del modelo deberían mantenerse ya que el sistema real sobre el se está trabajando no cambia.**

En el caso del modelo del posicionador es de interés determinar la ubicación de los polos para determinar el grado de validez de las matrices  $A$  y  $B$ .

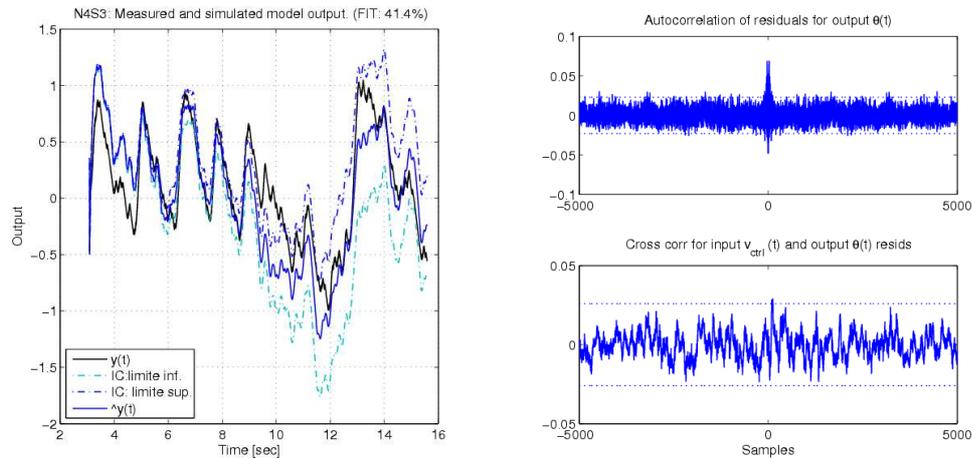
Para el sistema continuo los polos del modelo estimado de orden 3 son:

- $s_1 = -0,1728$ .
- $s_2 = -15,57$ .
- $s_3 = -595,92$ .

En la figura 10.24 se observa la respuesta del modelo a los datos de validación y el resultado del análisis de residuos. Si bien se esperaría un valor del parámetro de ajuste FIT mayor al 50% resulta interesante observar los límites del intervalos de confianza al 99% de la señal  $\hat{y}(t)$  en la figura 10.24(a) donde se observa que la respuesta del sistema real  $y(t)$  se encuentra dentro de dichos límites. En la figura 10.24(b) se muestran el análisis de residuos y de correlación entre la entrada y la salida donde se puede ver que los residuos se encuentran dentro de los límites de los intervalos de confianza al 99% y lo mismo ocurre con la correlación entre la entrada y la salida lo que asegura que el modelo responda de igual manera a excitaciones distintas ya que es independiente de las mismas.

De análisis anterior se puede considerar que, desde el punto de vista de obtener un modelo dinámico, el modelo preestablecido de orden 3 es aceptable a los efectos de analizar

<sup>3</sup>Recordar que en caso de querer realimentar un estado no medible es necesario implementar un observador de estados lo cual agrega complejidad al diseño del lazo de control.



(a) Modelo SS de orden 3: Salida sistema real vs. salida modelo (b) Modelo SS de orden 3: Análisis de residuos.

Figura 10.24: Validación del modelo de estados preestablecido de orden 3.

la dinámica del posicionador de antena. De la ubicación de los polos del modelo se verifica que, suponiendo que el polo cercano al origen es un intento de aproximar el integrador, el sistema posee un polo dominante en el orden de los  $10\text{rads/seg}$  y otro alejado a más de una década asociado a la parte eléctrica medido en los ensayos previos sobre el sistema real.

Otro aspecto interesante es que el modelo de orden 3 estima tres polos reales lo cual coincide con el modelo de estados propuesto en el capítulo 9.

En la sección 9.2.3 se hizo referencia a que la respuesta del sistema no estaba enteramente dominada por el polo asociado a la parte mecánica y fue una de las incógnitas planteadas para resolver mediante la identificación del sistema.

Del análisis del modelo de estados de orden 3 se concluye que si bien es un modelo válido existe aún dinámica del sistema que el modelo no es capaz de mostrar de manera que es deseable verificar si dicha dinámica es de carácter dominante, es decir, se encuentra en el orden de magnitud del polo mecánico. Con este objetivo se amplió el modelo de estados a un modelo de orden 5. Los resultados se resumen en la sección siguiente.

## Modelo de Estados Ready-Made de Orden 5

El objetivo de esta sección es determinar si existen polos que no son modelados por el modelo de orden 3. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior se estimó un modelo de orden 5 dando como resultado el siguiente modelo discreto:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{1[k+1]} \\ x_{2[k+1]} \\ x_{3[k+1]} \\ x_{4[k+1]} \\ x_{5[k+1]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,59714 & 0,52811 & -0,090271 & 0,0095975 & -1,3799 \times 10^{-4} \\ -0,75404 & 0,048447 & -0,4438 & 0,21259 & 0,0011465 \\ -0,0377741 & 0,65623 & 0,63093 & 0,018134 & 0,002387 \\ -0,15768 & -0,11349 & -0,17008 & 0,97565 & -3,66 \times 10^{-4} \\ -3,638 \times 10^{-3} & -4,397 \times 10^{-3} & 5,797 \times 10^{-3} & -4,563 \times 10^{-3} & 1 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 5,82 \times 10^{-4} \\ 3,69 \times 10^{-4} \\ -3,158 \times 10^{-4} \\ -3,523 \times 10^{-4} \\ -3,829 \times 10^{-6} \end{bmatrix} u[k] \\
 y[k] &= [ 0,15957 \quad -0,10324 \quad -0,25658 \quad 0,54368 \quad 61,919 ] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \\ x_5[k] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

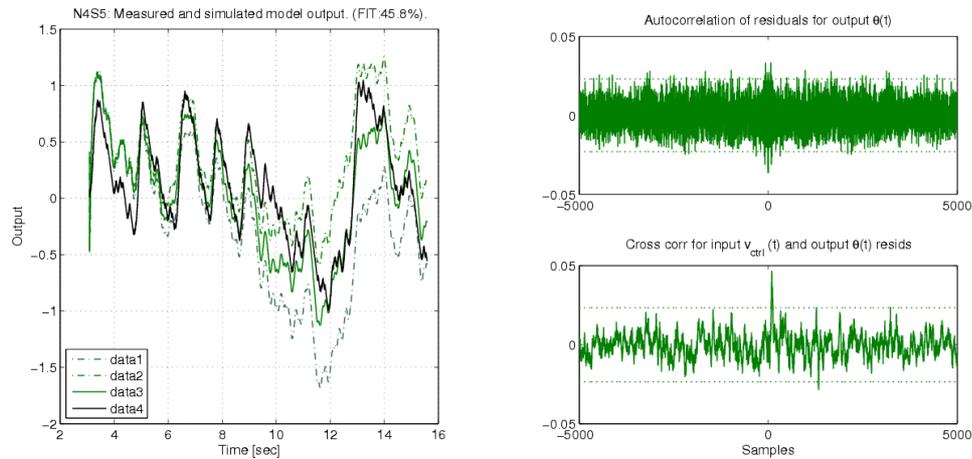
cuyo equivalente continuo está dado por:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -155,8 & 688,8 & 87,3 & 1,204 & -0,7206 \\ -897,5 & -56,07 & -567,4 & 29,92 & 1,714 \\ 347,3 & 772,5 & -204 & 8,998 & 2,151 \\ -258,4 & -119,6 & 163,6 & -23,49 & -0,5188 \\ -7,789 & -5,35 & 5,596 & -4,567 & -0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0,4492 \\ 0,7052 \\ 0,558 \\ -0,2755 \\ -0,002 \end{bmatrix} u(t) \\
 y[k] &= [ 0,15957 \quad -0,10324 \quad -0,25658 \quad 0,54368 \quad 61,919 ] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.42}$$

Antes de analizar la ubicación de los polos resulta interesante analizar los parámetros de validez del modelo mostrados en la figura 10.25. En la figura 10.25(a) se muestra la respuesta del sistema a los datos de validación de donde se desprende un valor de ajuste del 45.8 % superior al modelo de orden 3. El análisis de correlación no muestra diferencias lo que da a suponer que el sistema presenta aún más propiedades no modeladas o que aquello que no se puede modelar es ruido o no linealidades no consideradas en la estructura de modelo propuesta.

Analizando los autovalores de matriz A estimada se tiene la siguiente ubicación de polos:

- $s_1 = 0,2$



(a) Modelo SS de orden 5: Salida sistema real vs. salida modelo (b) Modelo SS de orden 5: Análisis de residuos.

Figura 10.25: Validación del modelo de estados preestablecido de orden 5. Observar incremento en el parámetro FIT y la disminución en el nivel de la autocorrelación de los residuos.

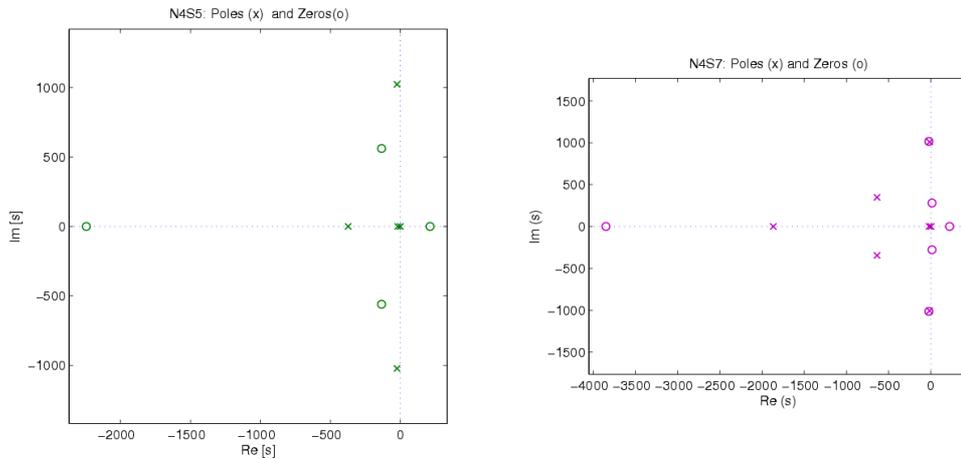
- $s_2 = -18$
- $s_3 = -373,1$
- $s_{4,5} = -24,1 \pm j1023$

De donde se observa que se tiene:

- Un polo real cercano al origen.
- Dos polos reales cuyo orden de magnitud es cercano a los polos de los modelos de proceso, ARX y del modelo de estados de orden 3 estimado.
- Un par de polos complejos conjugados cuya parte real es del orden del polo asociado a la parte mecánica.

La respuesta al interrogante si en realidad el modelo del posicionador es de mayor orden puede obtenerse estimando un modelo de mayor orden y verificar la cancelación de polos y ceros. En la figura 10.26 se muestran la ubicación de los polos y ceros del sistema de orden 5 que se está analizando y un sistema de orden 7 estimado bajo las mismas condiciones. Para el sistema de orden 5 (figura 10.26(a)) se observa que no existe cancelación de polos y ceros por lo que el sistema no posee estados redundantes mientras que para el modelo de orden 7 (figura 10.26(b)) se produce la cancelación de polos y ceros cercanos al eje  $Re(s) = 0$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>También se estimó un modelo de orden 6, pero además de no presentar cancelaciones entre polos y ceros el nuevo polo identificado posee un módulo mayor que el polo eléctrico de manera que no influye a la salida del sistema.



(a) Modelo SS de orden 5: Polos y ceros. (b) Modelo SS de orden 7: Polos y ceros.

Figura 10.26: Cancelación de polos al pasar de un sistema de orden 5 a un sistema de orden 7.

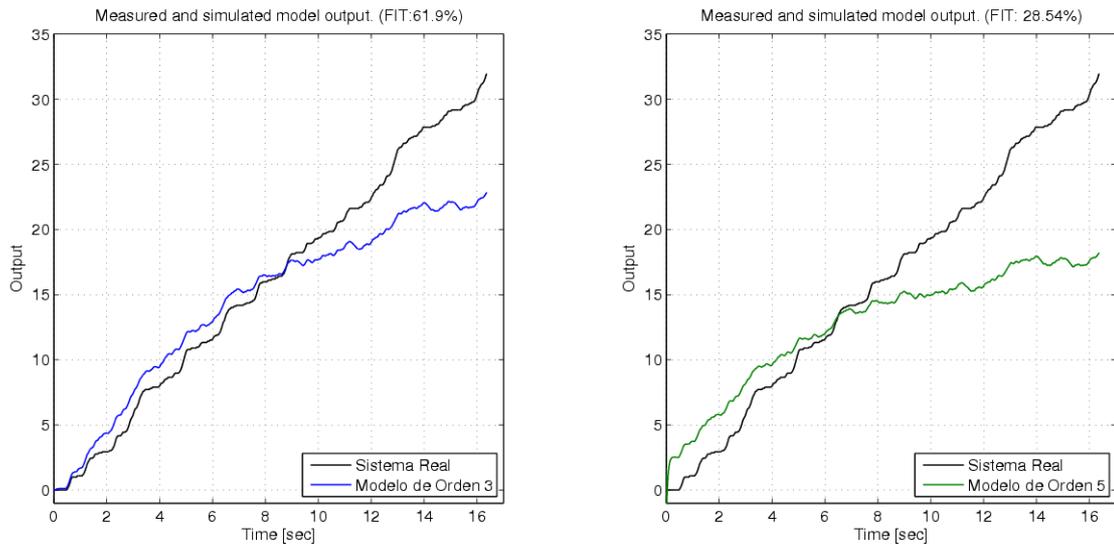
Por lo tanto, se concluye que aumentar el orden del modelo no aportaría más información sobre el sistema y si se quisiera estimar un mejor modelo debería incluirse, por ejemplo, no linealidades pero esto se encuentra fuera del alcance de este proyecto.

A modo de demostración de las limitaciones de los modelos preestablecidos, en la figura 10.27 se muestra la respuesta a la señal 2 sin preprocesamiento (detrending) de los sistemas de orden 3 y 5 estimados, por lo que en la señal de salida real se encuentra contenida toda la información almacenada por el integrador que ambos modelos deberían reproducir.

Como es evidente, en la figura 10.27 ninguno de los dos modelos es capaz de reproducir fielmente la señal a medida que transcurre el tiempo. La razón de esto se debe a que en ambos casos el integrador está modelado como un polo cercano al origen lo que da lugar a dos sistemas estables dominados por un único polo de forma que su respuesta será una exponencial creciente. En la figura 10.28 se muestra simulación de la respuesta al escalón para ambos sistemas verificando lo anteriormente dicho.

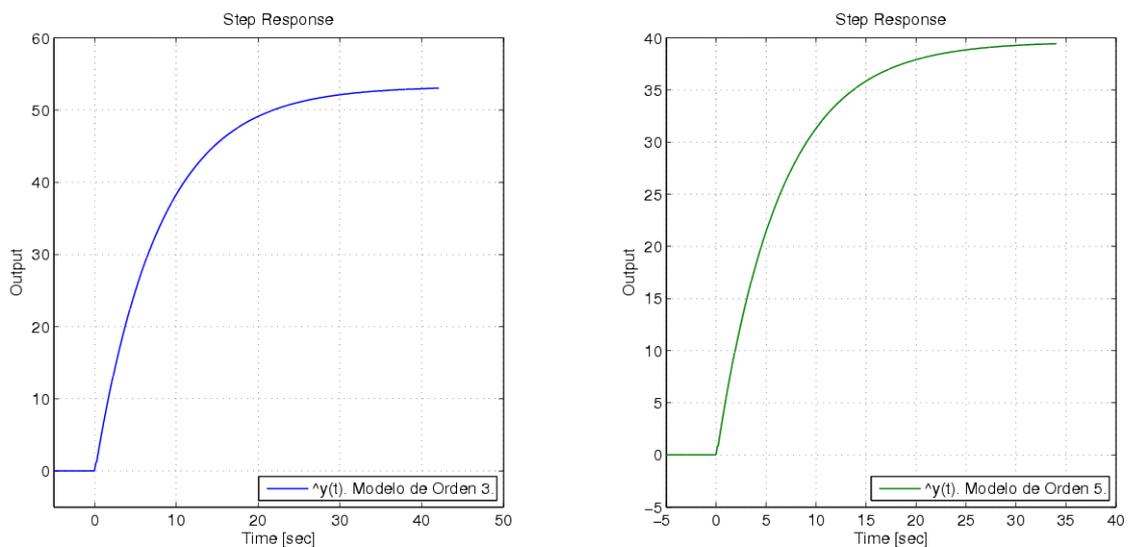
De esta forma se concluye que:

- Los modelos de estado ready-made son incapaces de modelar correctamente el integrador en el sistema.
- La ubicación de los polos reales es consistente con lo estimado y medido hasta ahora de manera que el modelo propuesto deberá verificar esta condición.
- El modelo de orden 3 es un modelo reducido del posicionador ya que se verificó que lo correcto sería utilizar un modelo de orden 7 pero está fuera del alcance de este proyecto.
- Deberá utilizarse un modelo del tipo Tailor-Made cuyos estados sean los estados medibles del posicionador y además deberá modelar los efectos del integrador a la salida.



(a) Modelo SS de orden 3: Salida del sistema real vs. Salida del modelo. (b) Modelo SS de orden 5: Salida del sistema real vs. Salida del modelo.

Figura 10.27: Respuesta de los sistemas de orden 3 y 5 estimados a los datos de validación del experimento de identificación sin preprocesamiento (Experimento 2).



(a) Modelo SS de orden 3: Respuesta al escalón. (b) Modelo SS de orden 5: Respuesta al escalón.

Figura 10.28: Simulación de la respuesta al escalón de los modelos estimados de orden 3 y 5. Observar que la respuesta corresponde no corresponde a un sistema con un estado integral.

### 10.9.2 Estimación del Modelo de Estados. Parte 2: Modelo de Estructura Definida por el Usuario (Tailor-Made)

El modelo del posicionador de antena para el movimiento en azimut propuesto en la sección 9.2 basado en los parámetros físicos del mismo y considerando la electrónica de

potencia se repite a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ra/La & -Kb/La & 0 \\ Ki/Jeq & -Beq/Jeq & 0 \\ 0 & 1/R_{AZ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{pwr}/La \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{ctrl} \quad (10.43)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

en cual se denominó “modelo ampliado” y cuya estructura paramétrica se expresó como:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{ctrl} \quad (10.44)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_p \end{bmatrix}$$

obteniéndose **un modelo cuyos estados son los estados medibles en forma directa** del posicionador y a partir del cual quedan definidos que parámetros deben estimarse y cuales no.

A sabiendas que el proceso de identificación se lleva a cabo en el dominio de tiempo discreto se obtuvo, para una frecuencia de muestreo de 1 milisegundo un modelo equivalente discreto cuya estructura paramétrica se muestra en (10.45)

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} a_{D11} & a_{D12} & 0 \\ a_{D21} & a_{D22} & 0 \\ a_{D31} & a_{D32} & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} b_{D11} \\ b_{D21} \\ b_{D31} \end{bmatrix} u[k] \quad (10.45)$$

$$y[k] = [0 \ 0 \ 1] x[k]$$

y donde cada uno de los elementos de la matriz depende del valor que tomen los parámetros del modelo continuo (10.44).

Una vez obtenida la estructura paramétrica, se asignó un valor a cada parámetro basándose en sistemas similares conocidos o en base a los experimentos sencillos basados en respuestas al escalón realizados (ver sección 9.2)

Como punto de partida para llevar a cabo la estimación de aquellos parámetros desconocidos o cuyo valor se quiere ajustar se procedió a definir un objeto en Matlab capaz de ser utilizado con el Toolbox de Identificación utilizando la función `idgrey()`.

### Estimación del Modelo de Estados Utilizando el Modelo Paramétrico Discreto.

En primer lugar se definió el modelo paramétrico **discreto** en el archivo `pos_idgrey_discreto.m` de la siguiente forma:

```
%Archivo que define la estructura paramétrica del modelo de estados
%discreto aproximado del modelo ampliado del posicionador de antena.
function [A,B,C,D,K,x0] = pos_idgrey_discreto(par,T,aux)
```

```
A=[par(1) par(2) 0;par(3) par(4) 0;par(5) par(6) 1];
B=[0.166858 ;0.067035; 2.47998e-8];
C=[0 0 1];
D=[0];
K=[par(7);par(8);par(9)];
x0=[0;0;0];
```

donde `par()` es un vector que indica a la función `idgrey()` que parámetros deben estimarse y sobre los cuales pueden definirse valores iniciales.

El objeto que contiene el modelo se definió utilizando la función `idgrey()`. La síntesis de la función fue la siguiente:

```
md=idgrey('pos_idgrey_discreto',[0.713956 -0.00125859 0.286834
0.999186 1.0611e-7 6.9974e-7 0.166858 0.067035 2.47998e-8 0 0 0],
'd',0.001,[],'estimate');
```

donde se observa que los valores iniciales definidos son aquellos del modelos aproximado de la sección 9.2.

Una vez definido el objeto que contiene el modelo el mismo se ajustó mediante el algoritmo PEM utilizando como señales de entrada-salida las señales correspondientes al experimento número 2 preprocesadas ( $u_{2nm}[n], y_{2d}[n]$ ).

El modelo discreto resultante para un tiempo de muestreo  $T_s = 1mseg$  fue el siguiente:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,91317 & -0,030429 & 0 \\ 0,3758 & 1,0194 & 0 \\ 2,1297 \times 10^{-6} & -2,793 \times 10^{-8} & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0,14639 \\ -0,082532 \\ 1,8785 \times 10^{-7} \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] &= [0 \ 0 \ 1] x[k] \end{aligned} \quad (10.46)$$

con un parámetro de ajuste del 37%.

Ya que lo que interesa es el modelo continuo del posicionador se transformó al tiempo de continuo mediante la función `d2c()` obteniéndose el siguiente modelo de estados continuo.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -84,51 & -31,39 & 2,068 \times 10^{-9} \\ 387,7 & 25,09 & 7,491 \times 10^{-18} \\ 0,0022 & 2,209 \times 10^{-6} & -1,11 \times 10^{-13} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 151,2 \times 10^5 \\ -110,1 \\ 2,35 \times 10^{-5} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 0 \ 1] x(t) \end{aligned} \quad (10.47)$$

Comparando las matrices del modelo continuo resultante y del modelo propuesto (modelo (10.43)) se observa que:

**Matriz A:** Si bien los parámetros de la tercer columna pueden considerarse nulos, el parámetro  $a_{22}$  estimado carece de sentido físico al ser mayor que cero ya que, para la estructura propuesta dicho parámetro está dado por  $-B_{eq}/J_{eq}$  y se sabe que el coeficiente de roce  $B_{eq}$  y el momento de inercia  $J_{eq}$  son ambos mayores que cero, de manera que el parámetro  $a_{22}$  debería ser negativo si se pretende que los estados del modelo sean  $i_a(t)$ ,  $\omega_m(t)$  y  $\theta_p(t)$ .

El otro parámetro en conflicto con la estructura propuesta es el parámetro  $a_{31}$  que si bien es menor que 1, no es lo suficientemente pequeño como para suponerse nulo.

**Matriz B:** La diferencia entre la matriz B del modelo estimado y la matriz B del modelo propuesto (10.43) es evidente, ya que los elementos que deberían ser nulos distan bastante de serlo.

Por lo tanto, el interrogante a resolver es: es un modelo válido del posicionador? La respuesta es que si dependiendo del grado de aceptabilidad que se pretenda y con la salvedad que los estados del modelo estimado NO son los estados medibles del sistema real (corriente de armadura  $i_a(t)$ , velocidad angular del motor DC  $\omega_m(t)$  y la posición en azimut  $\theta_p(t)$ ) sino que pueden ser estados que sean combinación lineal de los mismos y que deben medirse en otros puntos del sistema o ser observados.

Del análisis del modelo estimado se desprende que la ubicación de los polos es:  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -16,64$  y  $s_3 = -90,38$  consistente con el esquema de tres polos reales para el modelo de orden 3 con un polo en el origen y un polo en el rango de los  $15\text{rads/seg}$  que domina la respuesta del sistema.

Por lo tanto, si bien el modelo obtenido a partir del modelo discreto no puede aplicarse en forma directa en la práctica, podría por ejemplo, se un modelo a utilizarse en simulaciones.

Debido a las limitaciones mostradas es que se utilizó otra forma de encarar el problema de obtener el modelo Tailor-Made del posicionador. Esto se verá en la sección siguiente.

### Estimación del Modelo Utilizando el Modelo Paramétrico Continuo.

La documentación de Matlab indica que en el pasaje del modelo discreto a continuo mediante la función `d2c()` puede que exista más de una solución, es decir, exista más de una estructura de modelo continuo que verifique el mismo modelo discreto. Una manera alternativa que ofrece para mantener los estados del sistema original que se pretende estimar (como lo es en este caso) es especificar mediante la misma función `idgrey()` la estructura del modelo continuo y dejar que la función se encargue del pasaje de continuo a discreto (para llevar a cabo el ajuste de parámetros) y viceversa.

De esta manera se definió el modelo paramétrico **continuo** (10.43) en un archivo `.m` (`pos_idgrey_continuo.m`) cuyo código se muestra a continuación.

```
%Archivo que define la estructura paramétrica del modelo de estados
%continuo aproximado del modelo ampliado del posicionador de antena.
function [A,B,C,D,K,x0] = pos_idgrey_continuo(par,T,aux)

%Pruebo con el mejor modelo obtenido
A=[-336.7 par(1) 0;par(2) par(3) 0;0 par(4) 0];
B=[par(5);0;0];
C=[0 0 1];
D=[0];
K=[par(6);par(7);par(8)];
x0=[0;0;0];
```

donde se observa que se dejó fijo el parámetros  $a_{11} = -L_a/R_a$  ya que su valor se determinó experimentalmente.

Al igual que para el caso continuo se definió el objeto `mc` que será importado en el SIT. El objeto se generó mediante la función `idgrey()` especificando como valores iniciales de cada parámetro los valores calculados para el modelo continuo aproximado calculado en la sección 9.2. La síntesis de la función fue la siguiente:

```
mc=idgrey('pos_idgrey_continuo',[-1.4831 338 -0.5897
0.0007 1236.4 0 0 0], 'c', [], 'estimate');
```

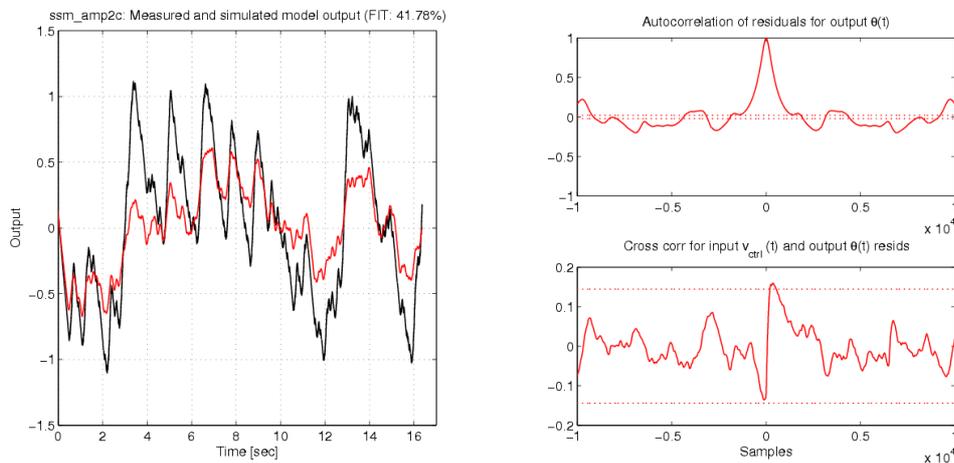
Al igual que en el caso anterior, el objeto se importó en la GUI de Toolbox de identificación el cual también soporta modelos continuos.

El modelo resultante fue el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -336,7 & -9,1888 & 0 \\ 332,94 & -9,0604 & 0 \\ 0 & 0,0554 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [ 0 \ 0 \ 1 ] x(t) \end{aligned} \quad (10.48)$$

y es un modelo que en principio responde a la estructura propuesta.

Una vez obtenido el modelo se procedió a analizar su validez. La respuesta del modelo a los datos de validación se muestra en la figura 10.29(a) a partir de la cual se tiene un parámetro de ajuste FIT del 41.78% similar al obtenido para los modelos ready-made. El resultado del análisis de residuos se muestra en la figura 10.29(b) para un intervalo de confianza del 99%.



(a) Modelo Taylor-Made: Salida sistema real vs. salida modelo (b) Modelo Taylor-Made: Análisis de residuos.

Figura 10.29: Validación del modelo Taylor-Made de orden 3 del posicionador de antena. Observar el incremento del lóbulo principal en la autocorrelación de los residuos comparado con los modelos estimados previamente.

En la figura anterior se observa la primera consecuencia de establecer una estructura arbitraria al modelo: los residuos ya no son tan independientes entre sí como para los modelos de orden 3 y 5 cuyos parámetros se ajustaban libremente. En la figura 10.29(b)

se observa que la autocorrelación de los residuos abandona el intervalo de confianza para determinados valores de retardo y que en ancho del lóbulo principal es mucho mayor que para los modelos anteriormente estimados.

Con respecto a la correlación entre la entrada y los residuos la respuesta es satisfactoria ya que en todo momento permanece dentro de los límites del intervalo de confianza, lo que asegura que el modelo es independiente de la señal de entrada que se aplique.

**Análisis de los polos y ceros del modelo estimado:** Debido a que el objetivo de todo el trabajo realizado hasta ahora fue obtener información del sistema para que el modelo estimado, a partir de la estructura de modelo propuesta, describa en forma correcta al sistema real es de mucha importancia analizar la ubicación de los polos y ceros que determinan la respuesta dinámica del mismo.

El modelo (10.48) no presenta ceros, mientras que los polos se encuentran ubicados en:

1.  $s_1 = 0$  y es el polo asociado al integrador.
2.  $s_2 = -18,7 \text{rads/seg}$
3.  $s_3 = -328 \text{rads/seg}$

cuyos órdenes de magnitud se verifican con los órdenes de magnitud de los polos de los modelos de orden 3 estimados previamente.

A modo de verificación se calculó la respuesta del modelo al juego de datos de entrada-salida sin preprocesamiento y la respuesta al escalón del modelo. Esto se muestra en la figura 10.30 donde, a diferencia de los modelos de estados preestablecidos estimados, el efecto del integrador permite al sistema reproducir la salida real.

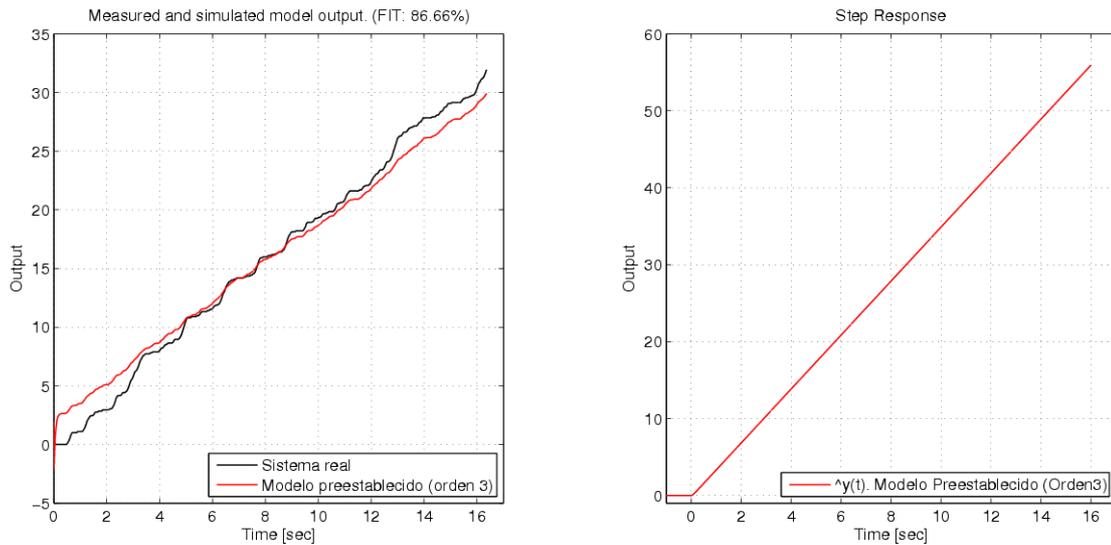
La ubicación de los polos del sistema junto con la respuesta en frecuencia muestran en la figura 10.31. Observar la característica pasa-bajos del sistema con una ancho de banda de 3dB de aproximadamente 60Hz.

Se concluye entonces que el modelo Tailor-Made de orden 3 cuyos estados, se supone, son los estados medibles del posicionador (ya que se obtuvo a partir del modelo a partir del estudio teórico) es consistente con los modelos estimados previamente donde no se condicionaba a utilizar una determinada estructura de modelo y que por lo tanto puede ser utilizado para el diseño del lazo de control.

## 10.10 Modelo de Estados del Posicionador de Antena para el Movimiento en Azimut.

Como resultado del proceso de identificación llevado a cabo en los capítulos 9 y 10 el modelo de estados obtenido del posicionador de antena (para el movimiento en azimut) es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -336,7 & -9,1888 & 0 \\ 332,94 & -9,0604 & 0 \\ 0 & 0,0554 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [ 0 \ 0 \ 1 ] x(t) \end{aligned} \quad (10.49)$$



(a) Respuesta del modelo a los datos de validación (b) Simulación de la respuesta al escalón del modelo.

Figura 10.30: Respuesta del modelo Tailor-Made de orden 3 a la señal de entrada utilizada en el experimento 2 y simulación de la respuesta al escalón del modelo. Observar que reproduce correctamente el efecto del integrador a la salida.

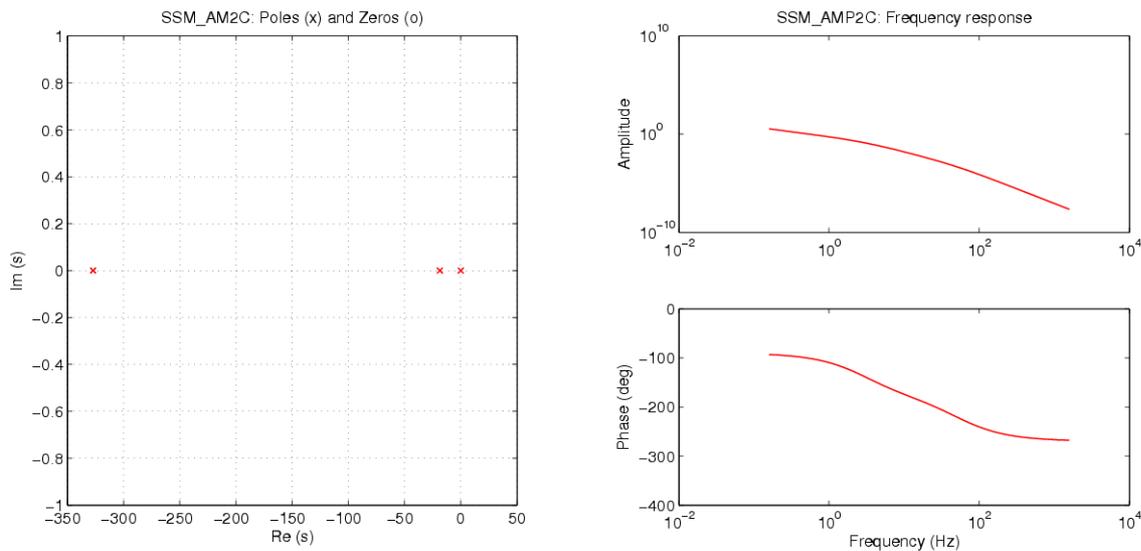
Si bien la evolución de la salida del sistema coincidente con el estado  $x_3(t)$  del modelo (10.49) es conocida dado que se pretende considerar cada uno de los estados del modelo como las variables medibles del posicionador, resulta entonces interesante analizar la evolución del resto de los estados del modelo para contrastarlos con las mediciones realizadas en los ensayos previos. Para esto se simuló el modelo estimado en Simulink utilizando el siguiente diagrama en bloques:

La respuesta al escalón de los estados  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  se muestran en la figura 10.33 (la respuesta del estado  $x_3(t)$  es la salida  $y(t)$  del sistema mostrada en la figura 10.30(b)).

De acuerdo a la estructura propuesta del modelo del sistema real se tiene las siguientes correspondencias:

1. El estado  $x_1(t)$  se corresponde con la corriente de armadura  $i_a(t)$  (medida en Amperes).
2. El estado  $x_2(t)$  es la velocidad angular del eje del motor DC dada por  $\omega_m(t)$  (medida en *radianes/segundo*).
3. El estado  $x_3(t)$  corresponde a la posición angular  $\theta_p(t)$  medida en grados por lo que elemento  $a_{32}$  no solo contempla la reducción del sistema mecánico, sino también el pasaje de radianes a grados de manera que se espera que el valor de  $1/R_{AZ}$  sea distinto a 0.007.

En la figura 10.33(a) se tiene que si bien la respuesta dinámica de lo que sería la corriente de armadura del sistema es acorde a la respuesta obtenida en las medidas directas, el valor que toma en estado estacionario (1.8 unidades) supera ampliamente los



(a) Ubicación de los polos en el plano s.

(b) Respuesta en frecuencia del modelo.

Figura 10.31: Ubicación de los polos y ceros en el plano s y respuesta en frecuencia del modelo Tailor-Made de orden 3 estimado.

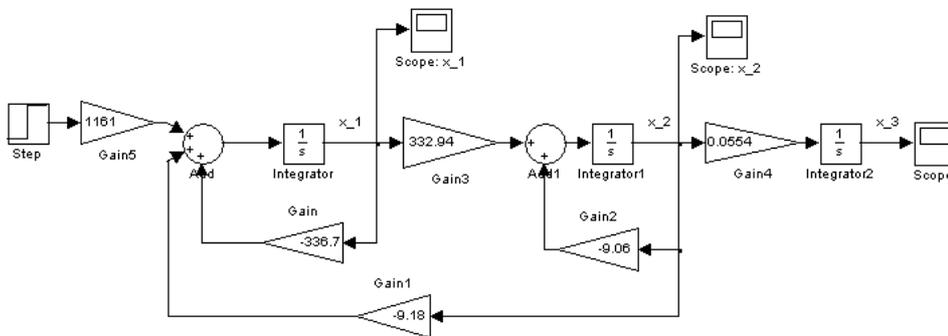
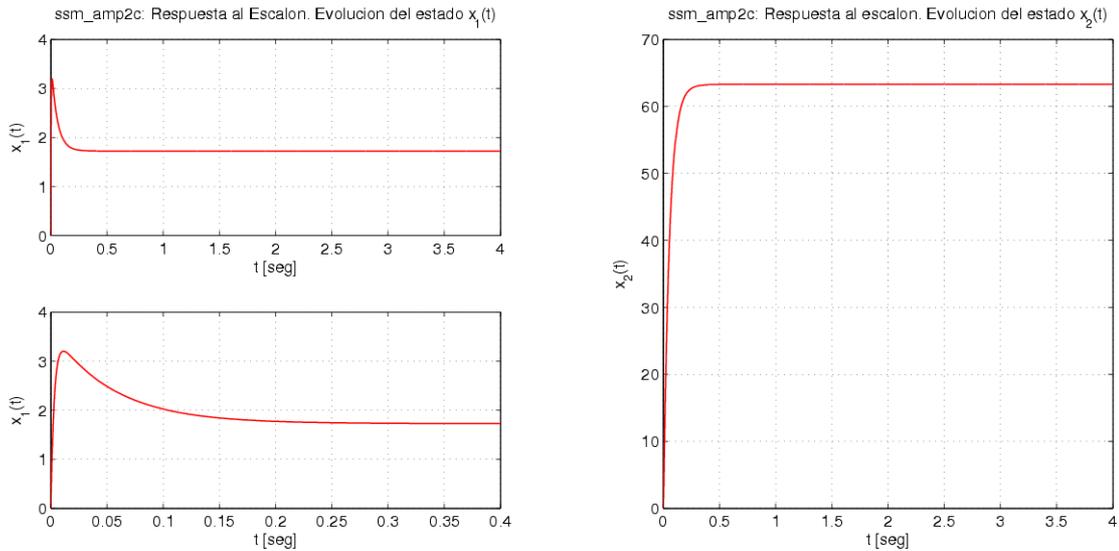


Figura 10.32: Diagrama en bloques utilizado para simular el modelo estimado en Simulink

0,2Amp medidos en la sección 9.2.2 mientras que en el caso del estado  $x_2(t)$ , si éste representa la velocidad angular en  $rads/seg$ , entonces según el modelo en estado estacionario el motor DC alcanzaría una velocidad de giro de  $60rads/seg$  o lo que es lo mismo  $572rpm$  en contraste con los  $1800rpm$  también medidos en la sección 9.2.2.

Ahora, que los estados evolucionen de manera distinta pero la salida del sistema siga siendo la misma podría ser producto que los estados  $x_i(t)$  efectivamente son estados del sistema pero que no son los estados medibles del posicionador, es decir, corresponde a otro juego de variables de estado. Si bien la anterior podría ser una suposición correcta debe recordarse que los estados del modelo (10.49) se encuentran condicionados a ser los estados medibles por la estructura de modelo propuesta de manera que la diferencia en la evolución de los estados se atribuirá a incertidumbres en los parámetros estimados.

En el caso del modelo que se está analizando se observa que la respuesta dinámica del



(a) Respuesta el escalón del estado  $x_1(t)$ .

(b) Respuesta el escalón del estado  $x_2(t)$ .

Figura 10.33: Respuesta al escalón de los estados del modelo Taylor-Made de orden 3 estimado.

sistema se encuentra bien representada no siendo lo mismo para el caso de la respuesta estática. Esto se supone se debe a efectos de polarización (“Bias”) en los parámetros estimados o que algoritmo de estimación permanece en un mínimo local pero no absoluto de la función de pérdidas.

Para resolver este problema se recurrió a estimar un nuevo modelo basándose en el obtenido pero ajustando los parámetros con incertidumbre uno por uno y aplicando técnicas de filtrado del error de predicción con la herramienta “filter” del menú de estimación de modelos paramétricos del SIT con el objetivo de mejorar el ajuste en baja frecuencia (para más información ver [17] y [19]). Para la estimación se utilizaron los mismos datos de entrada-salida que para el modelo anterior.

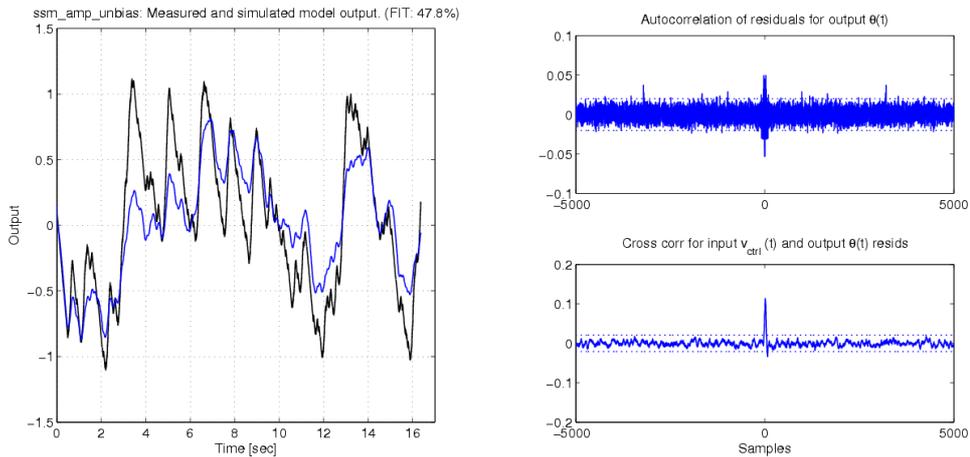
El nuevo modelo estimado obtenido se muestra en la ecuación (10.50)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -336,7 & -9,18 & 0 \\ 332,94 & -0,23 & 0 \\ 0 & 0,039 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [ 0 \ 0 \ 1 ] x(t) \end{aligned} \quad (10.50)$$

y que consiste en una versión sin bias del modelo Taylor-Made (10.49) estimado en la sección anterior.

Como era de esperar, el nuevo modelo de estados se sometió a los mismos análisis de validación con el objetivo de verificar que se mantenga la respuesta dinámica del sistema. En la figura 10.34(a) se muestra la respuesta del modelo a los datos de validación (recordar que se utilizaron los datos de validación con detrending) donde se observa que el valor del parámetro de ajuste FIT es del 47.8 % (contra un 41.78 % del modelo original). A su vez, en el resultado del análisis de residuos (ver figura 10.34(b)) se puede observar una significativa mejora ya que la función de autocorrelación de los residuos permanece

para todo el intervalo dentro de los límites del intervalo de confianza al 99% con una significativa disminución del lóbulo principal. En el caso de la correlación entre la entrada y la salida si bien se produce un apartamiento del intervalo de confianza, el mismo se produce para retardos positivos el nivel pico alcanzado sigue siendo menor que para el primer modelo estimado.



(a) Modelo Tailor-Made con reducción de Bias: Salida sistema real vs. salida modelo (b) Modelo Tailor-Made con reducción de Bias: Análisis de residuos.

Figura 10.34: Modelo Tailor-Made de orden 3 del posicionador de antena con reducción de “bias” en los parámetros estimados . Observar la mejora en el parámetro de ajuste y en el análisis residuos.

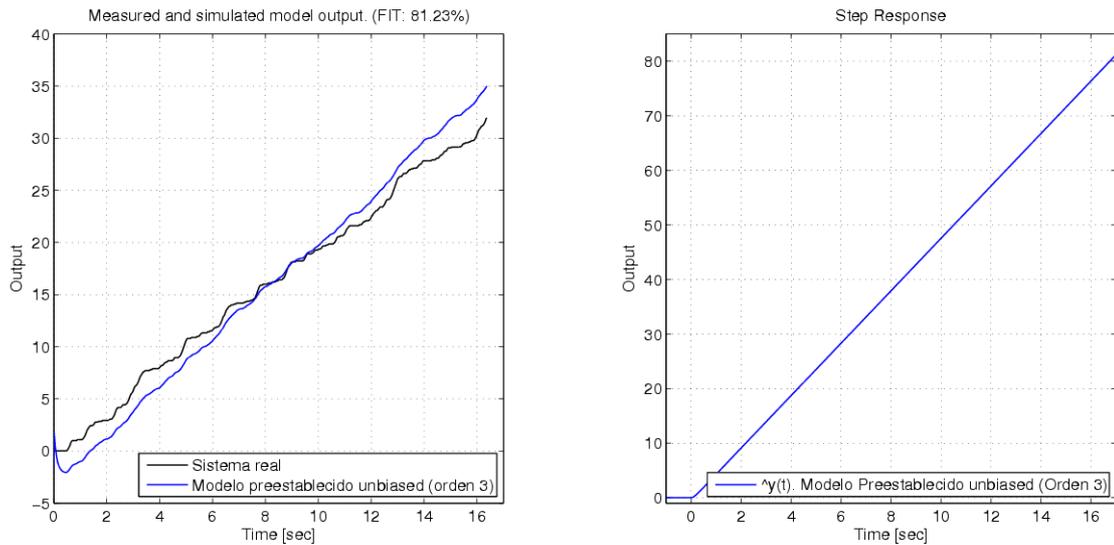
**Ubicación de los polos y ceros del modelo estimado con reducción de bias:** Al igual que el modelo (10.48), el modelo con reducción de bias no presenta ceros, mientras que los polos se encuentran ubicados en:

1.  $s_1 = 0$  .
2.  $s_2 = -9,57\text{rads/seg}$ .
3.  $s_3 = -327,35\text{rads/seg}$ .

y cuyos órdenes de magnitud se verifican con los órdenes de magnitud de los polos de los modelos de orden 3 estimados previamente aunque, a diferencia del modelo original, el polo asociado a la parte mecánica se encuentra más próximo al eje  $Re(s) = 0$ . Observar que los polos estimados verifican el modelo de proceso obtenido en la sección 10.8.

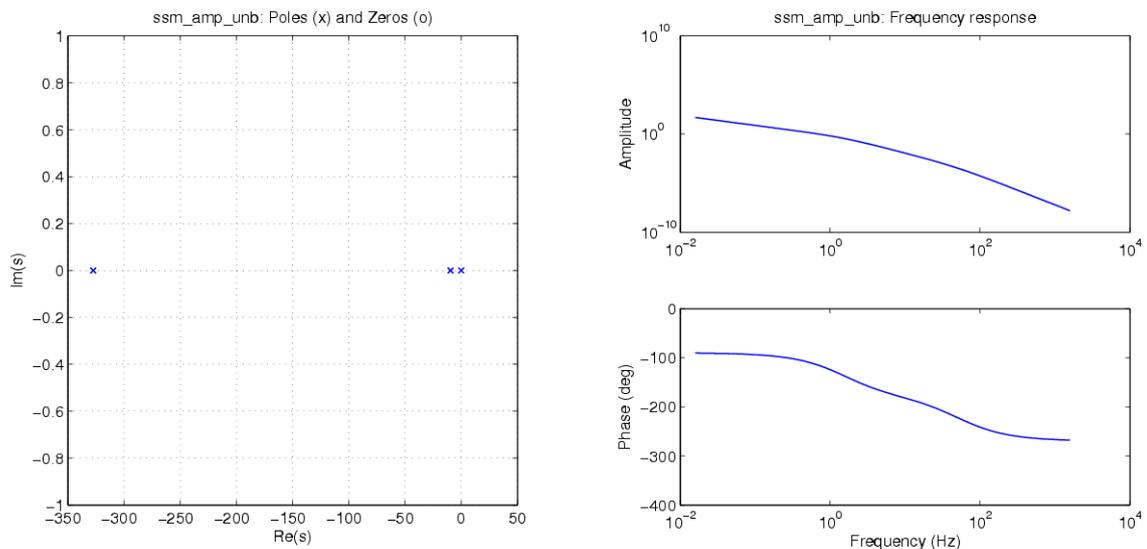
Al igual que en los casos anteriores se obtuvo la respuesta del modelo al juego de datos de entrada-salida sin preprocesamiento y la respuesta al escalón del modelo cuyo resultado se muestra en la figura 10.35.

Asimismo, La ubicación de los polos del sistema junto con la respuesta en frecuencia pueden observarse en la figura 10.36.



(a) Respuesta del modelo con reducción de bias a los datos de entrada-salida sin procesamiento. (b) Simulación de la respuesta al escalón del modelo con reducción de bias.

Figura 10.35: Respuesta del modelo Tailor-Made con reducción de bias a la señal de entrada utilizada en el experimento 2 y simulación de la respuesta al escalón del modelo.



(a) Ubicación de los polos en el plano s.

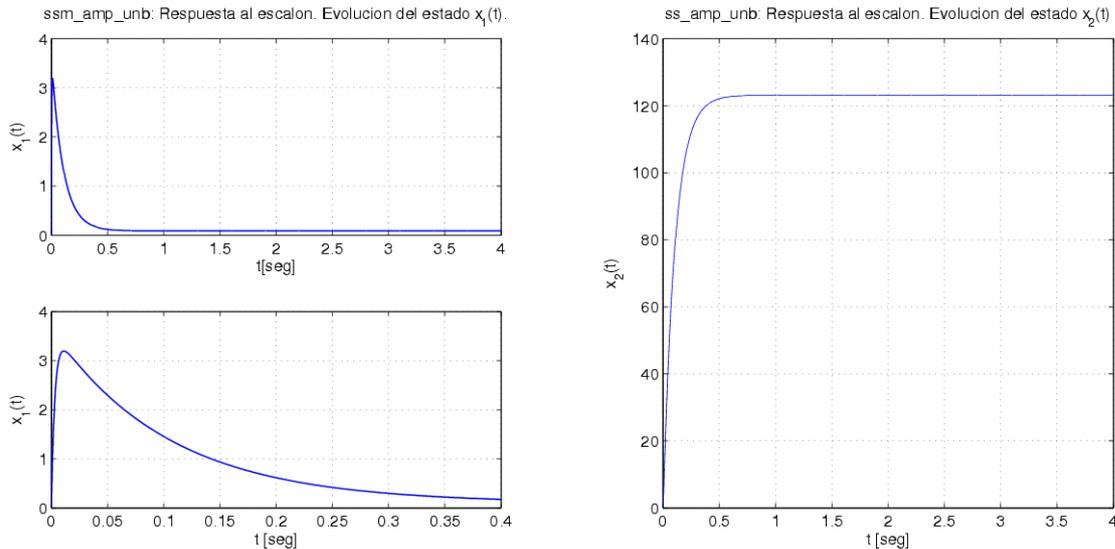
(b) Respuesta en frecuencia del modelo.

Figura 10.36: Ubicación de los polos y ceros en el plano s y respuesta en frecuencia del modelo Tailor-Made de orden 3 con reducción de bias.

Si bien el modelo con reducción de bias es válido desde el punto de vista de los ensayos de validación de Identificación de Sistemas, queda por analizar la respuesta en estado estacionario de los estados  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  ya que la evolución del tercer estado es conocida.

De igual manera que con el modelo original se simuló el sistema con el mismo diagrama en bloques de la figura 10.32 ajustando los coeficientes para el modelo sin bias. La respuesta

de los estados se muestra en la figura 10.37.



(a) Respuesta al escalón del estado  $x_1(t)$  (modelo con reducción de bias). (b) Respuesta al escalón del estado  $x_2(t)$  (modelo con reducción de bias).

Figura 10.37: Respuesta al escalón de los estados  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  del modelo Tailor-Made de orden 3 estimado con reducción de bias.

Para este caso se tiene en la figura 10.37(a) que en estado estacionario el estado asociado a la corriente de armadura toma el valor 0.125 unidades mientras que en caso real la corriente de armadura en estado estacionario es de aproximadamente  $0,2Amp$ . En el caso del estado  $x_2(t)$ , de acuerdo al modelo, en estado estacionario el motor DC alcanzaría una velocidad de giro de  $124rad/s$  o lo que es lo mismo  $1184rpm$  logrando una mejor aproximación a los  $1800rpm$  medidos en la sección 9.2.2 (ver figura 10.37(b)).

Se concluye hasta aquí que al ajustar individualmente los parámetros del modelo Tailor-Made de orden 3 se obtuvo una mejor aproximación al modelo real del posicionador y que por lo tanto sigue siendo válido **considerar que los estados  $x(t)$  del modelo estimado coinciden con los estados medibles del sistema real**. Si bien la evolución temporal de los estados no coincide exactamente con la evolución temporal del sistema real debe recordarse que existe dinámica del modelo que no está siendo considerada por la estructura de orden 3 utilizada. Si esto se le suma que los parámetros estimados no son exactos, es lógico esperar que las respuestas no sean exactamente iguales.

También es importante notar que el modelo propuesto del posicionador a partir del estudio teórico del mismo es consistente con los modelos estimados previamente donde no se condicionaba a utilizar una determinada estructura de modelo y que por lo tanto puede ser utilizado para el diseño del lazo de control.

Por lo tanto, **el modelo a considerar de aquí en adelante como modelo de estados del posicionador de antena, es el siguiente**<sup>5</sup>:

<sup>5</sup>Recordar que se trata del “modelo ampliado” del posicionador, por lo que la electrónica de potencia se considera como parte del sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -336,7 & -9,18 & 0 \\ 332,94 & -0,23 & 0 \\ 0 & 0,039 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ctrl}(t) \quad (10.51)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix}$$

donde:

- $i_a(t)$  es la corriente de armadura del motor DC medida en Amperes.
- $\omega_m(t)$  es la velocidad angular de eje del motor DC medida en *rads/seg.*
- $\theta_p(t)$  Es la posición angular en azimut medida en grados.

Del último punto se tiene que, para expresar la posición en grados es necesario realizar la siguiente conversión:

$$\theta_p[\text{grados}] = \frac{\theta_p[\text{radianes}] \times 360}{2\pi} \quad (10.52)$$

por lo que, si el parámetro  $a_{32} = 0,0039$  estimado incluye el pasaje a grados, entonces dicho parámetro estará dado por:

$$a_{32} = \frac{1}{R_{AZ}} \times \frac{360}{2\pi} \quad (10.53)$$

El parámetro que interesa conocer es la reducción en azimut, cuya valor estimado estará dado por:

$$\frac{1}{R_{AZ}} = a_{32} \times \frac{2\pi}{360} = 0,0039 \times \frac{2\pi}{360} = 6,954 \times 10^{-4} \quad (10.54)$$

o lo que es lo mismo:  $R_{AZ} = 1470$ <sup>6</sup>.

El modelo de estados, cuya salida (posición angular) está expresada en radianes tiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -336,7 & -9,18 & 0 \\ 332,94 & -0,23 & 0 \\ 0 & 0,00069 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ctrl}(t) \quad (10.55)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix}$$

Si bien del análisis de validación del modelo se tiene que en realidad es un modelo de orden reducido del sistema real ya que los resultados más satisfactorios se tuvieron para modelos de orden 5, dada la complejidad que implicaría la implementación del lazo de control considerando cinco estados es que se considerará el modelo de orden 3.

---

<sup>6</sup>En el modelo aproximado, de acuerdo a valores experimentales, se supuso  $R_{AZ} = 1438$ .

Además, se verificó que aún existen incertidumbres asociadas a los parámetros las cuales, en principio, se asocian a modelo limitado del sistema reductor (correa dentada más caja reductora) analizadas en el capítulo 4, lo que justifica aún más la utilización de un esquema de control robusto.

Como tarea futura se propone mejorar el modelo obtenido partiendo de los resultados obtenidos hasta ahora.

## 10.11 Resumen.

En este capítulo se describió la herramienta utilizada para llevar a cabo la identificación del posicionador de antena, en este caso, para el movimiento en azimut así como el procedimiento que permitió obtener un modelo de estados de orden 3 cuyos estados son los estados medibles del sistema a controlar y que se encuentra basado en la estructura de modelo teórica producto del análisis de cada uno de los subsistemas que componen el sistema electro-mecánico que permite el movimiento en azimut (electrónica de potencia, motor DC y sistema reductor).

Si bien el modelo obtenido no reproduce toda la dinámica presente en el sistema (esto se asoció a un modelo pobre del sistema reductor) el mismo será considerado, al menos en esta primera etapa del proyecto, como el modelo del sistema físico a controlar en cual estará basado el diseño del lazo de control. Esto se verá en el capítulo siguiente.

El análisis realizado en los capítulos 9 y 10 puede aplicarse al sentido de movimiento en elevación en futuras ampliaciones del sistema de medida.

# Capítulo 11

## Control del Posicionador. Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante. Simulación.

### 11.1 Introducción.

En el capítulo anterior se obtuvo el modelo de estados del sistema a controlar cuyos estados son las variables medibles del posicionador de antena: corriente de armadura  $i_a(t)$ , velocidad angular de giro del motor DC  $\omega_m(t)$  y posición angular del posicionador  $\theta_p(t)$  para el movimiento en azimut. El modelo obtenido del sistema a lazo abierto se repite a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -336,7 & -9,18 & 0 \\ 332,94 & -0,23 & 0 \\ 0 & 0,00069 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ctrl}(t) \quad (11.1)$$
$$y(t) = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix}$$

Como se vio en el Capítulo 6, para la implementación de un control por Modo Deslizante era necesario contar con un modelo de estados del sistema a controlar.

Una vez obtenido y validado el modelo se procede a diseñar el lazo de control el cual deberá cumplir con los requerimientos dinámicos del sistema de medida.

En este capítulo se establecen los requerimientos dinámicos del sistema de lazo cerrado, se analiza el sistema (a partir de su modelo dinámico) para verificar si es posible implementar un control por modo deslizante de acuerdo a las condiciones establecidas en el capítulo 6 y en caso de ser posible se simula y verifica que el sistema realimentado cumpla los requerimientos establecidos.

La implementación práctica del sistema se deja para el Capítulo 13.

## 11.2 Especificaciones del Sistema a Lazo Cerrado.

El grupo a cargo del diseño del sistema de medida del IAR especificó que, para garantizar la cota de error en la medida de antenas, la resolución  $\Delta\theta_p$  con la cual deben tomarse dos posiciones sucesivas (en azimut) junto con su correspondiente valor de potencia recibida debe ser

$$\Delta\theta_p < 0,36^\circ. \quad (11.2)$$

Dicho valor determina la velocidad de giro máxima del posicionador de antena, la cual dependerá también del tiempo de adquisición  $T_a$  de las muestras (posición, potencia recibida) mediante la siguiente ecuación:

$$\omega_{p_{max}} = \frac{1}{6} \times \frac{\Delta\theta_p}{T_a} \quad (11.3)$$

donde:

- $\omega_p$  [rpm] es la velocidad del giro del posicionador en azimut (o lo que es lo mismo, velocidad de giro de la antena bajo ensayo). Tener en cuenta que según esta ecuación se encuentra medida en revoluciones por minuto.
- $\Delta\theta_p$  es la resolución angular en grados.
- $T_a$  es el tiempo de adquisición en milisegundos.

Dependiendo de la resolución pretendida, a partir de la ecuación (11.3) es posible determinar la máxima velocidad de giro del posicionador. Esto se muestra en la figura 11.1.

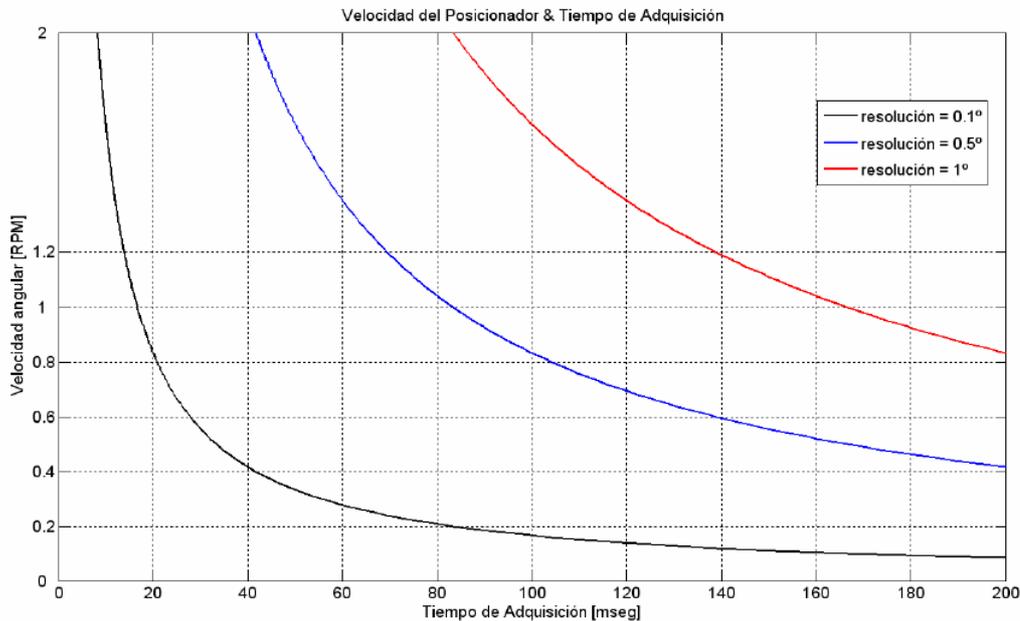


Figura 11.1: Velocidad de giro máxima en azimut en función del tiempo de adquisición para determinados valores de resolución  $\Delta\theta$  (Fuente: Documento Interno ANT-CAI-SP-00100a).

Por lo tanto, elegida al resolución pretendida en la medida por el usuario el sistema deberá ajustar la velocidad máxima de giro del posicionador de antena.

Se concluye entonces que el sistema de control deberá implementar:

**Un control de posición.** El mismo deberá permitir ir de una posición a otra en un tiempo finito con el objetivo de cambiar la posición relativa entre la antena bajo ensayo (AUT) y la antena de referencia. Además deberá transmitir la posición instantánea a la computadora encargada de asociar el dato de posición con el dato de potencia proveniente del analizador de redes.

**Un control de velocidad angular máxima .** A partir de la resolución pretendida en el ensayo se ajustará la velocidad máxima de giro permitida. Esto será necesario si la velocidad de giro que puede alcanzar el lazo de control es superior a la velocidad mínima requerida ( $88\text{rads/seg}$  para una resolución de  $0,1^\circ$ )

Como se anticipó en las secciones anteriores, el control estará basado en un control por modo deslizante visto en el Capítulo 6. Como requerimiento, el mismo deberá proveer tanto el control de posición como de velocidad. El proceso diseño se verá más adelante en la sección 11.4.

### 11.3 Consideraciones Previas al Diseño del lazo de control.

En primer lugar es necesario especificar las unidades en que serán tratadas cada una de las variables para la etapa de diseño del lazo de control. Esto se muestra en el cuadro 11.1 donde las unidades son consistentes con el modelo estimado.

Cuadro 11.1: Asignación de unidades a las variables del estado del modelo del posicionador.

| Variable      | Unidad                                     | Descripción                        |
|---------------|--|------------------------------------|
| $i_a(t)$      | Ampere [A]                                 | Corriente de Armadura del Motor DC |
| $\omega_m(t)$ | Radianes por segundo [ $\text{rads/seg}$ ] | Velocidad de giro del motor DC     |
| $\theta_p(t)$ | Grados [ $^\circ$ ]                        | Posición en azimut                 |

Luego, los requerimientos del sistema vistos en la sección anterior especifican controlar la velocidad máxima de giro del posicionador la cual no puede medirse directamente pero que está relacionada con la velocidad de giro del motor DC ( $\omega_m(t)$ ) mediante una ganancia lineal determinada por el sistema reductor. Por lo tanto, el control de la velocidad de giro se realizará en base a la velocidad del giro del motor DC dada por  $\omega_m$  que se puede medir directamente. El procedimiento será el siguiente:

1. En primer lugar el usuario especifica la resolución  $\Delta\theta$  pretendida.
2. A través de la ecuación (11.3) se determina la velocidad de giro máxima del posicionador (o de la AUT)  $\omega_{pmax}$  en radianes por segundo mediante la ecuación:

$$\omega_{pmax} = \frac{2\pi}{60} \times \frac{\Delta\theta_p}{6 \cdot T_a} \text{ en [rads/seg]} \quad (11.4)$$

3. A partir del valor estimado de la reducción del sistema reductor del posicionador dado por  $R_{AZ} = 1470$  veces, la velocidad de giro **máxima** del motor DC estará dada por:

$$\omega_{m_{max}}[\text{rads/seg}] = R_{AZ} \times \omega_{p_{max}} = 1470 \times \omega_{p_{max}}[\text{rads/seg}] \quad (11.5)$$

De acuerdo a las especificaciones del sistema, el control de velocidad deberá actuar si la velocidad del sistema supera los 88 rads/seg.

### 11.3.1 Controlabilidad del Sistema.

En principio, es necesario asegurar que todos los estados sean controlables. Si bien esto se verificó de manera algebraica para el modelo propuesto del posicionador de antena, el mismo análisis se repite para el modelo estimado. Aplicando el test de Kalman se tiene que la matriz de controlabilidad está dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1161 & -3,909 \times 10^5 & 1,28 \times 10^8 \\ 0 & 3,909 \times 10^5 & -1,33 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 1507 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

cuyo rango es 3 por lo que el sistema es completamente controlable.

### 11.3.2 Modelo de Orden Reducido del Posicionador de Antena.

A partir del análisis de la ubicación de los polos del modelo (11.1) se tiene que los polos del sistema a lazo abierto se encuentran ubicados en:

1.  $s_1 = 0.$
2.  $s_2 = -9,57\text{rads/seg.}$
3.  $s_3 = -327,35\text{rads/seg.}$

de acuerdo a lo visto el capítulo 10.

De lo anterior se puede asegurar que la respuesta del sistema estará dominada por el polo ubicado en  $s = -9,57\text{rads/seg}$  asociado a la parte mecánica del sistema. Por lo tanto, es posible aplicar la aproximación de polo dominante lo que permitirá establecer un modelo de orden reducido del posicionador de antena de orden 2.

Se puede demostrar (ver [17]) que el modelo de orden reducido de un motor DC está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\tau & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G/\tau \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (11.7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

donde  $\tau$  es la constante de tiempo del autovalor asociado a la dinámica dominante y  $G$  es la ganancia en continua del sistema obtenida de la función transferencia entre la entrada

al sistema  $u(t)$  y la posición angular del eje del motor (es decir, si considerar el sistema reductor en el caso del posicionador de antena).

La función transferencia entre la entrada  $u(t)$  y la posición angular del motor DC ( $\theta_m(t)$ ) en el dominio de Laplace está dada por:

$$\frac{\Theta_m(s)}{U(s)} = \frac{386540}{s(s + 327,25)(s + 9,57)} \quad (11.8)$$

la cual aplicando la aproximación de polo dominante se reduce a

$$\frac{\Theta_m(s)}{U(s)} \simeq \frac{G}{s(s/\tau + 1)} = \frac{121,98}{s(s/9,57 + 1)}. \quad (11.9)$$

Por lo tanto, el modelo de orden reducido utilizando para el diseño del sistema a lazo cerrado (considerando el sistema reductor) está dado por el modelo (11.10):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -9,57 & 0 \\ 0,00068 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.10)$$

el cual es completamente controlable y será utilizado en la primer etapa del desarrollo ya que permite controlar el sistema utilizando un lazo de realimentación menos (ya que no se realimenta la corriente de armadura  $i_a(t)$ ).

## 11.4 Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante.

Como se vio en el Capítulo 6, el diseño del control por modo deslizante consiste en introducir un bloque no lineal que actúe como conmutador entre dos estados (en los ejemplos vistos se consideró un relay que tomaba dos valores posibles  $+M$  y  $-M$ ) y cuyo valor era controlado por una función  $S(x) = r - kx$  cuyo valor instantáneo depende del estado del sistema dado por  $x$  la cual definía una superficie de conmutación.

El procedimiento de diseño de un lazo de control por modo deslizante consiste en, a partir de los requerimientos del sistema a lazo cerrado (por ejemplo, ubicación de los polos) calcular el vector de ganancias  $k$  que verifique dicha condición y que además asegure las condiciones de existencia del modo deslizante en todo el rango de funcionamiento. Es por esto que en primer lugar se establecerán los requerimientos del diseño del sistema para luego pasar al diseño del lazo de control estrictamente dicho.

Los pasos para el diseño de un control por modo deslizante se vieron en el Capítulo 6, por lo que en este capítulo solo se mostrarán los resultados obtenidos.

Debe tenerse en cuenta que, al utilizar para el control una señal PWM del tipo unipolar, los valores posible que puede tomar la acción de control estará comprendidos en 0 y  $+M$ .

### Especificación de la Dinámica de Lazo Cerrado.

Cuando se trata de un control por modo deslizante, debe recordarse que cuando se refiere a la "Dinámica de Lazo Cerrado" se está refiriendo a como está regido el sistema cuando

se produzca el modo deslizante ya que en los instantes anteriores el sistema evoluciona a lazo abierto, es decir, no se tiene control del mismo.

Al no tener requerimientos de tiempo para ir de una posición inicial  $\theta_p(t_i)$  a una posición final  $\theta_p(t_f)$  se tienen dos alternativas de diseño:

1. Dejar que el sistema evolucione libremente asegurando el modo de alcance para, a partir de un determinado instante dar lugar a un modo deslizante y evolucionar de acuerdo a la dinámica establecida por el diseñador.
2. Establecer un régimen deslizante lo antes posibles para que, durante todo el recorrido la dinámica esté gobernada por el régimen deslizante.

Se sabe de las especificaciones del posicionador de antena que el tiempo mínimo en completar una revolución (360 grados) es 75 segundos a máxima velocidad, por lo tanto, es evidente que no podrá lograrse estableciendo un control un tiempo menor al especificado.

En primer lugar se diseñó un control de manera tal que el sistema evolucione a lazo abierto hasta impactar sobre la superficie  $s(x) = 0$ , estableciendo, a partir de ese momento un tiempo de establecimiento de la posición final de  $3\tau_{LC}$  donde  $\tau_{LC}$  es la constante de tiempo del sistema evolucionando a lazo cerrado (en régimen deslizante).

Además, al ser el sistema a lazo abierto un sistema de orden 2, bajo el régimen deslizante pasará a ser un sistema de orden 1 (recordar que una de las ventajas de un utilizar un régimen deslizante es la reducción en un orden en el caso de los sistema SISO).

Por lo tanto, para un tiempo de establecimiento  $t_e = 20\text{seg}$  se puede considerar la siguiente aproximación (ver [10]):

$$3\tau \simeq 20\text{seg}. \quad (11.11)$$

De esta manera se tiene que, en un primer diseño, la dinámica de lazo cerrado debe estar dominada por un polo en  $s = -0,15\text{rads/seg}$ .

### Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante.

Para ubicar un polo en  $s = -0,15\text{rads/seg}$ , el polinomio característico de la matriz de de lazo cerrado deberá ser igual a:

$$P_D(s) = s + 0,15 \quad (11.12)$$

conocido como “polinomio deseado” cuando se aplica realimentación de estados.

Como se vio en el Capítulo 6, el cálculo de las ganancias de los lazos de realimentación se tiene a partir del análisis de la dinámica del sistema bajo el régimen deslizante para lo cual se considera la matriz  $A$  del sistema a lazo cerrado denominada  $A_{LC}$  cuya expresión en la forma canónica controlable para un sistema de orden 2 está dada por:

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_{cc1}/k_{cc2} \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

y cuyo polinomio característico estará dado por

$$P_{A_{LC}}(s) = s \left( s + \frac{k_{cc1}}{k_{cc2}} \right). \quad (11.14)$$

donde el polo en origen no se tiene en cuenta (recordar la reducción de un orden).

Igualando los coeficientes de (11.12) y (11.14) y tomando  $k_{cc1} = 1$  se tiene que el vector de ganancias en para el modelo canónico controlable esta dado por:

$$k_{cc} = [ k_{cc1} \quad k_{cc2} ] = [ 1 \quad 6,6 ] . \quad (11.15)$$

Por lo visto en el Capítulo 6, el juego de ganancias en el espacio de estados original está dado por  $k = k_{cc} \cdot P^{-1}$  siendo  $P$  y su inversa  $P^{-1}$  las matrices de que permiten transformar el modelo (11.10) al modelo canónico controlable. En este caso se tiene que:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1161 \\ 0,7895 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

y

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1,2667 \\ 0,0009 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

de manera que antitransformando se tiene que el vector de ganancias del lazo de realimentación para establecer el régimen deslizante pretendido está dado por:

$$k = [ k_{cc1} \quad k_{cc2} ] \cdot P^{-1} \Rightarrow \boxed{k = [ 0,5742 \quad 1,2667 ]} . \quad (11.18)$$

Por lo que la superficie de conmutación tendrá la siguiente expresión:

$$s(x) = r - kx = r - 0,5742\omega_m - 1,2664\theta_p = 0 \quad (11.19)$$

donde  $r$  es la referencia o posición final que se desea alcanzar.

### Análisis del Rango de Funcionamiento en Modo Deslizante.

Para asegurar la existencia del modo deslizante es necesario verificar las condiciones de **transversalidad** e **invarianza**.

La condición de transversalidad exige que  $k \cdot B \neq 0$ . Para el caso analizado se tiene que:

$$k \cdot B = [ 0,5742 \quad 1,2664 ] \cdot \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \end{bmatrix} = 6,6 \neq 0 \quad (11.20)$$

por lo que la condición de transversalidad se cumple.

La condición de invarianza exige que la acción de control equivalente  $u_{eq}$  se encuentre acotada entre los valores  $-M < u_{eq} < +M$  para asegurar que durante la trayectoria del vector de estados se mantenga durante la superficie de deslizamiento  $s(x) = 0$  durante el régimen deslizante.

La expresión del control equivalente está dada por:

$$u_{eq} = (k \cdot B)^{-1} \cdot \dot{r} - (k \cdot B)^{-1} k \cdot A \cdot x. \quad (11.21)$$

Considerando una referencia constante tal que  $\dot{r} = 0$ , la acción de control debe verificar para el caso que se está analizando la siguiente condición:

$$0 < -(k \cdot B)^{-1} k \cdot A \cdot x < 1. \quad (11.22)$$

Sustituyendo por los valores obtenidos se tiene que la condición de invarianza se cumple si:

$$0 < \omega_m < 123,45 \text{rads/seg.} \quad (11.23)$$

de manera que para la dinámica de lazo cerrado asignada se puede asegurar la existencia del modo deslizante.

El diagrama en bloques del esquema de control resultante del diseño propuesto se muestra en la figura 11.2 donde los bloques resaltados en amarillo corresponden al modelo del posicionador de antena (tener en cuenta que se considera a la electrónica de potencia como parte del modelo). El resto de los bloques pertenecen al lazo de control. Dicho esquema fue utilizado para las simulaciones en Simulink.

En la figura 11.2 puede observarse que para poder expresar la referencia y la salida del sistema en grados ambas magnitudes se dividen y multiplican por 57.29 ( $360/2\pi$ ). El resultado de las simulaciones para verificar el comportamiento del sistema se muestran a continuación.

### Resultados de las Simulaciones del Sistema Funcionando a Lazo Cerrado.

Las simulaciones fueron realizadas utilizando como referencia valores de posición angular típicos a utilizar en la medida de antenas como 90, 180 y 360 grados.

En la figura 11.3 se muestra la evolución de las diferentes señales del sistema de la figura 11.2 cuando la referencia toma el valor  $\theta_{ref} = 90$ , lo que correspondería a indicar al sistema que gire de la posición  $\theta_p = 0^\circ$  a  $\theta_p = 90^\circ$ . En la figura 11.3(a) se muestra la señal de entrada (con forma de escalón) y la correspondiente evolución de la velocidad de giro del motor DC  $\omega_m(t)$  y la posición angular en azimut  $\theta_p$ .

En la figura 11.3(b) se puede observar la evolución de la señal  $s(x)$  y de la señal de control del sistema  $u(t)$ . Resulta interesante notar que mientras  $s(x) \neq 0$ , la señal de control  $u$  toma el valor  $u(t) = 1$  y el sistema evoluciona a máxima velocidad sin posibilidad de ejercer ningún tipo de control, es decir, evoluciona a lazo abierto mientras que cuando  $s(x)$  alcanza el valor  $s(x) = 0$  se produce el “hit” en la superficie de deslizamiento dando lugar al régimen deslizante verificándose que:

- $s(x)$  permanece en  $s(x) = 0$ .
- La señal  $u(t)$  empieza a conmutar a alta frecuencia.

La trayectoria descrita por el vector de estados cuyos estados se encuentran condicionados a evolucionar sobre la superficie de deslizamiento se observa en la figura 11.4 para  $\theta_{ref} = 90$  en la figura 11.4(a) y para otras referencias en la figura 11.4(b) donde se puede observar que una vez establecido el régimen deslizante, la trayectoria descrita evoluciona sobre la correspondiente superficie de conmutación dada por:

$$s_i(x) = \theta_{refi} - 0,0057\omega_m(t) - 1,2667\theta_p(t) = 0 \quad (11.24)$$

Si bien el objetivo de establecer un modo deslizante para fijar la dinámica del sistema se logra con el esquema de control propuesto, el mismo posee los siguientes defectos:

1. Observar que el sistema tiene error de estado estacionario por lo que nunca podrá alcanzarse la posición final deseada.

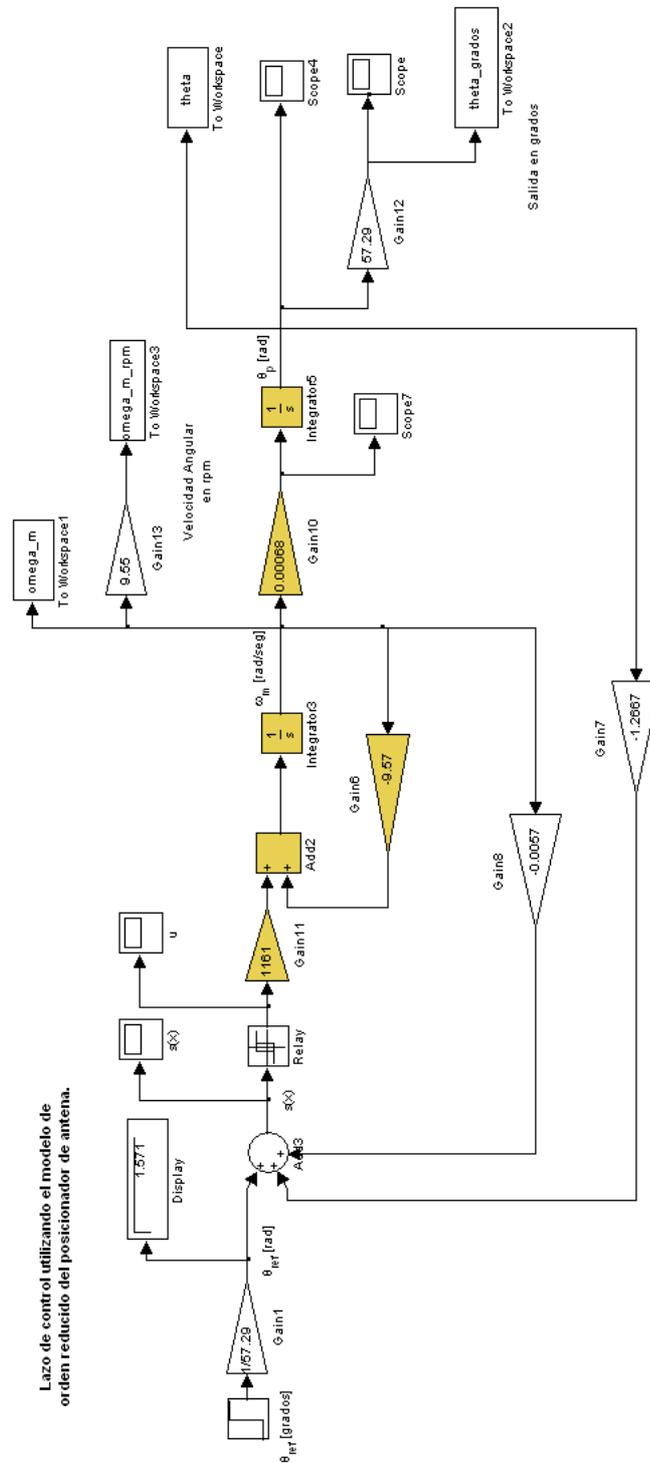


Figura 11.2: Diagrama en bloques del lazo de control para el modelo de orden 2 del posicionador de antena. En amarillo: bloques que corresponden al modelo de orden reducido del posicionador de antena.

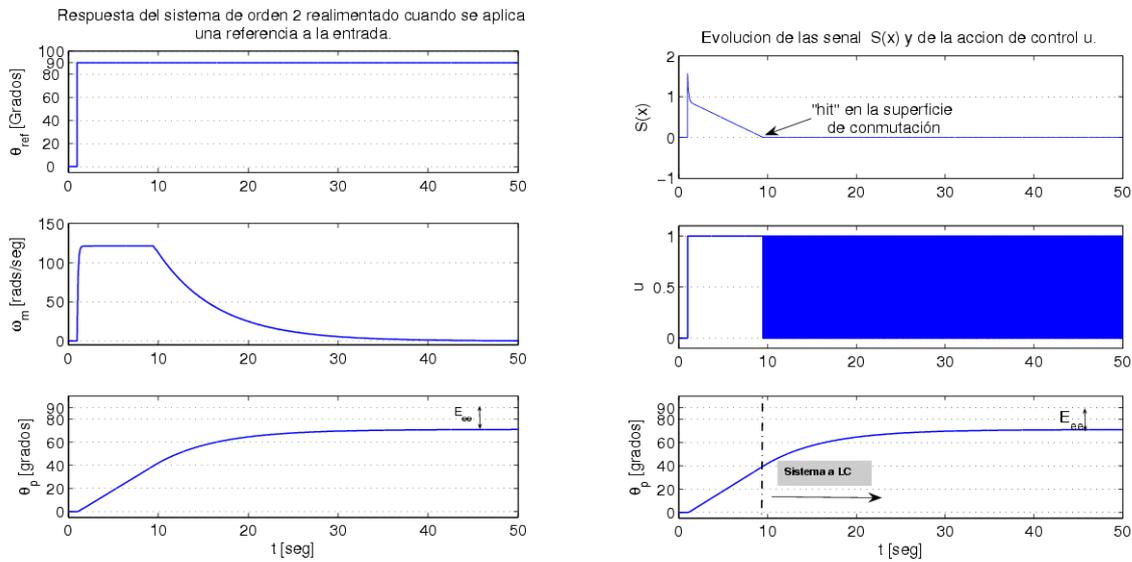


Figura 11.3: Evolución de los estados del sistema y de las señales de control del lazo para  $\theta_{ref} = 90$ . Observar que el sistema tiene error de estado estacionario no nulo.

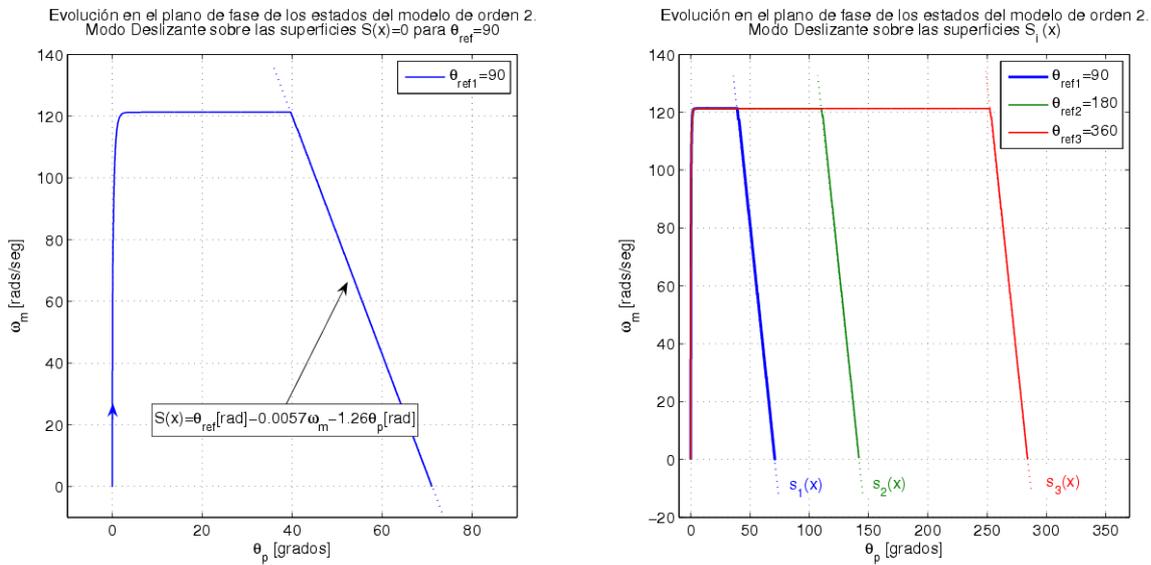


Figura 11.4: Evolución de los estados en el plano de fase cuando se establecen distintos valores de la señal de referencia. Producido el “hit” en la superficie de deslizamiento  $s_i(x)$  los estados evolucionan sobre la misma.

2. Cuando el sistema evoluciona a lazo abierto se produce la saturación del estado  $\omega_m(t)$  (observar la figura 11.3(a)), es decir, durante un largo período de tiempo evoluciona a la velocidad máxima de manera que no puede asegurarse el mismo tiempo de establecimiento para todas las posiciones que se desee alcanzar.

La solución al primer problema consiste en agregar un estado integral al lazo de control para lo cual deberá diseñarse una nueva superficie de deslizamiento. Para más información sobre este procedimiento ver [8], [7].

La solución al segundo problema consiste en, diseñar una superficie de deslizamiento que asegure que el sistema evolucione en régimen deslizante durante el mayor tiempo posible desde el inicio del movimiento, lo cual estará asociado a una dinámica muchísimo más lenta que la diseñada en ésta sección.

El diseño del lazo de control que elimine el error de estado estacionario y que además evolucione durante el mayor tiempo posible en régimen deslizante se verá en la sección siguiente.

## 11.5 Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante con Error de Estado Estacionario Nulo.

El agregado de un estado integral es bastante común en el control por realimentación de estados ya que es la única manera de anular el error de estado estacionario entre la entrada y la salida.

El primer paso para el diseño consiste en expandir el sistema de orden 2 utilizado hasta ahora para contemplar el nuevo estado cuya expresión es:

$$\dot{x}_e = r - y = r - Cx \quad (11.25)$$

por lo que es modelo expandido del posicionador de antena estará dado por<sup>1</sup>:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{\theta}_p(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,57 & 0 & 0 \\ 0,00068 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (11.26)$$

$$y(t) = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \theta_p(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad está dada por:

$$Q_e = \begin{bmatrix} 1161 & -11110,77 & 106330 \\ 0 & 0,7895 & -7,5553 \\ 0 & 0 & -0,7895 \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

cuyo rango es 3 por lo que es sistema expandido es absolutamente controlable lo que permitirá establecer un diseño por realimentación de estados.

El procedimiento de diseño es el mismo que en la sección anterior y consiste en, primero, especificar la dinámica con que se pretende que evolucione el sistema para luego calcular el vector de ganancias  $k$  del lazo de realimentación.

---

<sup>1</sup>Recordar que sigue siendo el modelo de lazo abierto.

### Especificación de la Dinámica de Lazo Cerrado.

El criterio utilizado fue el mismo de la sección anterior: especificar un tiempo de establecimiento del sistema que determine la constante de tiempo del polo dominante que asegure que el sistema evolucione en un régimen deslizante durante la mayor parte del tiempo.

En base a lo anterior se estableció un tiempo de establecimiento  $t_e = 3\tau_{LC} = 90$  segundos de manera que la constante de tiempo del polo dominante está dada por:  $\tau_{LC} = 30$  segundos.

Luego, al tener un sistema de orden 3, la dinámica de lazo cerrado estará dominada por dos polos de los cuales se pretende que uno sea dominante de acuerdo a la constante de tiempo calculada. Para lograr esto se estableció que los polos de lazo cerrado deben estar ubicados en:

1.  $s_{1LC} = -0,033\text{rads/seg}$  (polo dominante).
2.  $s_{2LC} = -0,3\text{rads/seg}$

de manera que el polinomio deseado a partir del cual se calcularán las ganancias del lazo de realimentación para el sistema expandido estará dado por:

$$P_{De}(s) = s^2 + 0,333s + 0,099. \quad (11.28)$$

Es evidente que para lograr que el sistema evolucione bajo un régimen deslizante durante la mayor parte del tiempo que dure el recorrido hubo que reducir las exigencias sobre el mismo ya que la respuesta ahora será más lenta.

### Diseño del Lazo de Control por Modo Deslizante.

Para el caso de un sistema de orden 3, la matriz que determina la dinámica de la lazo cerrado  $A_{LC}$  estará dada ahora por:

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_{cce1}/k_{cce3} & -k_{cce2}/k_{cce3} \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

cuyo polinomio característico es

$$P_{A_{LCe}}(s) = s \left( s^2 + \frac{k_{cce2}}{k_{cce3}}s + \frac{k_{cce1}}{k_{cce3}} \right). \quad (11.30)$$

Igualando los coeficientes de (11.28) y (11.30) y tomando  $k_{cce3} = 1000$  se tiene que el vector de ganancias para el modelo canónico controlable del sistema expandido está dado por:

$$k_{cce} = [ k_{cce1} \quad k_{cce2} \quad k_{cce3} ] = [ 9,9 \quad 333 \quad 1000 ]. \quad (11.31)$$

Las ganancias en el espacio de estados original estarán dadas por  $k = k_{cc} \cdot P_e^{-1}$  siendo  $P_e$  y su inversa  $P_e^{-1}$  las matrices de que permiten transformar el modelo de estados del sistema expandido al modelo canónico controlable. En este caso se tiene que:

$$P_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1161 \\ 0 & 0,7895 & 0 \\ -7,895 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

y

$$P_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,2667 \\ 0 & 1,2667 & 0 \\ 0,0009 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.33)$$

Antitransformando se tiene que el vector de ganancias del lazo de realimentación para establecer el régimen deslizante pretendido estará en este caso dado por:

$$k_e = [ k_{cce1} \quad k_{cce2} \quad k_{cce3} ] \cdot P_e^{-1} \Rightarrow k_e = [ 0,8613 \quad 421,79 \quad -12,53 ]. \quad (11.34)$$

dando lugar a la siguiente superficie de conmutación:

$$s(x) = r - k_e x = r - 0,8613\omega_m - 471,79\theta_p + 12,53x_e = 0 \quad (11.35)$$

donde  $r$  es la referencia o posición final que se desea alcanzar.

### Análisis del Rango de Funcionamiento en Modo Deslizante.

La condición de transversalidad exige en este caso que  $k_e \cdot B_e \neq 0$ . Para el caso analizado se tiene que:

$$k_e \cdot B_e = [ 0,8613 \quad 471,79 \quad -12,53 ] \cdot \begin{bmatrix} 1161 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1000,66 \neq 0 \quad (11.36)$$

por lo que la condición de transversalidad se cumple.

Para el análisis de la condición de invarianza debe tenerse en cuenta que la referencia no varía como un escalón sino que se incrementa lentamente mediante la utilización de una función rampa con una pendiente de 0.8 (como parte de la reducción de exigencias sobre la respuesta dinámica del sistema). La expresión del control equivalente que deberá considerarse es:

$$u_{eq} = (k_e \cdot B_e)^{-1} \cdot \dot{r} - (k_e \cdot B_e)^{-1} k_e \cdot A_e \cdot x_e. \quad (11.37)$$

donde  $\dot{r} = 0,8$  por lo que la acción de control debe verificar para el caso que se está analizando deberá verificar la siguiente condición:

$$0 < (k_e \cdot B_e)^{-1} \cdot \dot{r} - (k_e \cdot B_e)^{-1} k_e \cdot A_e \cdot x_e < 1. \quad (11.38)$$

Sustituyendo por los valores obtenidos se tiene que la condición de invarianza se cumple si:

$$0 < 0,8 + 7,95\omega_m + 12,9\theta_p < 1000. \quad (11.39)$$

Dado que  $\theta_p$  toma valores solamente entre 0 y  $2\pi$ , en el caso extremo que  $\theta_p = 2\pi$  se tiene que:

$$10,18 \text{rads/seg} < \omega_m < 115 \text{rads/seg} \quad (11.40)$$

de manera que “a priori” puede asegurarse la existencia del modo deslizante para las condiciones en las que trabajará el posicionador de antena.

El diagrama en bloques del esquema de control resultante para diseño propuesto considerando el sistema expandido mediante el estado integral se muestra en la figura 11.5

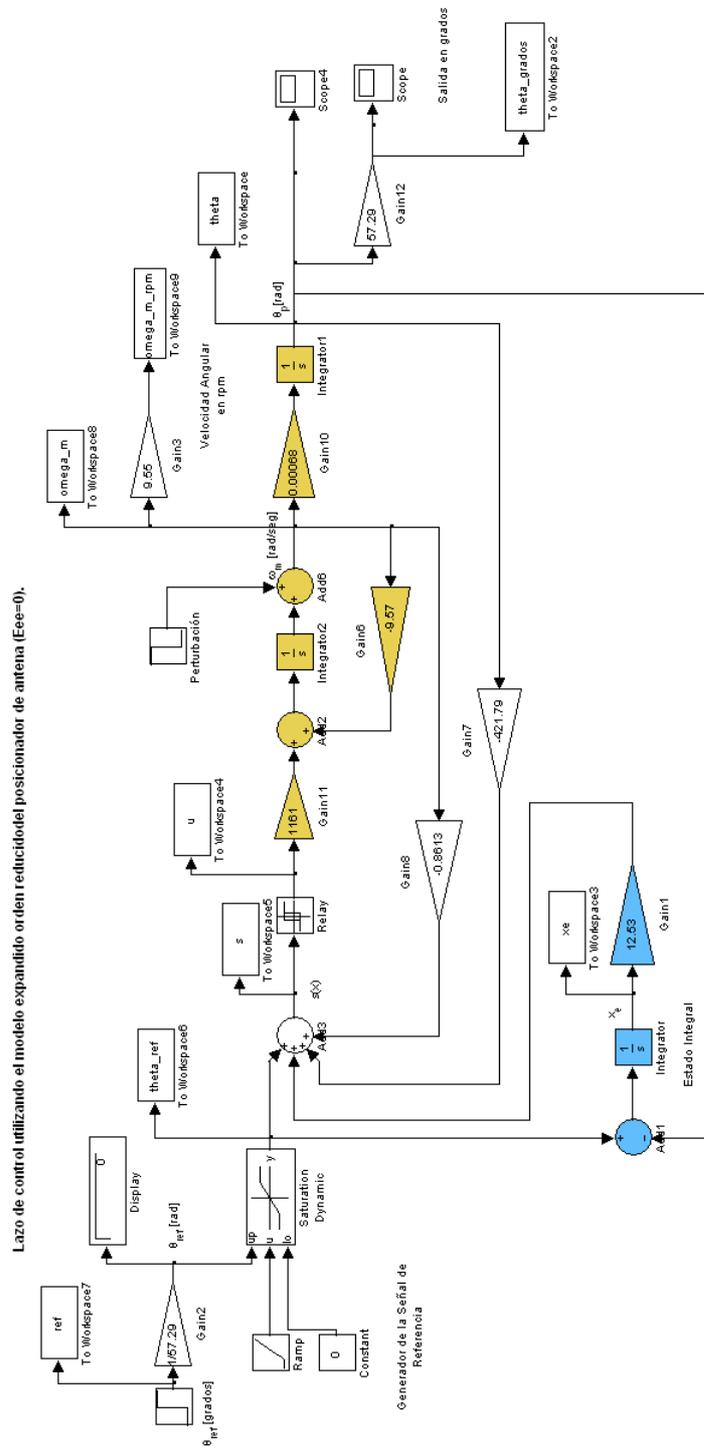


Figura 11.5: Diagrama en bloques del lazo de control para el modelo de orden 2 del posicionador de antena. En amarillo: bloques que corresponden al modelo de orden reducido del posicionador de antena. En azul: Bloque asociado al estado integral que expande el sistema y elimina el error de estado estacionario.

donde ahora se resalta un bloque en azul correspondiente al estado integral agregado. Dicho esquema fue utilizado para las simulaciones en Simulink.

A diferencia del lazo de control de la figura 11.2 puede observar que se utiliza un circuito que evita cambios bruscos en la referencia utilizando una función rampa. Esto hace que la exigencia para dar lugar al modo deslizante (condición de invarianza) sea menos exigente. Luego para poder expresar la referencia y la salida del sistema en grados ambas magnitudes se dividen y multiplican por 57.29 ( $360/2\pi$ ).

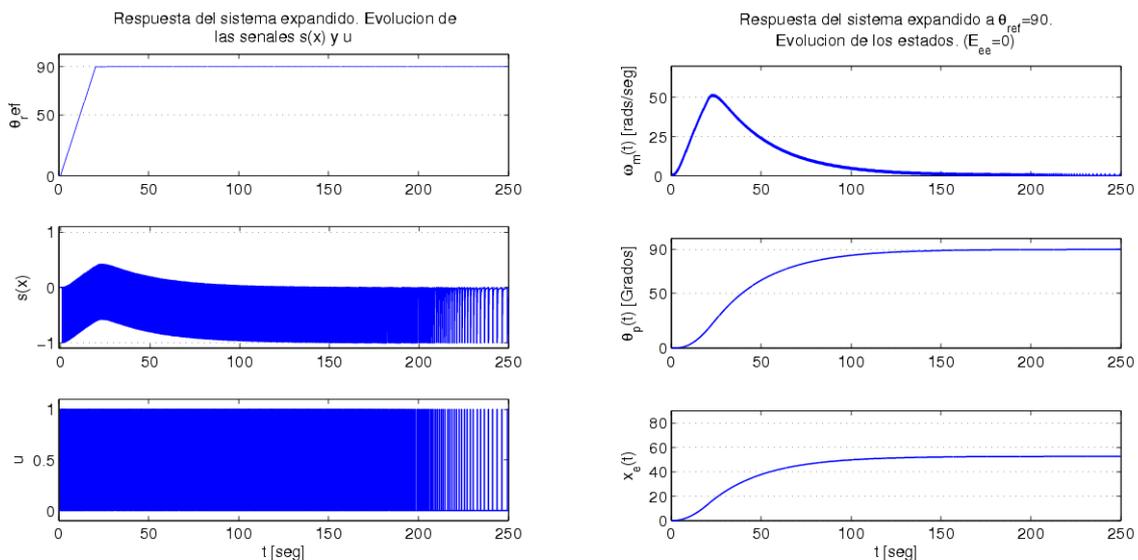
### Resultados de las Simulaciones del Sistema Funcionando a Lazo Cerrado.

En primer lugar se analizó la respuesta del sistema para una referencia de  $\theta_{ref} = 90^\circ$ .

En la figura 11.6 se muestra la evolución de las diferentes señales del sistema de la figura 11.5. En la figura 11.6(a) se muestra la señal de entrada aplicada en  $t = 1\text{seg}$  (la cual alcanza su valor final a través de una rampa) y la evolución de las señales  $s(x)$  y  $u(t)$  donde se observa que la señal  $s(x)$  permanece en el entorno de  $s(x) = 0$  y que la señal  $u(t)$  conmuta a alta frecuencia desde los primeros instantes del tiempo lo que indica que el sistema funciona en modo deslizante desde que se inicia el movimiento.

La correspondiente evolución de la velocidad de giro del motor DC  $\omega_m(t)$ , la posición angular en azimut  $\theta_p(t)$  y el estado integral  $x_e(t)$  se muestran en la figura 11.6(b) donde resulta interesante notar que:

- El sistema es capaz de llegar a la posición final deseada por lo que tiene error de estado estacionario nulo.
- No se produce la saturación de la velocidad angular  $\omega_m(t)$ .



(a) Respuesta de los estados del sistema a  $\theta_{ref} = 90$ .

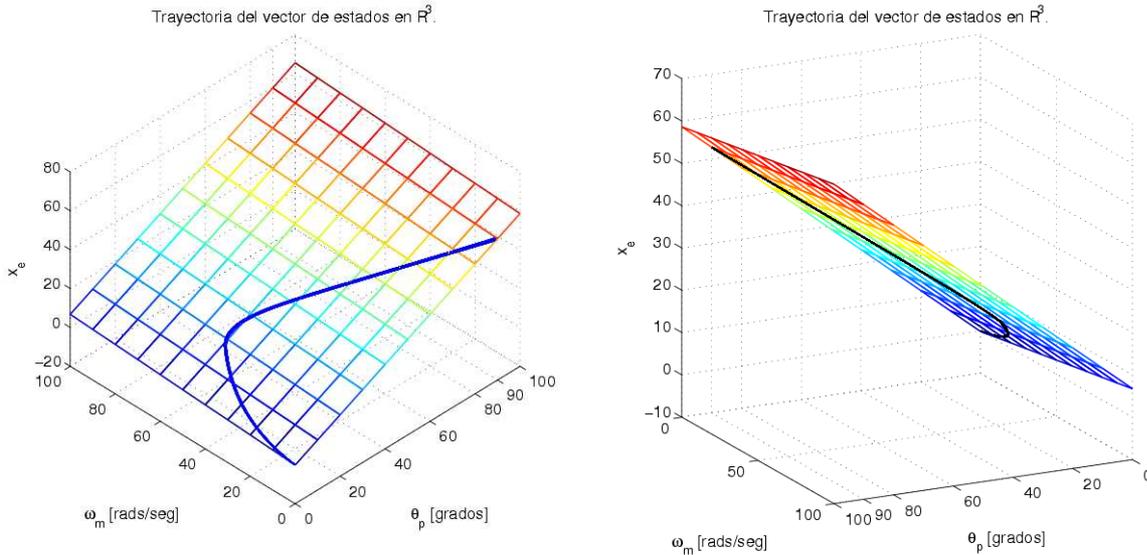
(b) Evolución de las señales de control.

Figura 11.6: Evolución de los estados del sistema y de las señales de control del lazo para  $\theta_{ref} = 90$ . Observar que el sistema tiene error de estado estacionario nulo.

La trayectoria descrita por el vector de estados cuyos estados se encuentran condicionada ahora a evolucionar sobre un plano determinado por la superficie de deslizamiento

$$s(x) = \theta_{ref} - 0,8613\omega_m(t) - 421,79\theta_p(t) + 12,53x_e = 0 \quad (11.41)$$

como se muestra en las figuras 11.7(a) y 11.7(b).



(a) Trayectoria en el espacio de estados para  $\theta_{ref} = 90$ . (b) Trayectoria condicionada a evolucionar sobre  $s(x) = 0$ .

Figura 11.7: Evolución de los estados en el espacio  $R^3$ . Observar que en este caso la superficie de deslizamiento es un plano y la trayectoria queda condicionada a evolucionar sobre el mismo.

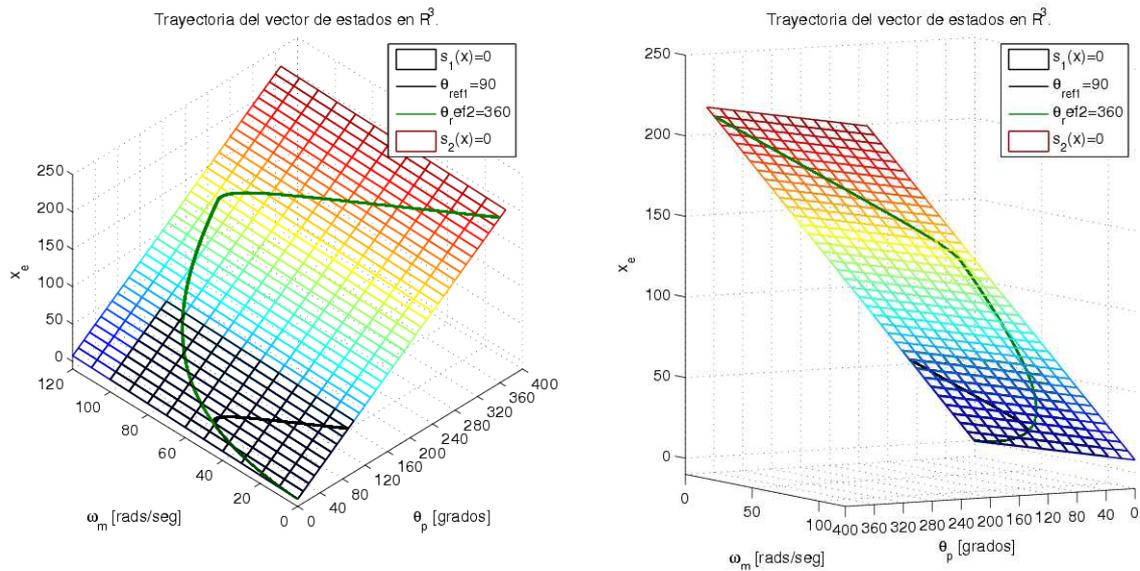
A modo de comparación, en la figura 11.8 se muestran las trayectorias descritas para  $\theta_{ref} = 90$  y  $\theta_{ref} = 360$  donde se verifica la existencia del modo deslizante para todo el rango de funcionamiento del posicionador de antena.

Por lo tanto, hasta aquí se solucionó el problema del error de estado estacionario a partir de la inclusión de un estado integral y de la saturación de uno de los estados a costas de una respuesta dinámica más lenta que verifica el rápido establecimiento de un modo deslizante.

Dado que los valores de las ganancias del vector  $k_e$  que determinan las ganancias del lazo de realimentación son razonables dichos valores serán utilizados, en principio, en la implementación práctica.

### Robustez de Lazo de Control Diseñado ante una Perturbación en la Velocidad Angular.

A modo de prueba se simuló la respuesta del sistema de la figura 11.5 cuando se produce un perturbación en la velocidad de giro del motor DC. La perturbación se supone del tipo escalón de amplitud  $-10\text{rads/seg}$  es decir, que frena al motor en el instante  $t = 50$ . La respuesta del sistema junto con la evolución de los estados y la trayectoria del vector



(a) Trayectoria en el espacio de estados para  $\theta_{ref} = 90$  y  $\theta_{ref} = 360$  (b) Trayectorias condicionadas a evolucionar sobre la superficie correspondiente  $s_i(x) = 0$

Figura 11.8: Evolución de los estados en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Observar que el modo deslizante se verifica para todo el rango de funcionamiento.

estados en el espacio para el sistema afectado por la perturbación se muestran en la figura 11.9 donde puede observarse que el efecto de la perturbación es rápidamente corregido por el controlador.

De manera que se verifica que una perturbación que genere un cambio brusco no afecta la respuesta del sistema asegurando su robustez.

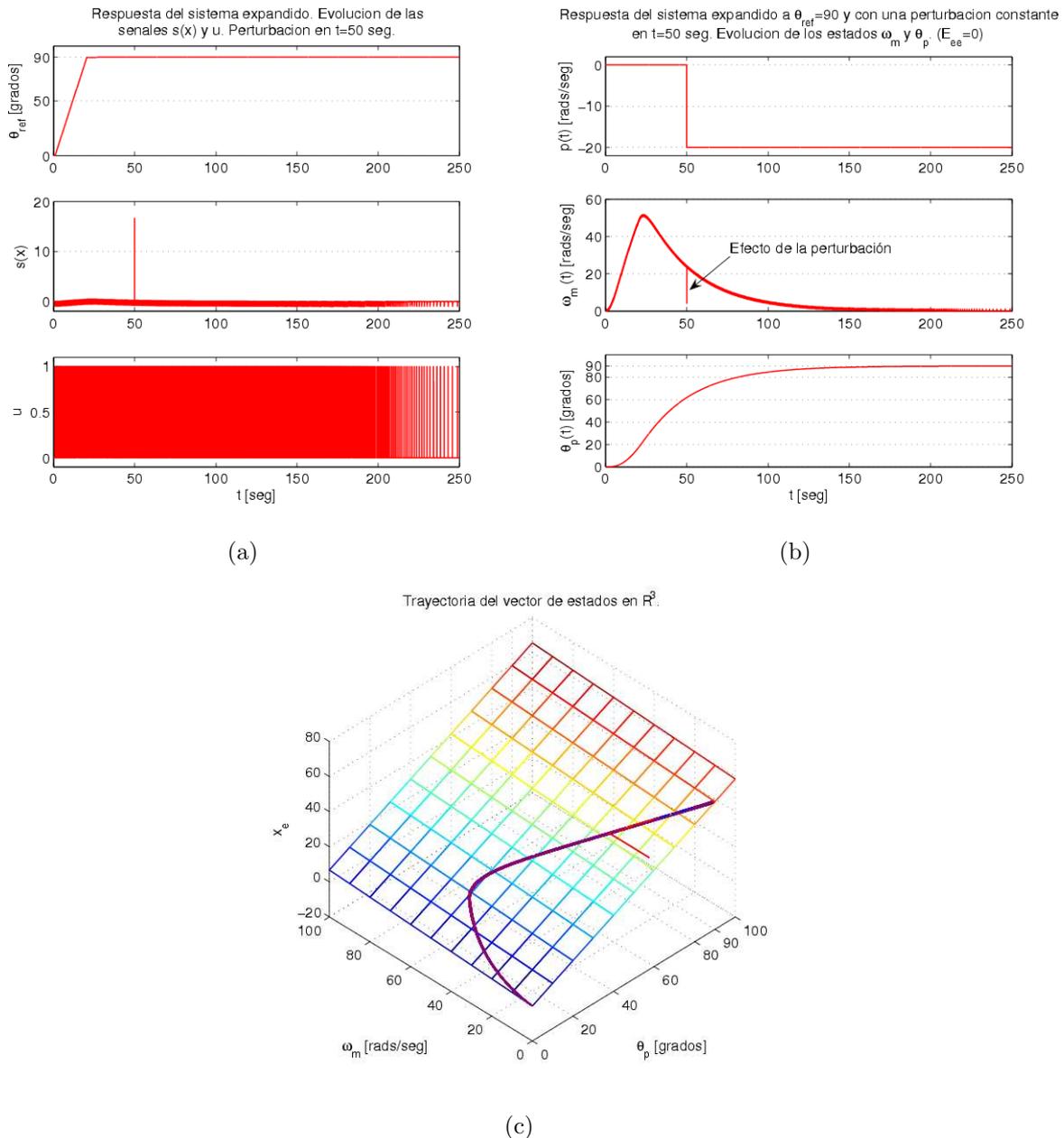


Figura 11.9: Respuesta del sistema cuando se produce una perturbación que afecta la velocidad de giro del motor DC.

## 11.6 Resumen.

En esta sección se establecieron los parámetros de diseño del lazo de control del posicionador de antena.

En primer lugar se decidió, mediante la utilización de la aproximación de polo dominante, un modelo de orden reducido del posicionador lo que, al menos en esta primer etapa, evitará la necesidad de utilizar un lazo de realimentación de la corriente de armadura.

Definida la respuesta que debe tener el sistema a lazo cerrado se procedió al diseño de un control que contempla un estado integral para reducir el error de estado estacionario

y asegura la existencia del modo deslizante en todo el rango de funcionamiento. Dicho esquema fue simulado obteniendo resultados positivos.

Queda para los capítulos siguientes la implementación práctica del lazo de control.

# Capítulo 12

## Hardware. Segunda Parte: Hardware de Adquisición.

### 12.1 Introducción.

En el Capítulo 8 se describió parte del hardware a utilizar para el control del posicionador pero con orientación hacia el diseño del experimento de identificación descrito en el Capítulo 9 por lo que solo se describió parte del mismo y que se corresponde con los bloques que forman el lazo directo.

En este capítulo se describirá el hardware utilizado para realimentar las variables de estado del posicionador (corriente de armadura  $i_a(t)$ , velocidad angular del motor DC  $\omega_m(t)$  y posición angular en azimut  $\theta_p(t)$ ) que completa la estructura del sistema de control a lazo cerrado.

Si bien el esquema de control diseñado se basa en la realimentación de solo dos variables de estado (velocidad angular del giro del motor DC  $\omega_m(t)$  y posición angular en azimut  $\theta_p(t)$ ) inicialmente se preveía la realimentación de la corriente de armadura por lo que se diseñó también el hardware de adquisición para la realimentación de la misma. No queda descartado que en futuras ampliaciones sea necesaria la realimentación de dicha variable de estado aunque por ahora solo se utilizará a modo de monitoreo.

Los archivos esquemáticos de diseño y simulación se encuentran en el CD-ROM del trabajo.

### 12.2 Estructura del Sistema de Control a Lazo Cerrado del Posicionador de Antena (Azimut).

La estructura del lazo de control propuesta se muestra en la figura 12.1 donde se incluyen ahora los bloques de adquisición de las variables de estado como subsistemas del sistema de control.

En las secciones siguientes se describirá cada uno de los bloques por separado analizando los requerimientos de cada uno a partir de los transductores fijados por cada uno de los bloques asociados, llámese electrónica de potencia, tacómetro o codificador de posición (encoder).

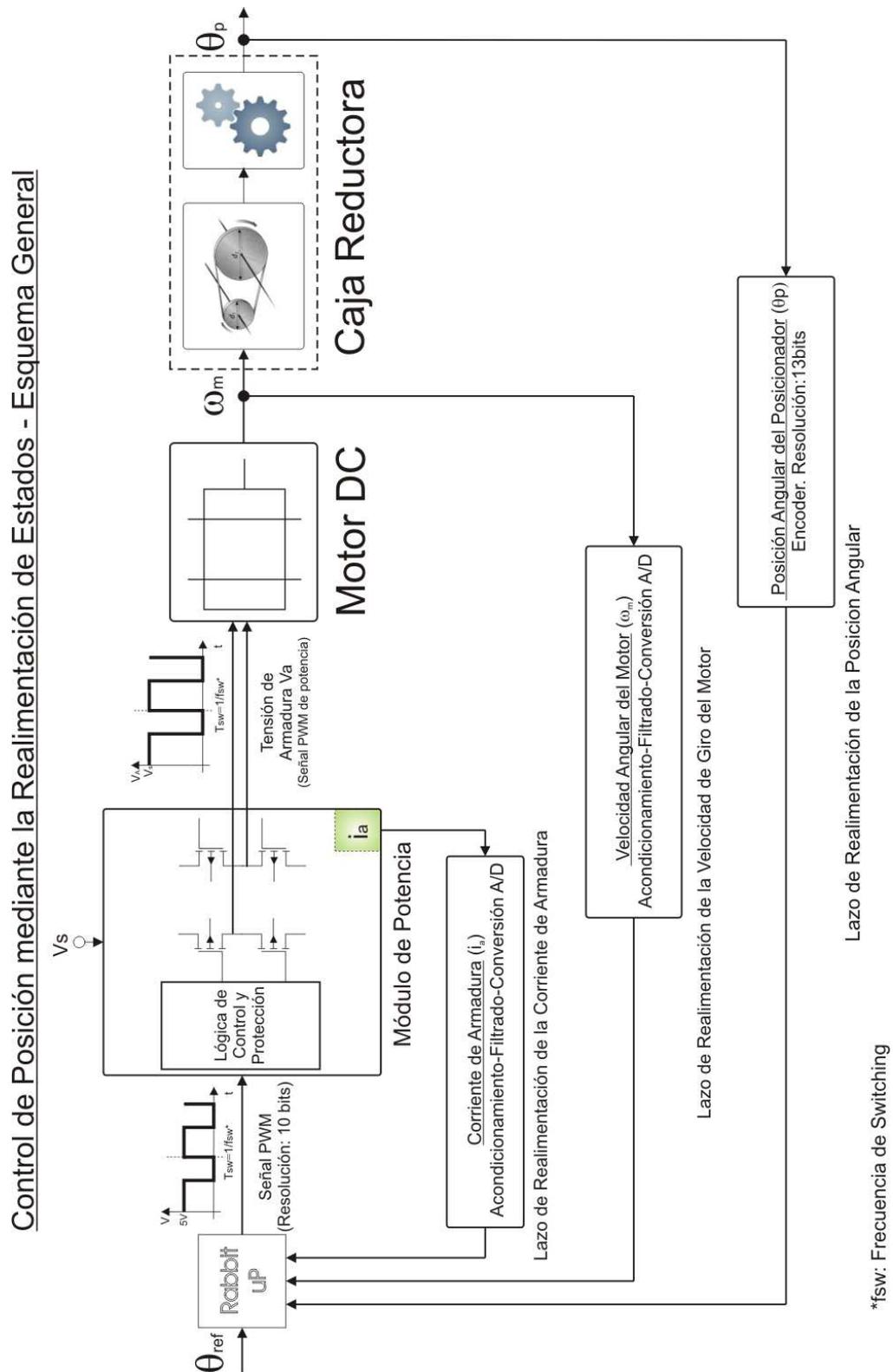


Figura 12.1: Estructura propuesta del lazo de control del posicionador de antena (Azimut).

En el caso de la adquisición de señales analógicas como la velocidad angular y la corriente de armadura los bloques de adquisición deberán:

- Acondicionar los niveles de señal.
- Filtrar la señal. De acuerdo a los resultados obtenidos en los experimentos previos al ensayo de identificación se observó que las señales se encuentran afectadas por ruido. Además deben implementarse filtros antialiasing por la naturaleza digital del controlador a utilizar.
- Conversión analógica digital. Esto permitirá que las señales puedan ser ingresadas al microprocesador.

En el caso de la adquisición de la posición, la salida del codificador de posición (encoder) es digital de manera que el bloque de adquisición de la posición angular deberá:

- Proveer las señales para la comunicación Serie Sincrónica (SSI) con el encoder.
- Adecuar los niveles de señal para cumplir con el estándar RS-485 (requerimiento especificado por el fabricante).
- Decodificar el dato obtenido ya que el encoder entrega los datos en código Gray (esto se realizará por software).

Por lo tanto, se puede observar que los bloques de adquisición estarán formados tanto por una parte analógica para el acondicionamiento y filtrado de las señales y una parte digital formada por el conversor Analógico/Digital (A/D) y el hardware utilizado para la comunicación con el microprocesador.

Un requerimiento para los canales de adquisición que incluyen un filtro es que

- *La frecuencia de corte de 3dB debe ser de 500Hz.*

La especificación anterior se debe a que:

1. Para el diseño de sistemas de control se busca que la fase del filtro sea lineal dentro del ancho de banda del sistema que se quiere controlar. Esto se logra aumentando el ancho de banda del filtro siempre y cuando sea posible. (Recordar que el ancho banda estimado del posicionador determinado por el polo eléctrico es de 50Hz. Para más información ver [11]).
2. Para cumplir con el teorema del muestreo, la frecuencia de muestreo a utilizar es  $f_s = 1kHz$ . Dicho valor cumple con los requerimientos de diseño para el control por modo deslizante (Ver Capítulo 13) y además se determinó experimentalmente que es una frecuencia de muestreo que puede ser sostenida por el controlador Rabbit3000 durante la ejecución del programa de control.

En las siguientes secciones se mostrará el diseño de cada uno de estos bloques.

## 12.3 Canal de Adquisición de la Corriente de Armadura ( $i_a(t)$ ).

La ubicación de este subsistema dentro del sistema de control se muestra resaltada en la figura 12.2.

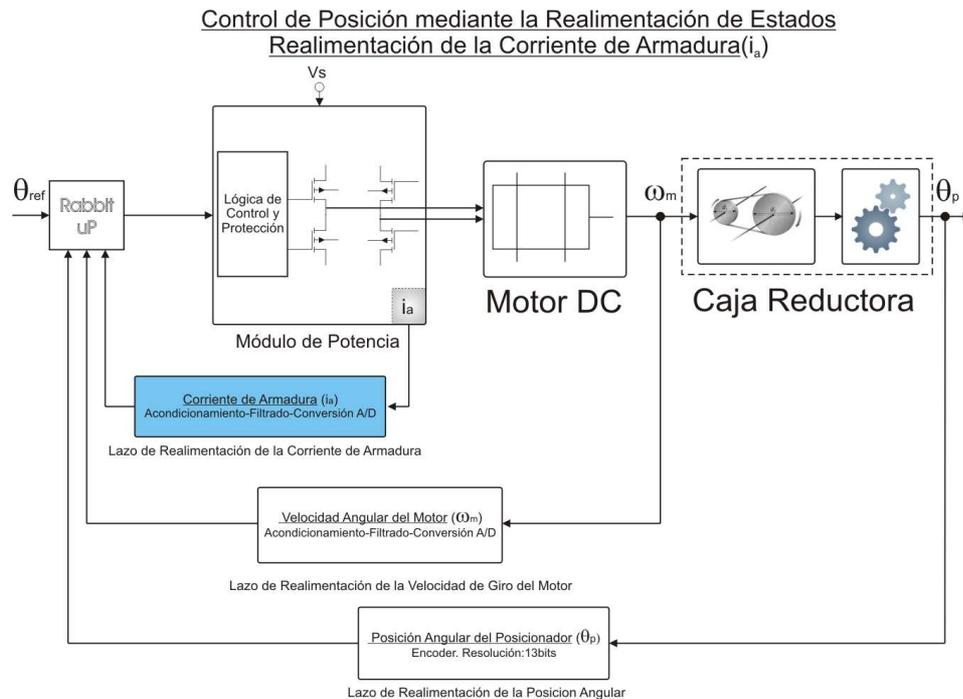


Figura 12.2: Ubicación del canal de adquisición de la corriente de armadura en el lazo de control

Como es de esperar los requerimientos del canal de adquisición estarán fijados por los bloques a los cuales se encuentra vinculado, es decir:

1. El módulo de potencia 25A20DD.
2. El microprocesador Rabbit3000.

Por lo tanto, en primer lugar se analizarán los requerimientos establecidos por ambos subsistemas.

### 12.3.1 Requerimientos desde el Módulo AMC25A20DD.

De acuerdo a la hoja de datos del módulo de potencia 25A20DD (ver CD-ROM adjunto), la salida del sensor de corriente (“Current Monitor”) es una tensión proporcional a la corriente de armadura  $i_a$  que circula por el bobinado del motor que verifica la siguiente relación:

$$V_{CurrMon} = 1V@4A. \quad (12.1)$$

De acuerdo a las características del motor DC la corriente nominal es  $I_{a_n} = 0,75A$  de manera que la tensión de salida correspondiente sería  $V_{CurrMon} = 187mV$ .

Si además se tiene en cuenta que la corriente de arranque del motor DC se encuentra limitada al doble de la corriente nominal para asegurar su vida útil se tiene entonces que la corriente máxima medida será aproximadamente  $I_{a_{max}} = 2 \cdot I_{an} = 1,5A$  que corresponde a una tensión de salida del monitor de corriente  $V_{CurrMon} = 375mV$ .

Dado que el objetivo es, además de conocer el valor instantáneo de la corriente de armadura, detectar posibles picos entonces como criterio de diseño se estableció que:

- *El canal de adquisición de la corriente de armadura debe detectar una señal a la entrada de  $\pm 500mV$ . O lo que es lo mismo, el rango dinámico de la entrada debe ser de  $1V_{pp}$ .*
- El ancho de banda de la señal (de acuerdo a los resultados obtenidos en el experimento de identificación) es de aproximadamente 52Hz. Por lo tanto, el filtro especificado de 500Hz de ancho de banda es apto para esta implementación.

Lo anterior permitirá medir el valor de corriente para ambos sentidos de movimiento (recordar que al invertir el sentido de giro se invierte la tensión de armadura y por lo tanto el sentido de la corriente).

### 12.3.2 Requerimientos desde en Controlador Rabbit3000.

Como se vio en el Capítulo 8 donde se mostró las características del microprocesador de Rabbit3000, el mismo cuenta que diferentes tipos de interfaces de comunicaciones ya sea del tipo paralelo o serie además de las librerías de software para el manejo de las mismas. Además, no existe un conversor A/D preestablecido que deba utilizarse por lo que la especificación de la interfaz a utilizar es más una cuestión práctica que facilite la implementación. Una vez especificada la misma se seleccionará el conversor A/D a utilizar.

El aspecto determinante en la selección es que, si se observa la hoja de datos del módulo de potencia 25A20DD, la señal del monitor de corriente está referida a la masa de la etapa de potencia ("*Power Ground*") y que **debe estar aislada de la masa de la etapa digital** por una cuestión de seguridad <sup>1</sup>.

Por lo anterior se establece que:

- La interfaz que comunica el conversor A/D con el microprocesador debe estar aislada. Para esto se utilizarán optoacopladores.
- Con el objetivo de utilizar la menor cantidad de optoacopladores se utilizará una interfaz serie.
- La interfaz a utilizar será una interfaz del tipo serie sincrónica (SSI) ya que existen conversores A/D comerciales que soportan dicha interfaz y es relativamente fácil de implementar en el microprocesador.

A partir de los requerimientos anteriores se determinó que:

---

<sup>1</sup>Si se observa la interfaz digital de los módulos de potencia y del encoder para este tipo de aplicaciones todos poseen optoacopladores a la entrada.

- *El conversor A/D seleccionado es el ADC0831 de National Semiconductor que consiste en un conversor analógico/digital de 8 bits cuya señal de entrada máxima es 5V.*

A partir de la máxima tensión de entrada de conversor A/D es que se puede determinar la ganancia del canal analógico dada por  $G = 5V/1V = 5$  (V/V).

### 12.3.3 Resumen de Requerimientos.

En el Cuadro 12.1 se resumen los requerimientos del canal analógico de adquisición de la corriente de armadura establecidos hasta ahora:

Cuadro 12.1: Requerimientos iniciales del canal de adquisición de la corriente de armadura.

| Requerimiento                           | Especificación                   |
|---|----------------------------------|
| Rango Dinámico de la tensión de entrada | $1V_{pp}$                        |
| Frecuencia de corte del filtro          | 500Hz                            |
| Ganancia                                | $G=5$ (V/V)                      |
| Interfaz con Microprocesador            | Serie Sincrónica (Optoacoplada). |

Una vez obtenidos los requerimientos básicos quedan todavía algunos aspectos de implementación por resolver. En primer lugar debe tenerse en cuenta que la señal de entrada es una señal continua que puede tomar valores en el rango  $[-500, 500]$  milivolts y cuyo valor es cero cuando el sistema se encuentra en reposo.

Luego, el rango dinámico de la señal de entrada del conversor A/D debe estar en el rango de tensión  $[0, 5]$  volts de manera que para utilizar el rango de códigos disponibles (0 a 255) para ambos sentidos de movimiento deberá implementarse un offset en la señal de manera que el cero a la entrada del canal se corresponda con la mitad del código del conversor A/D ( $128_{10} = 10000000_2$ )<sup>2</sup>. Para esto deberá diseñarse una fuente de referencia estable que genere dicha tensión de offset para cualquier condición de funcionamiento.

De esta manera el rango de códigos de conversor A/D queda dividido en tres partes como se muestra en el cuadro 12.2

Del cuadro anterior se desprende que el bit más significativo tomará el valor 0 o 1 dependiendo del sentido de giro por lo que la resolución con la que se medirá la variable de entrada será de **7 bits**.

Según lo especificado, para el rango de tensiones a la entrada del conversor A/D (0 a 5 volts) la tensión de offset que genera el código  $128_{10}$  está dada por:

$$V_{off} = \frac{k \cdot V_{max}}{2_n} = \frac{128 \cdot 5V}{256} = 2,5V \quad (12.2)$$

donde  $k$  es el valor decimal de código que representa el “bias”.

Por lo tanto, como especificaciones adicionales se tiene el cuadro 12.3.

---

<sup>2</sup>Cabe aclarar que si bien muchas veces se considera al número  $127_{10}$  ( $01111111_2$ ) como el “bias” para sistemas de 8 bits, por una cuestión de implementación práctica de la fuente de referencia encargada de generar dicho offset se consideró en valor  $128_{10}$  ( $10000000_2$ ) como valor medio del rango de códigos binarios disponibles.

Cuadro 12.2: Códigos binarios disponibles para distintos valores de la corriente de armadura.

| Código Decimal        | Código Binario            | Sentido de Movimiento |
|-----------------------|---------------------------|-----------------------|
| $0_{10} - 127_{10}$   | $00000000_2 - 01111111_2$ | Antihorario.          |
| $128_{10}$            | $10000000_2$              | Detenido.             |
| $129_{10} - 255_{10}$ | $10000001_2 - 11111111_2$ | Horario               |

Cuadro 12.3: Requerimientos adicionales del canal analógico de adquisición de la corriente de armadura.

| Requerimiento Adicional             | Especificación |
|-------------------------------------|----------------|
| Tensión de offset ( $V_{off}$ )     | 2,5V           |
| Resolución del canal de adquisición | 7 bits         |

En la sección siguiente se muestra el diseño del canal analógico a utilizar.

### 12.3.4 Diseño del Canal de Adquisición. Esquemáticos.

El objetivo fundamental del canal de adquisición es acondicionar la señal proporcional a la corriente de armadura  $i_a(t)$  proveniente del módulo de potencia 25A20DD para poder ser digitalizada utilizando un conversor analógico digital.

Dada la naturaleza del funcionamiento del motor de corriente continua a controlar, se sabe que la señal a digitalizar es una tensión continua a la cual se le suma ruido.

De acuerdo a los requerimientos vistos en la sección anterior, la estructura del canal de adquisición se dividió en cuatro etapas:

**Etapas 1:** Buffer/Adaptación de Impedancias. Debido a que la masa de la placa de adquisición es la misma que la masa de la salida del monitor de corriente basta con contar en la etapa de entrada con un buffer que asegure una alta impedancia de entrada para minimizar el error de inserción en la medida.

**Etapas 2:** Filtrado. Se utilizará un filtro activo de Bessel de cuarto orden debido a que la característica en frecuencia de estos filtros permite modelar los retardos en el canal de adquisición como retardos lineales siendo esta una mejor aproximación en los filtros de Bessel que los filtros Butterworth o Chebychew (para más información ver [11]). La elección de utilizar un filtro del tipo activo se debe a que el tamaño de los componentes necesarios para implementar este tipo de filtros en el rango de frecuencias de interés es mucho menor que si se utilizaran componentes pasivos.

**Etapas 3:** Acondicionamiento de Nivel. Esta etapa acondicionará el nivel de señal (amplificación) para que el rango dinámico de la señal de entrada coincida con el máximo rango dinámico posible a la entrada del conversor A/D.

**Etapa 4:** Se utilizará un conversor A/D con interfaz serie SSI (ADC0831) ya que se dispone de dicha interfaz y de las librerías necesarias para su manejo con el microprocesador.

En la figura 12.3 se muestra el diagrama en bloques del canal de adquisición a implementar.

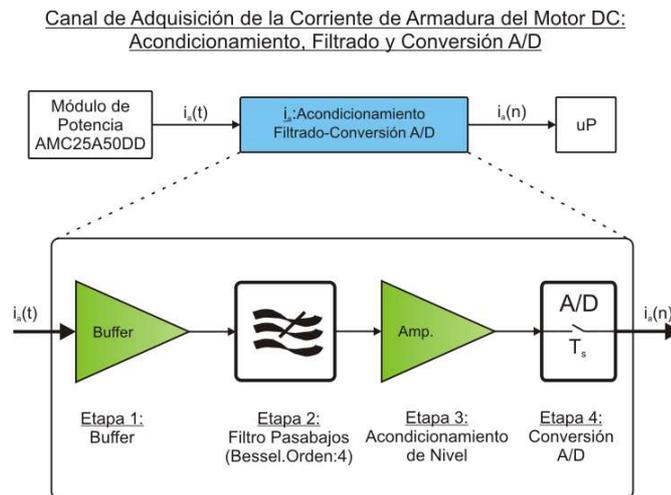


Figura 12.3: Diseño del canal de adquisición de la corriente de armadura. Diagrama en bloques.

En las siguientes subsecciones se mostrarán los esquemáticos correspondientes a cada etapa junto con una descripción de sus funciones.

### Etapas 1 y 2. Buffer y Filtro Activo.

La forma de implementar un buffer con amplificadores operacionales es bastante conocida de manera que aquí se dará mayor interés al diseño del filtro activo.

La implementación del filtro de Bessel de cuarto orden se realizó mediante un filtro activo compuesto por dos amplificadores operacionales realimentados en cascada donde cada uno forma un filtro activo de orden dos de manera que el conjunto forma un filtro de orden 4.

El esquemático resultante se muestra en la figura 12.4 donde se puede observar:

- El buffer a la entrada.
- El filtro activo compuesto por dos amplificadores operacionales.
- Un buffer a la salida que evita que la etapa siguiente (acondicionamiento) cargue la salida del filtro activo.

La estructura del filtro corresponde a una estructura “Sallen-Key” cuyo procedimiento de diseño consiste en calcular en base a tablas los componentes del filtro normalizado con frecuencia de corte  $\omega_n = 1 \text{ rad/seg}$  para luego desnormalizarlo a la frecuencia de corte deseada similar al procedimiento seguido para el diseño de filtros pasivos. El procedimiento seguido en el diseño puede hallarse en [38], [39] y [37].

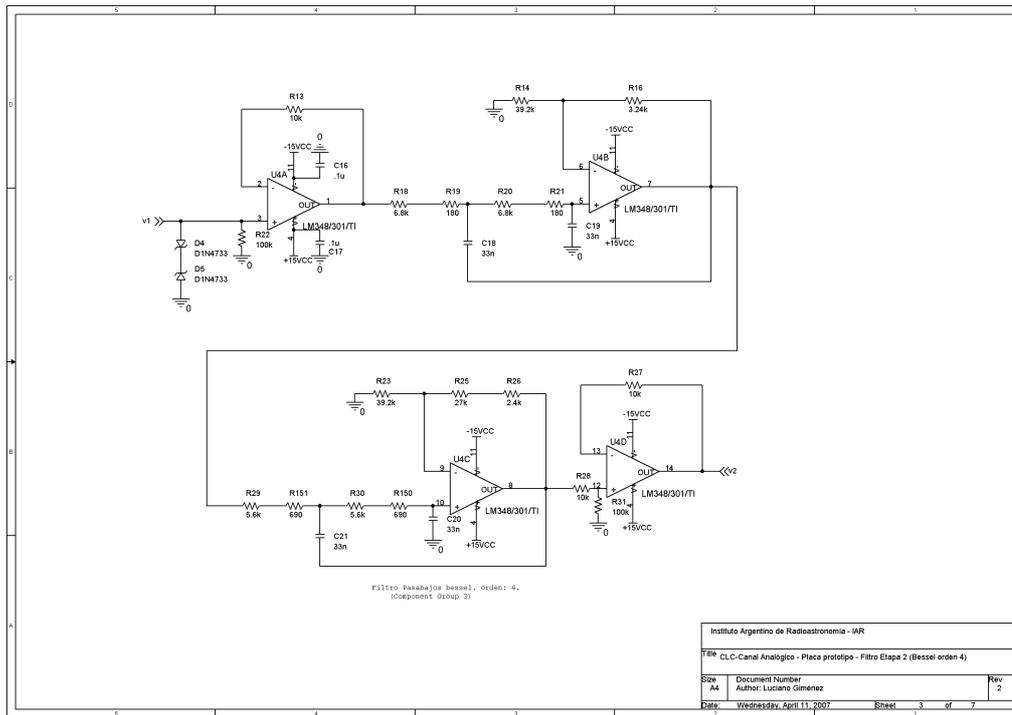


Figura 12.4: Etapa de entrada y filtro activo del canal de adquisición de la corriente de armadura.

Por tratarse un filtro activo es posible lograr una ganancia mayor a 1. Aprovechando esta ventaja, el filtro de la figura 12.4 posee las siguientes características (recordar que el buffer tiene ganancia  $G_{buff} = 1$ ) que se muestran en el cuadro 12.4.

Cuadro 12.4: Parámetros de diseño del filtro activo.

| Parámetro                     | Valor Teórico | Valor Medido |
|-------------------------------|---------------|--------------|
| Ganancia ( $G_{filt} [V/V]$ ) | 2             | 1.9          |
| Frecuencia de Corte de 3dB    | 500Hz         | 490Hz        |

Como se puede observar en el esquemático para el diseño se utilizó un único componente activo: el integrado LM348 que consiste en cuatro amplificadores operacionales LM741. Los resultados de simulación y los medidos se verán más adelante.

### Etapa 3. Acondicionamiento.

Además de amplificar la señal a la salida del filtro activo, esta etapa se utilizó para sumar la señal de offset necesaria para lograr establecer la tensión de “bias” a la entrada del convertor A/D que forma la siguiente etapa. El circuito diseñado se muestra en la figura 12.5 donde se puede observar que se implementó utilizando un amplificador operacional TL061 de la firma Texas Instruments a modo de sumador.

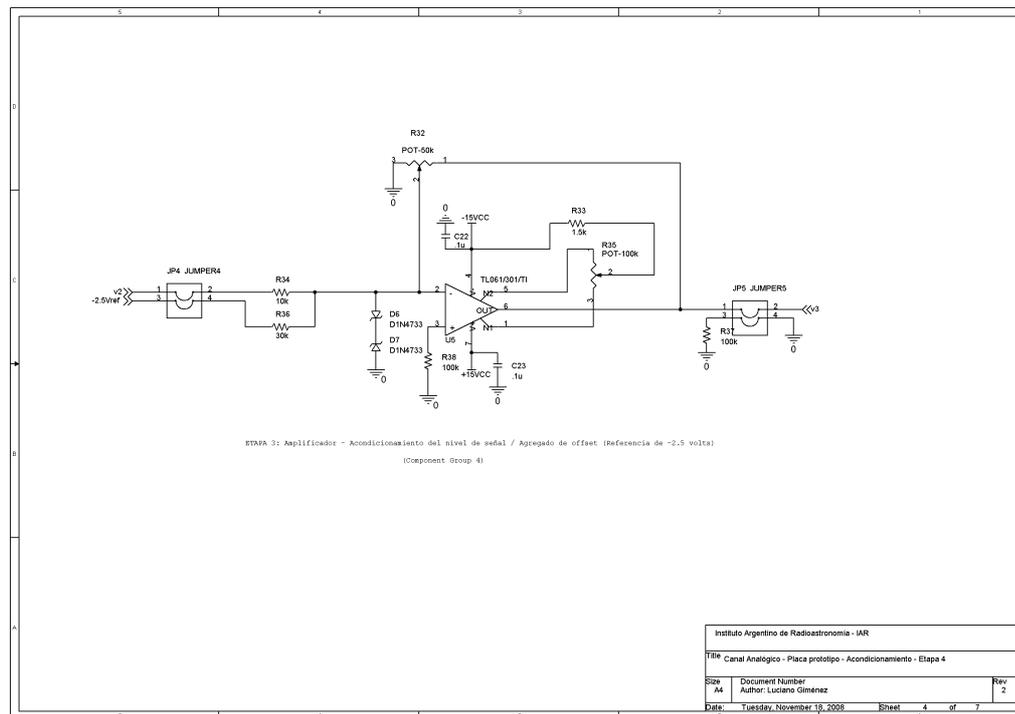


Figura 12.5: Etapa de acondicionamiento del canal de adquisición de la corriente de armadura.

Ambas señales ingresan a través de la entrada inversora para corregir la fase de la señal de entrada.

Debido a que esta es la última etapa antes de ingresar al convertor A/D la ganancia de la misma se ajustó mediante el potenciómetro R35 de la figura 12.5 para tener una ganancia  $G_{acc} = 2,65$ . De esta manera la ganancia del canal analógico queda dada por:

$$G = G_{buff} \cdot G_{filt} \cdot G_{acc} = 1 \cdot 1,9 \cdot 2,65 = 5,035 \quad (12.3)$$

cumpliendo con la especificación de diseño.

#### Etapa 4. Conversión Analógica/Digital.

En la figura 12.6 se observa el circuito esquemático del convertor A/D ADC0831 cuyas señales de control y comunicación provienen de los optoacopladores 6N137 que actúan como interfaz con el microprocesador Rabbit.

Como puede observarse, el pin 5 (REF) del convertor ADC0831 corresponde a una tensión de referencia que determina el rango dinámico de la tensión de entrada correspondiente al rango de códigos binarios de 0 a 255. Por simplicidad en el diseño se optó por utilizar una tensión de referencia  $V_{ref} = 5$  volts. Para esto se diseñó otra fuente de referencia además de la que provee el offset de 2.5 volts. Ésto se verá en la sección siguiente.

Para más información sobre el funcionamiento del convertor ADC0831 ver hoja de datos adjunta en el CD-ROM.

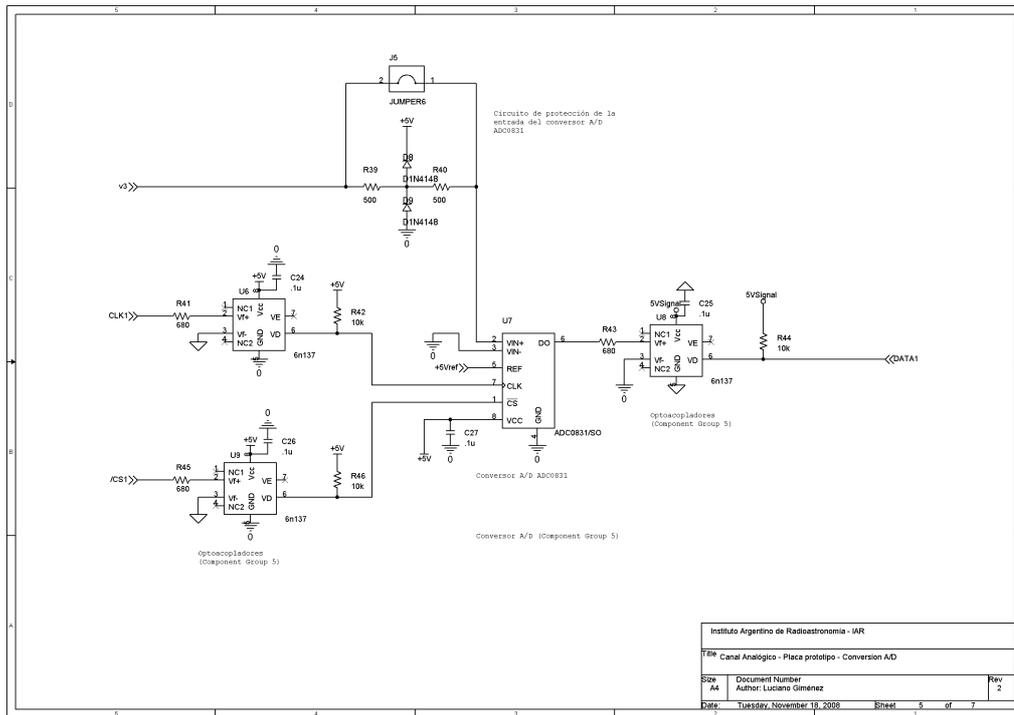


Figura 12.6: Etapa de conversión analógico digital. Utilización de optoacopladores para aislar la etapa de potencia de la etapa digital.

### Fuentes de Referencia.

El objetivo de esta etapa es proveer la tensión de offset  $V_{off} = 2,5Volts$  que genera el “bias” a la entrada del conversor A/D y que se encuentra conectada a la entrada de la etapa de acondicionamiento y de la tensión de referencia  $V_{ref} = 5V$  que ajusta la escala del conversor A/D.

En la figura 12.7 se muestra el esquemático de ambas fuentes de referencia.

El diseño se basa en generar una tensión de referencia a partir del integrado LM336 denominado “*zener programmable*” por ser capaz de mantener la tensión de salida constante cuando está correctamente polarizado y a partir de ella generar una tensión de  $-2,5$  volts (que luego de la etapa de acondicionamiento se convertirá en la tensión  $V_{off}$ ) utilizando un amplificador operacional LM308 realimentado con ganancia unitaria para mantener la estabilidad de la tensión generada.

De igual manera, a partir de la tensión de referencia del LM336 y utilizando un amplificador operacional TL061 realimentado con ganancia  $G = 2$  se genera la tensión de referencia  $V_{ref} = 5$  volts.

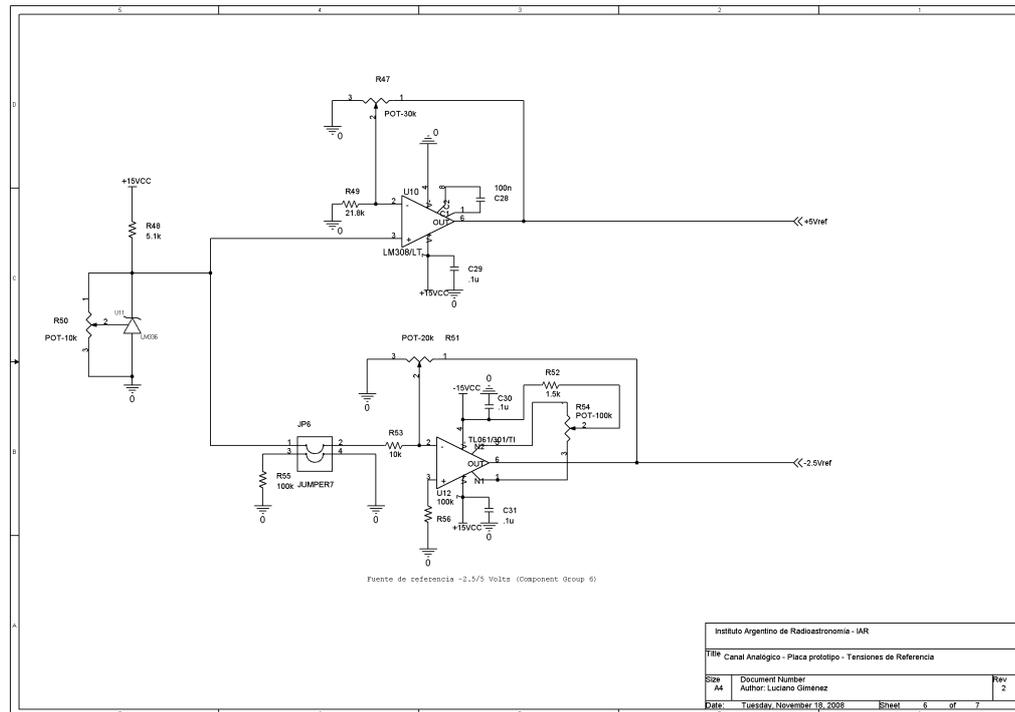


Figura 12.7: Fuentes de referencia utilizadas en el canal de adquisición de la corriente de armadura.

### Comunicación con el Microprocesador.

Finalmente la comunicación con el microprocesador se realiza mediante el circuito integrado 74HCT14 que consiste en 6 compuertas inversoras del tipo Schmitt-trigger que permiten pasar de niveles lógicos CMOS a TTL. El circuito esquemático se muestra en la figura 12.8.

Hasta aquí se describió el diseño del canal de adquisición de la corriente de armadura. En la sección siguiente se mostrará las respuesta en frecuencia del canal haciendo hincapié en los dos parámetros de interés: la ganancia y la respuesta en frecuencia del canal de adquisición.

### Mediciones.

Una vez diseñado el canal de adquisición se procedió a la simulación del mismo utilizando la herramienta PSpice de Orcad. La respuesta en frecuencia del canal completo se muestra en la figura 12.9.

Como se puede observar en la simulación se verifica que:

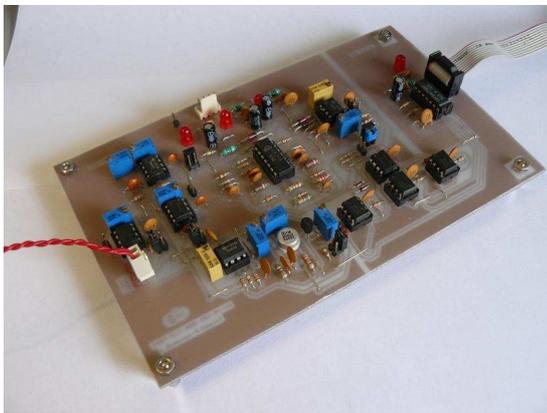
1. La ganancia en la banda de paso es de  $14,55dB$  que corresponde a una ganancia de tensión  $G = 5,16[V/V]$  cuando lo especificado es  $G = 5[V/V]$ .
2. En ancho de banda de  $3dB$  es  $493Hz$ .
3. El desfazaje en la banda de interés ( $100Hz$ ) es menor a  $30$  grados.



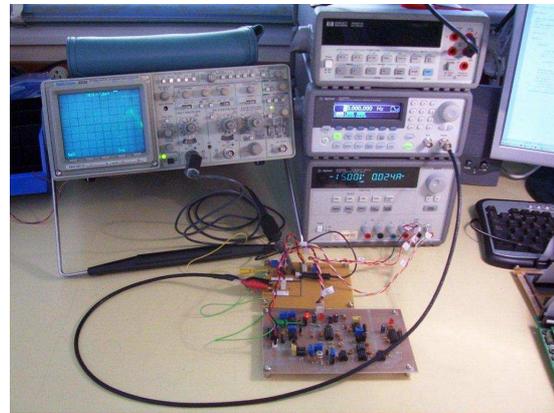
De esta manera, validado el diseño mediante simulación se procedió a la construcción de la placa.

La placa construida se muestra en la figura 12.10 donde también se pueden observar algunos de los arreglos de instrumentos para medir el comportamiento de la misma. Particularmente en la figura 12.10(b) se muestra el banco de medida de la respuesta en frecuencia del canal donde se utilizó un generador de señal Hewlett Packard 34401A y un osciloscopio Tektronix 2232A para llevar a cabo un barrido en frecuencia desde 1Hz hasta 1kHz.

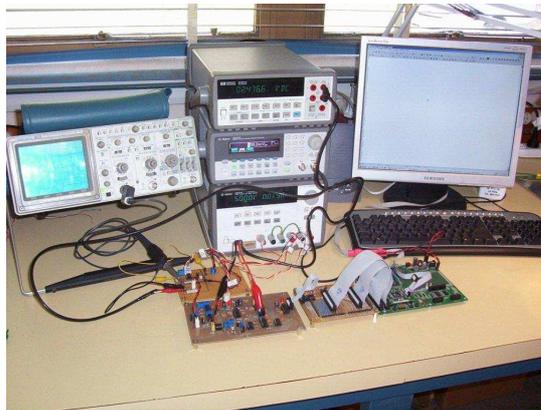
Utilizando el mismo esquema que para el barrido en frecuencia, se probó la comunicación del canal con el microprocesador Rabbit3000 para verificar la correcta comunicación con el conversor analógico digital.



(a) Canal de adquisición de  $i_a(t)$ .



(b) Banco de medición de la respuesta en frecuencia del canal analógico.



(c) Prueba de la comunicación entre el canal analógico y el microprocesador Rabbit3000.

Figura 12.10: Canal de adquisición de la corriente de armadura  $i_a(t)$ .

El resultado del barrido en frecuencia se muestra en la figura 12.11.

Se concluye entonces que si bien el ancho de banda del canal no se verifica exactamente con el ancho de banda especificado (se encuentra aproximadamente 20Hz por encima) la respuesta del mismo verifica los resultados de la simulación de manera que el diseño se validó en la práctica y será utilizado en el lazo de control del posicionador.

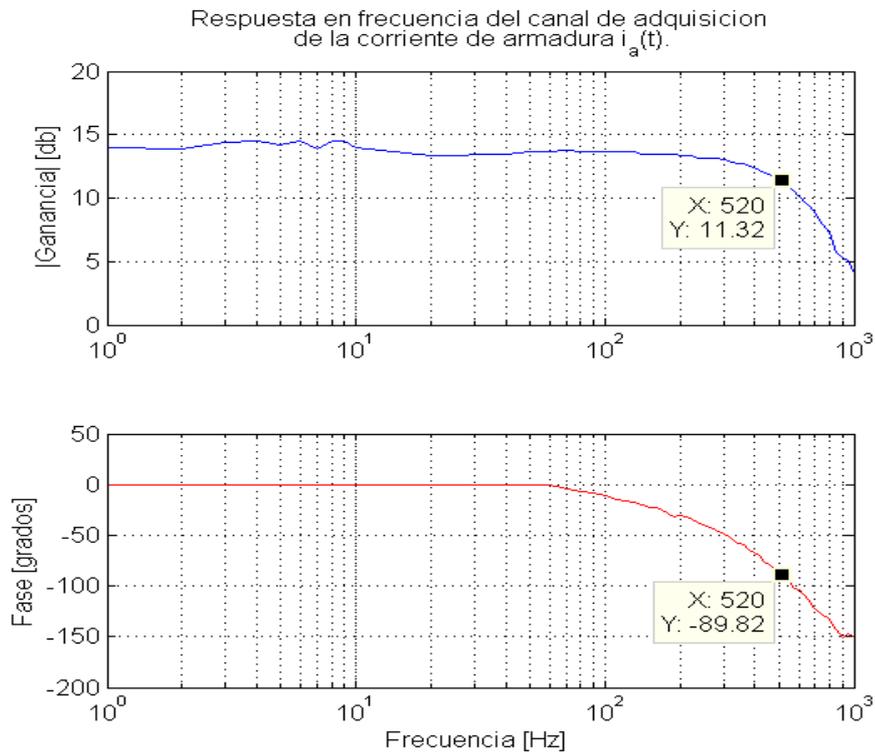


Figura 12.11: Respuesta en frecuencia medida del canal de adquisición de la corriente de armadura.

Como punto final debe tenerse en cuenta que, si bien se logró el objetivo de filtrar la señal de corriente de armadura, evoluciones futuras deberán utilizar resistencias con menor tolerancia para ajustar mejor la respuesta del canal.

## 12.4 Canal de Adquisición de la Velocidad Angular $\omega_m(t)$ .

El diseño del canal de adquisición de la velocidad angular  $\omega_m(t)$  se inició con el objetivo de aprovechar el diseño del canal de adquisición de la corriente de armadura manteniendo aquellas estructuras que habían dado resultados exitosos, como por ejemplo la etapa de conversión analógica digital y comunicación o el filtro activo y a su vez mejorar otras como la etapa de acondicionamiento y las fuentes de referencia.

Al igual que en la sección 12.3 se analizarán los requerimientos fijados por los subsistemas vinculados al canal de adquisición de la velocidad angular cuya ubicación en el lazo de control se muestra en la figura 12.12. De esta forma se busca determinar el conjunto de especificaciones que deberá cumplir el mismo.

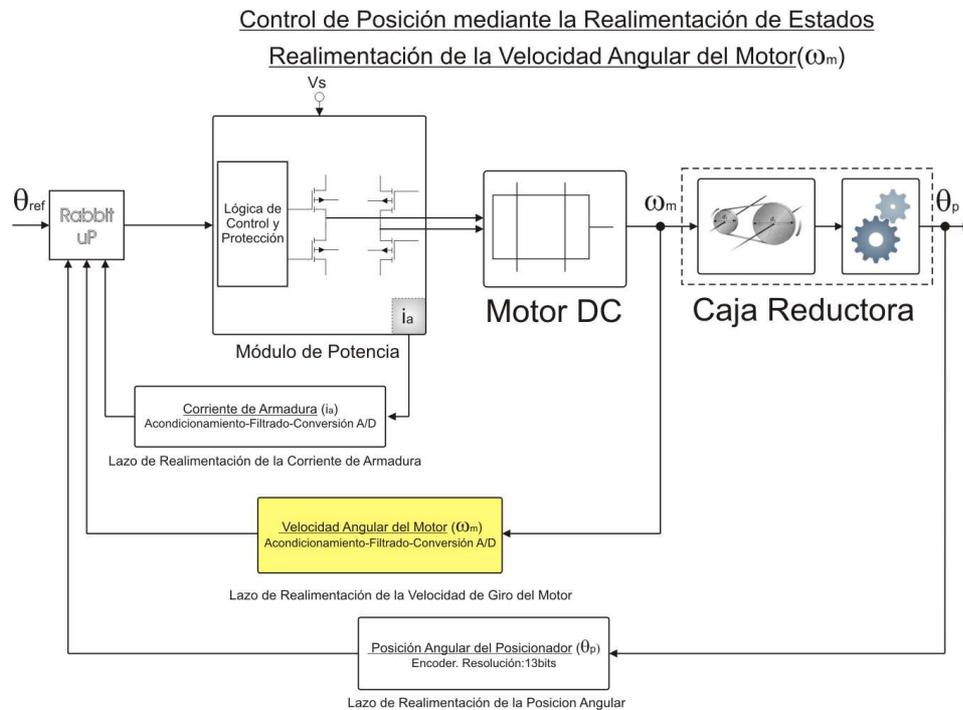


Figura 12.12: Ubicación del canal de adquisición de la posición angular del motor DC en el lazo de control.

De la figura anterior se tiene que los requerimientos del canal de adquisición estarán fijados por:

1. El tacómetro Servo-Tek SA-757A-2 acoplado al eje del motor DC (Transductor).
2. El microprocesador Rabbit3000.

### 12.4.1 Requerimientos Impuestos por el Tacómetro.

Las características técnicas del tacómetro Servo-Tek SA-757A-2 utilizado para adquirir la velocidad instantánea del eje del motor DC para el movimiento en azimut fueron vistas en el Capítulo 8 y su hoja de datos se encuentra en el CD-ROM adjunto.

De acuerdo al fabricante la tensión de salida es proporcional a la velocidad de giro de acuerdo a la siguiente constante de conversión:  $K_{tac} = 7V/1000rpm$ .

Como se vio en el Capítulo 11 la velocidad nominal del motor DC utilizado para el movimiento en azimut es  $\omega_{mn} = 1725rpm$  de manera que la tensión a la salida del tacómetro en condiciones nominales será de  $V_{tac_n} = 12,07V$  olts.

A su vez, debe tenerse en cuenta el valor máximo que puede alcanzar la velocidad de giro obtenida de la respuesta al escalón aplicada al motor DC durante los experimentos básicos previos al experimento de identificación vistos en el Capítulo 9. En la figura 12.13 se muestra la tensión en el tacómetro cuando se excita al posicionador con un escalón de tensión de amplitud 115 volts (recordar que es la amplitud nominal del motor).

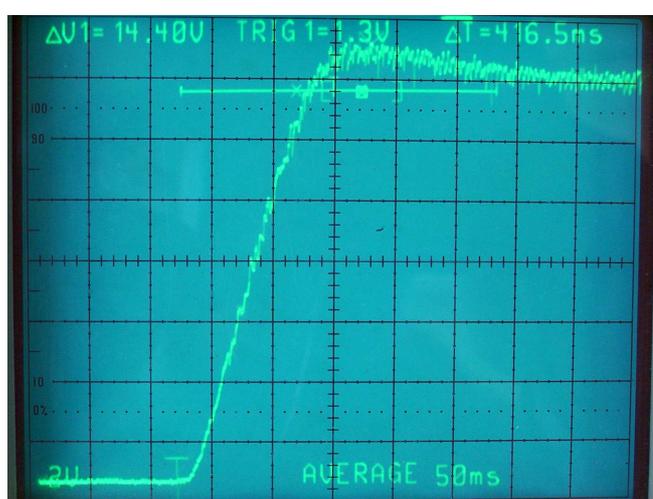


Figura 12.13: Tensión a la salida del tacómetro cuando se excita el posicionador con escalón de tensión de amplitud 115 Volts.

En la figura 12.13 se observa que la amplitud pico alcanzada es 14.4 volts por lo tanto se determina que el canal de adquisición debe ser capaz de detectar valores por encima de dicha amplitud con el objetivo de poder registrar:

1. Transitorios como por ejemplo la respuesta al escalón.
2. Velocidades superiores a la velocidad nominal, en cuyo caso deberá detenerse la marcha del motor.

Considerando lo establecido hasta aquí se especifica lo siguiente:

- El canal de adquisición de la corriente de armadura debe detectar una señal a la entrada de  $\pm 16V$ . O lo que es lo mismo, el rango dinámico de la entrada debe ser de  $32V_{pp}$ .
- Dado que la respuesta de la parte mecánica es mucho más lenta que la respuesta de la parte eléctrica puede asegurarse que el ancho de banda de la señal no superará los 52Hz. Por lo tanto se utilizará el mismo filtro activo que en el canal de adquisición de la corriente de armadura visto en la sección 12.3.

### 12.4.2 Requerimientos desde el Controlador Rabbit3000.

Los requerimientos desde la etapa digital son los mismos que para el canal de adquisición de la corriente de armadura ya que se mantendrá la misma estructura. Los mismos fueron especificados en las secciones 12.3.2 y 12.3.3 y se resumen a continuación:

- La interfaz que comunica el conversor A/D con el microprocesador también debe estar aislada por lo que se mantendrá el diseño utilizando optoacopladores.
- Con el objetivo también de utilizar la menor cantidad de optoacopladores se utilizará una interfaz serie del tipo Serie Sincrónica (SSI) ya que el microprocesador Rabbit3000 posee hasta seis interfaces de este tipo.
- El conversor A/D a utilizar es el ADC0831 de National Semiconductor cuya señal de entrada máxima es 5V.

A partir de la última especificación se determina la ganancia del canal analógico dada por  $G = 5V/32V = 0,15 (V/V)$  o lo que es lo mismo  $G = -16,12dB$ . Por lo tanto, el canal no solo debe filtrar la señal, sino también atenuarla para que pueda ser digitalizada.

### 12.4.3 Resumen de Requerimientos del Canal de Adquisición de Velocidad Angular.

En el Cuadro 12.5 se resumen los requerimientos del canal de adquisición de la corriente de armadura establecidos hasta ahora:

Cuadro 12.5: Requerimientos iniciales del canal de adquisición de la velocidad angular del motor DC.

| Requerimiento                           | Especificación                   |
|---|----------------------------------|
| Rango Dinámico de la tensión de entrada | $32V_{pp}$                       |
| Frecuencia de corte del filtro activo.  | 500Hz                            |
| Ganancia                                | $G=0.15 (V/V)$                   |
| Interfaz con Microprocesador            | Serie Sincrónica (Optoacoplada). |

Al igual que con el canal de adquisición de corriente de armadura, establecidos los requerimientos básicos quedan todavía algunos aspectos de implementación por resolver.

En primer lugar, la señal de salida del tacómetro es una señal diferencial de manera que:

- *El canal de adquisición deberá contar a la entrada con un amplificador diferencial.*

En segundo lugar, aparece el mismo problema que en el caso anterior ya que debe tenerse en cuenta que la señal de entrada es una señal continua que puede tomar valores en el rango  $[-16, 16]$  volts (dependiendo del sentido de giro) y cuyo valor es cero cuando el sistema se encuentra en reposo.



**Etapa 2:** Amplificador diferencial. Se utilizará un amplificador diferencial con el objetivo de lograr altos valores de rechazo de modo común (CMRR). Además se utilizará un amplificador operacional con entrada para señales de referencia con el objetivo de sumar la señal de offset  $V_{off} = 2,5$ .

**Etapa 3:** Filtrado. Se utilizará el mismo diseño utilizado en el canal de adquisición de la corriente de armadura. El mismo estará basado en un filtro de Bessel de cuarto orden con frecuencia de corte  $f_c = 500Hz$ .

**Etapa 4:** Acondicionamiento de Nivel. Esta etapa acondicionará el nivel de señal para que el rango dinámico de la señal de entrada coincida con el máximo rango dinámico posible a la entrada del conversor A/D a modo de “ajuste fino” de la ganancia del canal.

**Etapa 5:** Conversión A/D.

En la figura 12.14 se muestra el diagrama en bloques del canal de adquisición a implementar.

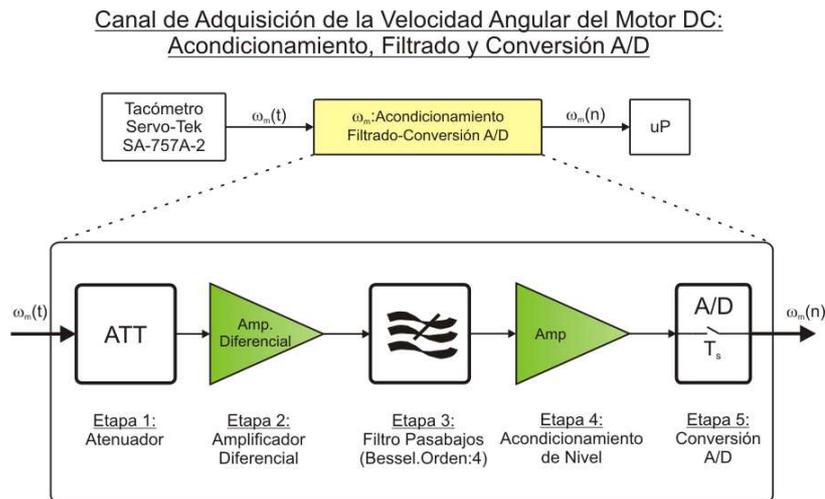


Figura 12.14: Diseño del canal de adquisición de la velocidad angular. Diagrama en bloques.

En las siguientes subsecciones se mostrarán los esquemáticos correspondientes a cada etapa junto con una descripción de sus funciones.

### Etapas 1 y 2. Atenuador y Amplificador Diferencial.

El diseño de la etapa de atenuación y amplificación diferencial se muestra en el circuito esquemático de la figura 12.15 donde se puede distinguir:

- El buffer a la entrada que atenúa 22dB (13.3 veces) la señal de entrada.
- El amplificador diferencial con ganancia  $G_{diff} = 2$  que aumenta el rechazo de modo común del canal y suma la señal de offset ( $V_{off}$ ) a la señal de entrada generada por una fuente de referencia que se verá más adelante.

El amplificador diferencial utilizado es un amplificador de instrumentación AD620 de la firma Analog Devices cuya hoja de datos se encuentra en el CD-ROM adjunto.

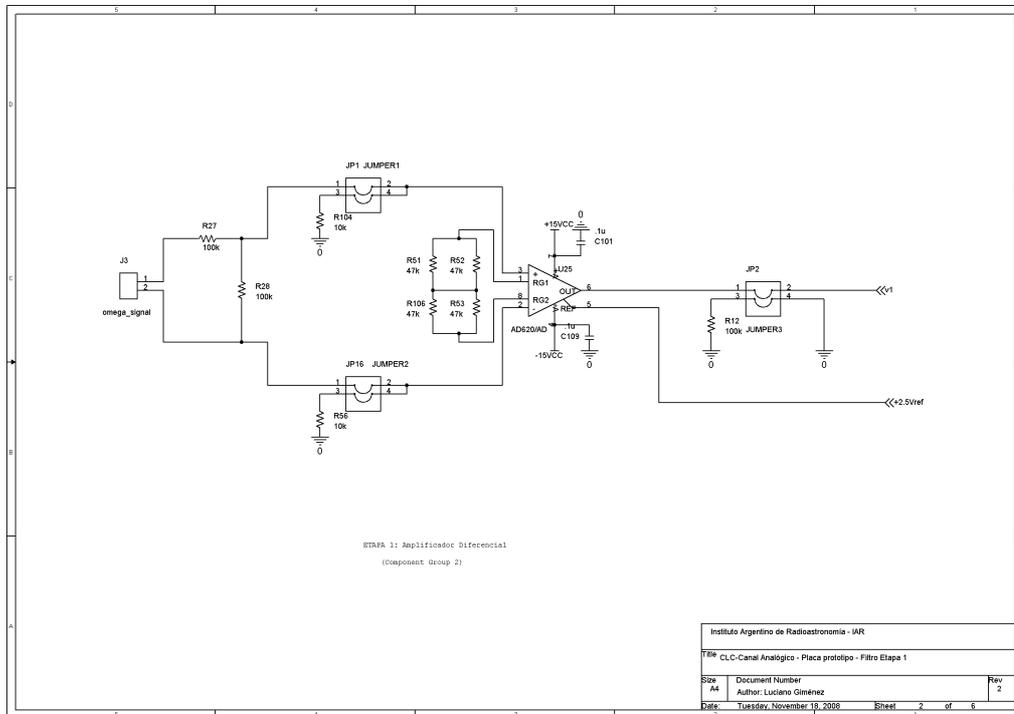


Figura 12.15: Etapa de entrada del canal de adquisición de la velocidad angular.

La salida del amplificador diferencial se conecta a la entrada de la etapa de filtrado (Etapa 3).

### Etapa 3 y 4. Filtrado y Acondicionamiento.

La estructura del filtro activo utilizada es la misma que la vista para el canal de adquisición de la corriente de armadura. La diferencia en este caso es que para la etapa de acondicionamiento se utilizó uno de los amplificadores operacionales del integrado LM348 que anteriormente se usaba como buffer.

El circuito esquemático correspondiente se muestra en la figura 12.16.

Para este caso el filtro de la figura 12.16 posee las siguientes características (recordar que el amplificador tiene ganancia  $G_{diff} = 2$ ) que se muestran en el cuadro 12.8.

Cuadro 12.8: Parámetros de diseño del filtro activo.

| Parámetro                    | Valor Teórico | Valor Medido |
|------------------------------|---------------|--------------|
| Ganancia ( $G_{filt}[V/V]$ ) | 2             | 1.87         |
| Frecuencia de Corte de 3dB   | 500Hz         | 474Hz        |

Como se puede observar en el esquemático 12.16, para el diseño se utilizó un único componente (el integrado LM348) que consiste en cuatro amplificadores operacionales

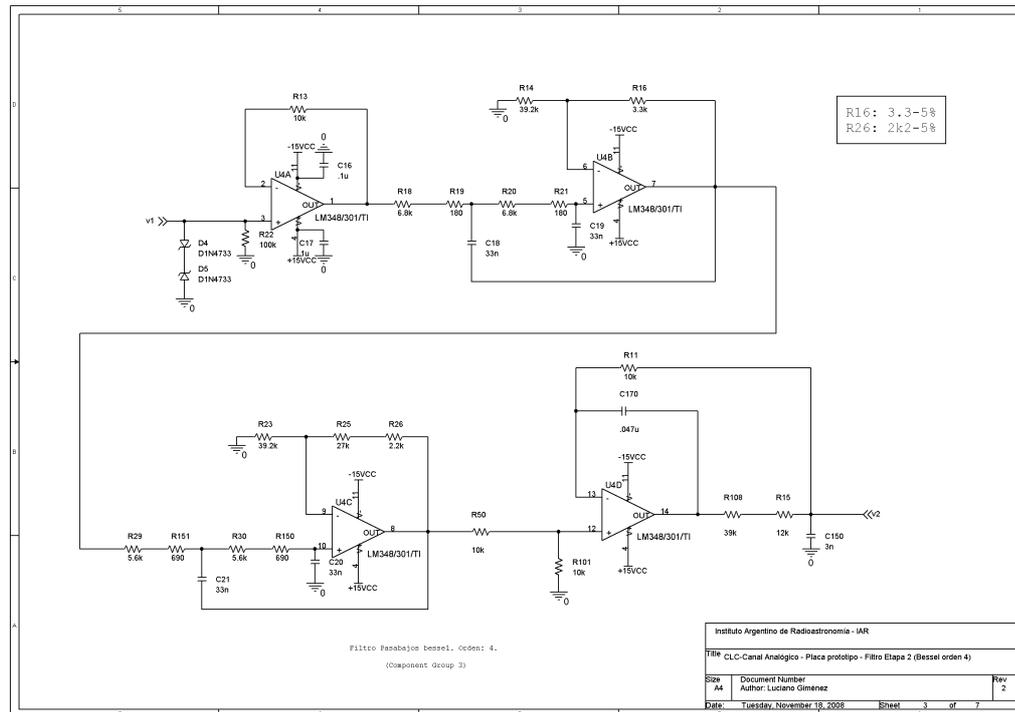


Figura 12.16: Filtro activo y etapa de acondicionamiento del canal de adquisición de la velocidad angular.

LM741. Los resultados de simulación y los medidos del canal completo se verán más adelante.

### Etapa 5. Conversión A/D.

La etapa de conversión analógica/digital es exactamente igual a la utilizada en el canal de adquisición de la corriente de armadura. El circuito diseñado se muestra en la figura 12.17 donde se puede observar que se encuentra basada también en el conversor ADC0831 de National Semiconductor y optoacopladores 6N137 que permiten la comunicación con el controlador digital.

Al igual que en el caso anterior, a través del pin 5 (REF) del conversor ADC0831 se seteó el rango dinámico de la tensión de entrada correspondiente al rango de códigos binarios de 0 a 255 mediante una tensión de referencia  $V_{ref} = 5$  volts similar a la diseñada previamente. Ésto se verá en la sección siguiente.

### Fuentes de Referencia.

Con el objetivo de mejorar el diseño y aprender aún más sobre fuentes de referencias es que se rediseñaron las mismas incorporándose una etapa de filtrado a la salida de cada una con el objetivo de filtrar el ruido generado por el amplificador operacional. El diseño resultante se muestra en la figura 12.18

Se puede observar que el diseño la tensión de offset  $V_{off} = 2,5Volts$  sigue basado en generar una tensión de referencia a partir del integrado LM336 con la diferencia que se

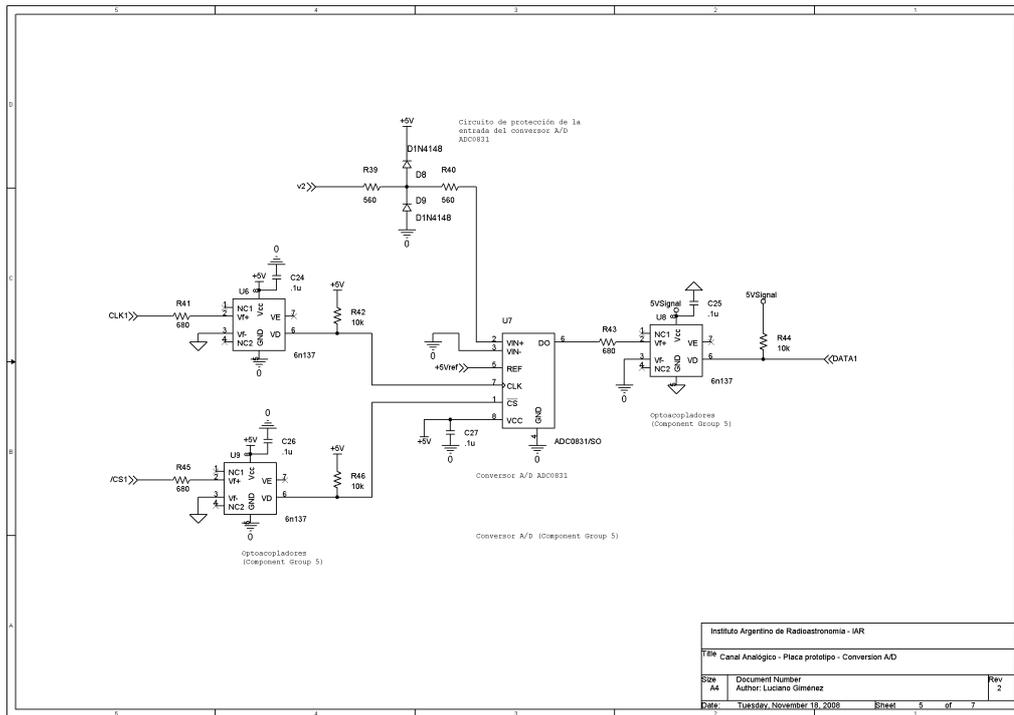


Figura 12.17: Etapa de conversión A/D del canal de adquisición de velocidad angular.

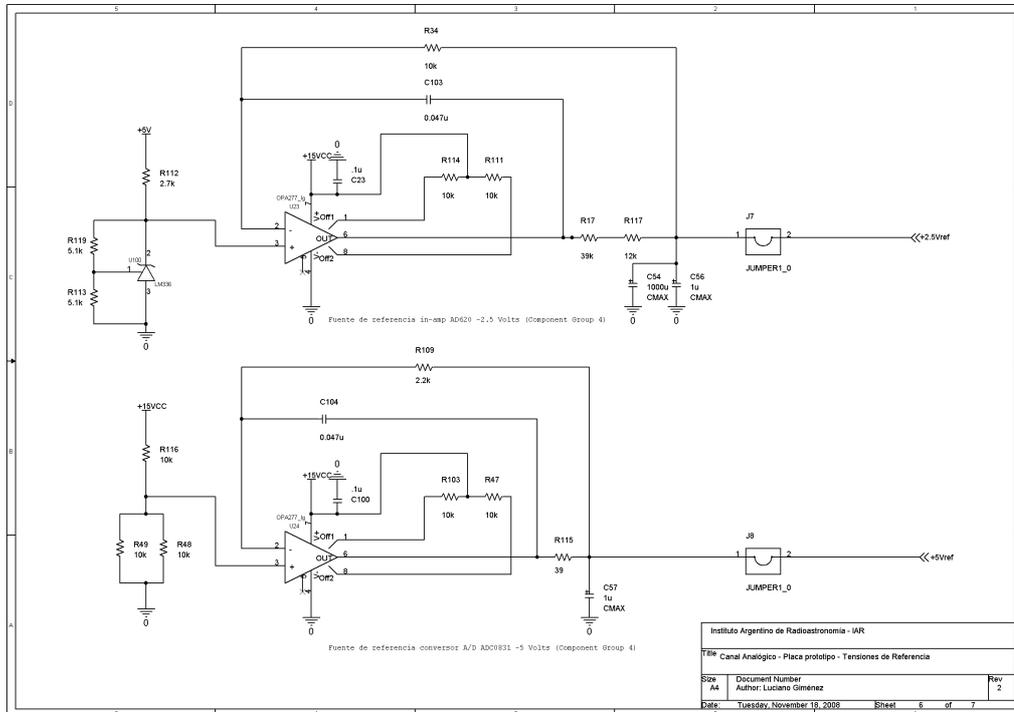


Figura 12.18: Fuentes de referencia rediseñadas utilizadas en el canal de adquisición de la velocidad angular.

utiliza ahora un amplificador operacional de precisión OPA277 de la firma Burr-Brown

(ver hoja de datos en el CD-ROM) el cual posee a la salida un filtro con frecuencia de corte 0.3Hz.

En el caso de la tensión de referencia que ajusta la escala del convertor A/D se utilizó un divisor de tensión a la entrada del amplificador operacional OPA277.

### Comunicación con el Microprocesador.

Al igual que con la etapa de conversión A/D, se repitió el diseño que permite la comunicación con el microprocesador Rabbit3000 mediante el circuito integrado 74HCT14. El circuito esquemático se muestra en la figura 12.19.

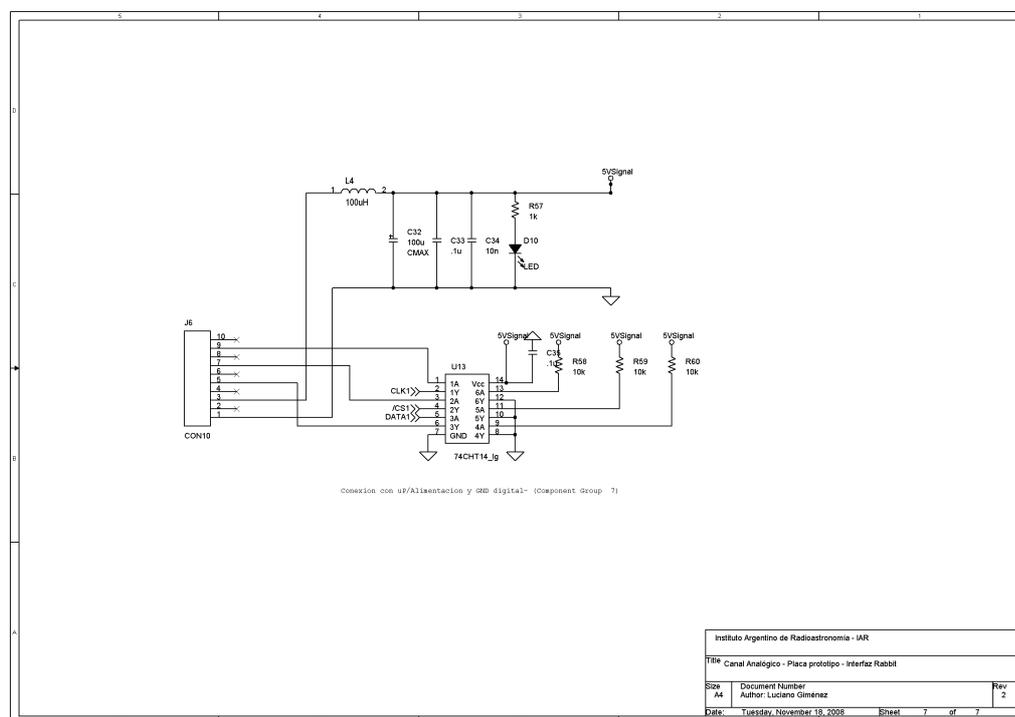


Figura 12.19: Esquemático del circuito utilizado como interfaz con el microprocesador.

Finalizado el diseño del canal de adquisición de la velocidad angular se procedió a la simulación y construcción del mismo. En la sección siguiente se mostrará las respuesta en frecuencia del canal real y simulado haciendo hincapié en los dos parámetros de interés: la ganancia y la respuesta en frecuencia del canal de adquisición.

### Simulación y Medición del Canal de Adquisición de Velocidad Angular.

Una vez diseñado el canal de adquisición se procedió a la simulación del mismo. La respuesta en frecuencia del canal completo simulada utilizando la herramienta PSpice de Orcad se muestra en la figura 12.20.

Como se puede observar en la simulación se verifica que:

1. La ganancia en la banda de paso es de  $-17,05dB$  que corresponde a una ganancia de tensión  $G_{canal} = 0,13[V/V]$  cuando lo especificado es  $G = 0,15[V/V]$ .

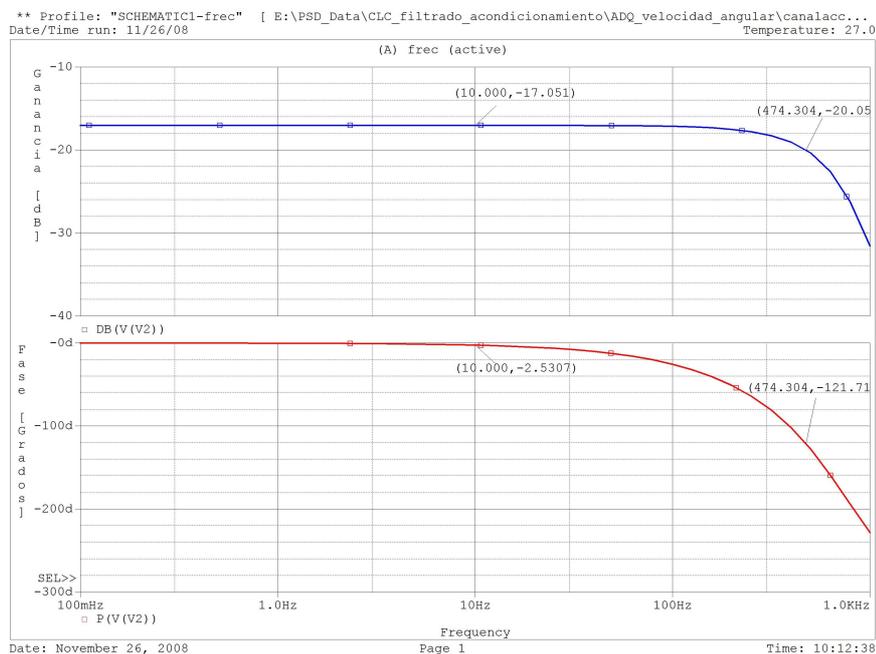


Figura 12.20: Respuesta en frecuencia simulada del canal de adquisición de la velocidad angular  $\omega_m(t)$ .

2. En ancho de banda de  $3dB$  es  $474Hz$ .
3. El desfazaje en la banda de interés ( $100Hz$ ) es menor a  $30$  grados.

Por lo tanto, siendo aceptables los resultados de la simulación, se procedió a la construcción de la placa.

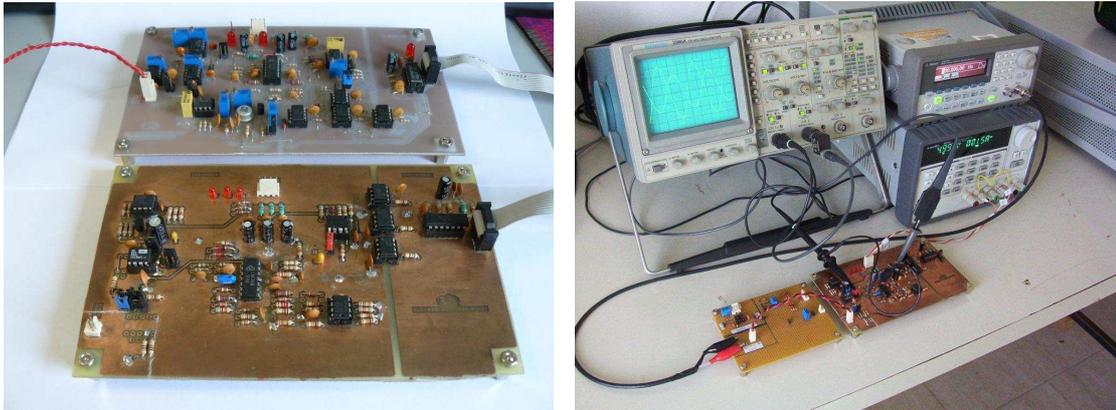
La placa construida se muestra en la figura 12.21 junto con la placa del canal de adquisición de la corriente de armadura donde se puede observar la similitud en el diseño de ambas. También se puede observar el arreglo de instrumentos para medir el comportamiento de la misma. Particularmente en la figura 12.21(b) se muestra el banco de medida de la respuesta en frecuencia del canal donde se utilizaron los mismos instrumentos que para el otro canal: un generador de señal Hewlett Packard 34401A y un osciloscopio Tektronix 2232A para llevar a cabo un barrido en frecuencia desde  $1Hz$  hasta  $1kHz$ .

El resultado del barrido en frecuencia se muestra en la figura 12.22.

A partir de la figura 12.22 se tiene que el sistema real verifica los resultados de la simulación de manera que el diseño se validó en la práctica y será utilizado en el lazo de control del posicionador para realimentar el estado  $\omega_m(t)$ .

Hasta aquí se describieron los dos canales a utilizar en la adquisición de las variables de estado para los cuales fue necesario incorporar una etapa de procesamiento analógico de señales (filtrado y acondicionamiento) y conversión analógico digital.

Queda por analizar la adquisición de la posición. Esto se verá en la sección 12.5.



(a) Canal de adquisición de adquisición de  $\omega_m(t)$  (b) Banco de medición de la respuesta en frecuencia del canal analógico.

Figura 12.21:

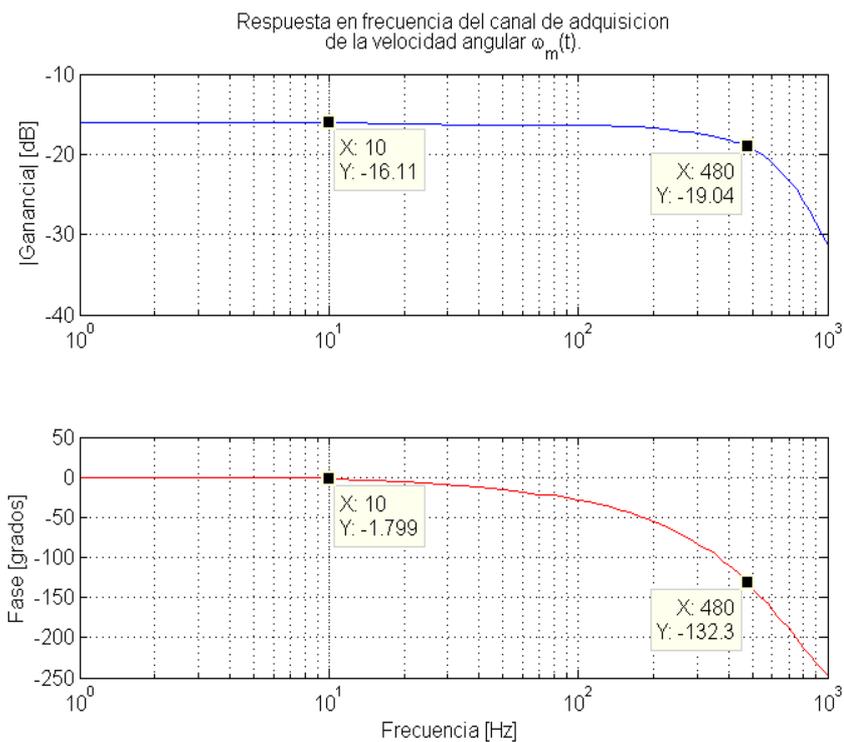


Figura 12.22: Respuesta en frecuencia medida del canal de adquisición.

## 12.5 Adquisición de la Posición Angular. Comunicación con el Transductor de Posición (*Encoder*).

La ubicación del subsistema encargado de la adquisición de la posición se muestra en la figura 12.23.

La adquisición de la posición angular se limita solamente a construir la interfaz necesaria que permita la comunicación del controlador digital con el encoder cuya salida es

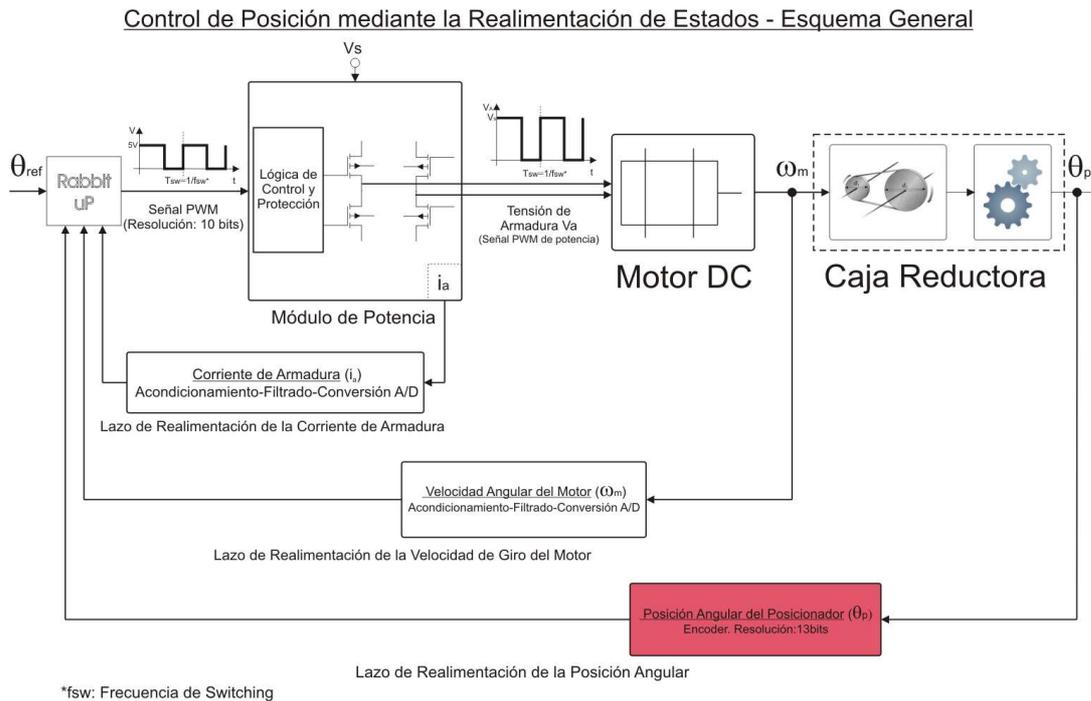


Figura 12.23: Ubicación en el lazo de control del subsistema encargado de la adquisición de la posición.

digital de acuerdo a las especificaciones del fabricante.

En esta sección se mostrará el circuito implementado y las funciones de C que comandan la adquisición de la posición ( $\theta_p(t)$ ).

### 12.5.1 Requerimientos.

De acuerdo a la hoja de datos del encoder de posición y a lo visto en el Capítulo 8 cuando se analizó su funcionamiento se tiene que para establecer la comunicación debe implementarse:

- Un canal de comunicación bajo el estándar RS-485 utilizando una Interfaz Serie Sincrónica (SSI) cuya frecuencia de reloj debe encontrarse en el rango de los 100 a los 500kHz.
- Una entrada optoacoplada conectada al canal de datos de donde se recibirá la señal que contiene el dato de posición desde el encoder hacia el microprocesador.
- Un decodificador de código Gray. El mismo será implementado por software.

Si bien la interfaz parece sencilla, debe tenerse en cuenta que se dispone de la interfaz sincrónica SSI incorporada en el microprocesador como un periférico “on-chip” además de las librerías para su manejo lo cual simplifica y acorta los tiempos de desarrollo.

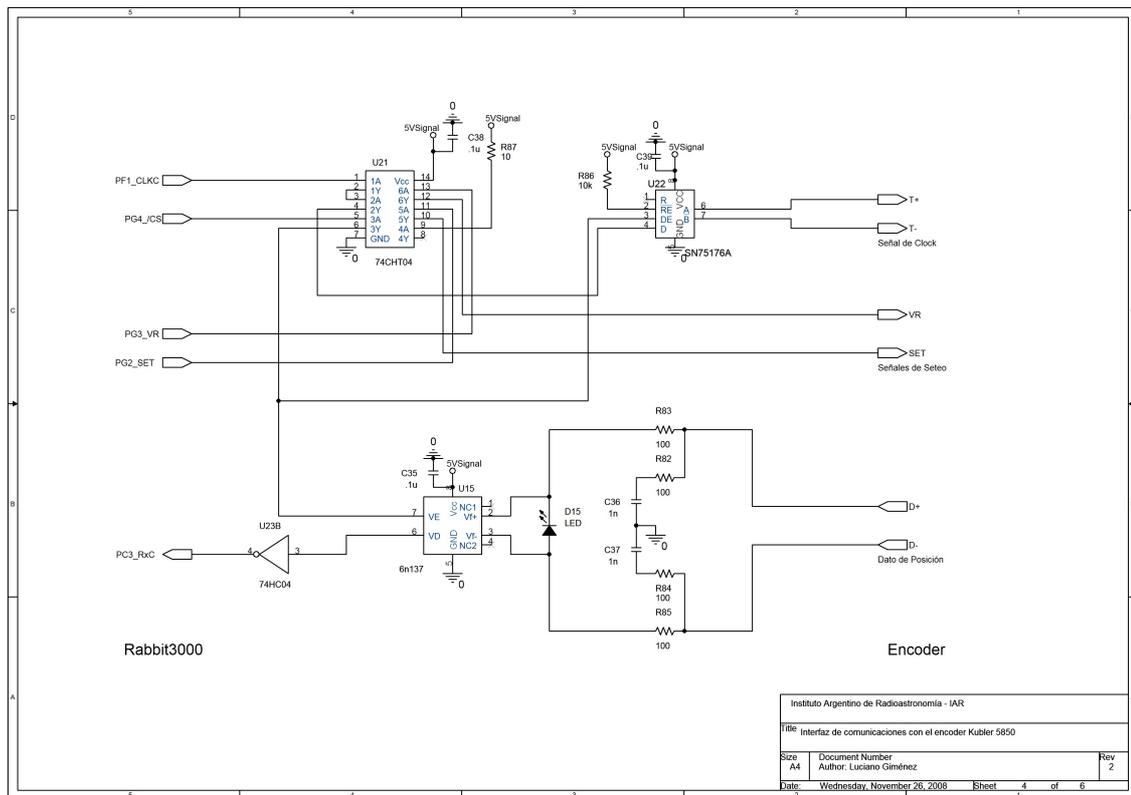


Figura 12.24: Circuito utilizado para la adquisición de la posición angular en azimut  $\theta_{pt}$ .

### 12.5.2 Circuito de Comunicación con el Encoder.

El circuito esquemático de la interfaz de comunicaciones con el encoder se muestra en la figura 12.24.

El circuito encargado de la transmisión de la señal de reloj (Clock) consiste en un integrado 74HCT04 que actúa como buffer para convertir los niveles lógicos CMOS a niveles lógicos TTL y el integrado SN75176A que convierte la señal TTL en una señal diferencial de acuerdo al estándar RS-422.

El circuito de recepción consiste en una red RC que adapta la impedancia del canal de comunicaciones y un optoacoplador 6N137. Dicho esquema es sugerido por el fabricante para asegurar la correcta recepción de los datos.

Las señales VR y SET son señales de control del encoder y serán manejadas desde compuertas de entrada/salida (I/O) estándar del microprocesador.

La frecuencia de reloj a utilizar será de 300kHz.

### 12.5.3 Funciones en C utilizadas para la comunicación.

En esta sección se muestran brevemente las funciones escritas en el entorno de desarrollo Dynamic C para la adquisición de la posición del encoder y la decodificación del código Gray.

**Adquisición del dato de posición.** Para la adquisición de la posición se escribió la función `pos_adq_bin()` la cual utiliza la función de librería `SPIRead()` que adquiere

2 bytes cada vez que se comunica con el encoder. Dado que de los 16 bytes adquiridos solamente contienen información 13 de ellos (recordar que la resolución del encoder es 13 bits) el dato es acomodado mediante operaciones de bits.

La decodificación del código Gray se realiza mediante el llamado a la función

`gray_decoder()`.

Finalmente la función devuelve la posición adquirida en código binario natural. El código de la función `pos_adq_bin()` se muestra a continuación:

```
unsigned int pos_adq_bin()
{
char posbyte_read[2];
// Necesito 13 bits por lo tanto leo 2 bytes

unsigned int pos_sample,pos_sample_gray,pos_sample_bin;

/*CS->H*/
BitWrPortI(PGDR,&PGDRShadow,0,0);

//Por default genera 8 pulsos de clk.
SPIRead(posbyte_read, 2);
/*CS->L*/
BitWrPortI(PGDR,&PGDRShadow,1,0);
pos_sample = posbyte_read[0];
pos_sample <<=8;
pos_sample +=posbyte_read[1];
/*Los primeros 3 bits del dato de
posición son cero.*/
pos_sample_gray=(pos_sample>>2)& 0x1fff;
pos_sample_bin=gray_decoder(pos_sample_gray);

return(pos_sample_bin);
}
```

**Decodificación del dato recibido.** La función utilizada para la decodificación de la posición recibida en código Gray se muestra a continuación.

```
unsigned int gray_decoder(unsigned int pos_gray)
{
  unsigned int pos_bin,pos_shift;
  int rsh;

  pos_bin=pos_gray;
  //PASO 1:bn=gn
  pos_shift=0;
  rsh=1;
  for(;;) {
  pos_bin=pos_bin^(pos_shift=pos_bin>>rsh);
    if(pos_shift==0|rsh==8){
      return(pos_bin);
    }
    else{
      rsh=rsh<<1;
    }
  }
}
```

Para más información referirse a [40].

Para ver el código completo referirse a la carpeta “*Software*” del CD-ROM adjunto.

Con esta sección se pone fin a la descripción del hardware utilizado para la realimentación de los estados del sistema.

La integración de los mismos al sistema del control así como la puesta en marcha del sistema de control a lazo cerrado se verán en el capítulo 13.

## 12.6 Resumen.

En este capítulo se mostró el proceso de diseño e implementación del hardware a utilizar para la adquisición de las variables de estado del posicionador de antena que permitirán la implementación del control a lazo cerrado.

De esta manera quedan definidos todos los subsistemas a utilizar para el control del posicionador en la primera etapa del proyecto.

Si bien los resultados obtenidos fueron positivos debe tenerse en cuenta que el desarrollo es a nivel prototipo de manera que no se descartan evoluciones y modificaciones futuras a partir de las conclusiones que se extraigan del funcionamiento del sistema a lazo cerrado.

# Capítulo 13

## Implementación del Control por Modo Deslizante del Posicionador de Antena. Resultados Obtenidos.

### 13.1 Introducción.

El presente constituye el último capítulo en el que se discutirán aspectos técnicos sobre el proyecto de automatización de la cámara anecoica del IAR ya que el último capítulo del informe (Capítulo 14) se reserva para las conclusiones finales sobre el trabajo realizado.

Hasta aquí se trató por separado cada uno de los subsistemas que componen el sistema de control sin hacer hincapié en el controlador digital el cual, además de proveer los medios de comunicación y control como se vio en los capítulos anteriores deberá realizar los cálculos aritméticos necesarios para establecer el control por modo deslizante. Además deberá ser capaz de implementar módulos de software que generen la señal de referencia e implementen un estado integral como parte del sistema de control diseñado en el Capítulo 11.

Finalmente se muestran los resultados obtenidos en el control del posicionador mediante el control por modo deslizante y las conclusiones obtenidas al respecto.

### 13.2 Funciones del Microprocesador Rabbit3000 en el Lazo de Control. Integración de los distintos Subsistemas.

El sistema de control a implementar analizado en los capítulos anteriores se repite a continuación en la figura 13.1. En ella se puede observar los distintos subsistemas que fueron objeto de interés a lo largo de los sucesivos capítulos entre los que se incluyen:

1. El microprocesador Rabbit3000 cuya selección fue objeto de estudio y además fue utilizado para distintos experimentos y pruebas a lo largo del proyecto.
2. El subsistema Electrónica de Potencia cuya especificación, diseño y construcción se trató en el Capítulo 8.

3. El posicionador de antena cuyo modelo matemático debió ser obtenido mediante técnicas de Identificación de Sistemas y que abarcó gran parte de las actividades desempeñadas en el proyecto.
4. El canal de adquisición de la corriente de armadura  $i_a(t)$ . Recordar que no se tiene en cuenta para el control como inicialmente se preveía para esta etapa pero será utilizada para el monitoreo del sistema y evoluciones futuras.
5. Los canales de adquisición de las variables de estados del sistema a controlar: velocidad de giro del motor DC  $\omega_m(t)$  y la posición angular en azimut del posicionador  $\theta_p(t)$ , ésta última siendo la variable de mayor importancia ya que es uno de los datos necesarios para la conformación de los diagramas de radiación de las antenas a medir en el campo de medida.

Queda entonces resolver el problema de unir todos estos subsistemas los cuales, como es evidente, se vinculan a través del controlador digital el cual provee la “inteligencia” del sistema de control.

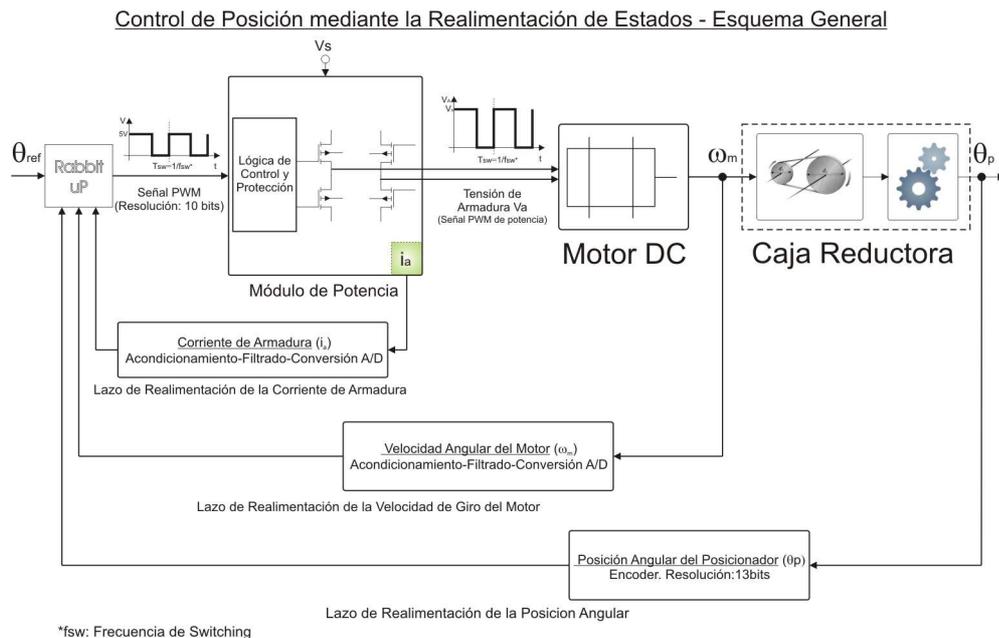


Figura 13.1: Estructura propuesta para el lazo de control.

Si bien el esquema de la figura 13.1 podría ser llevado a la práctica y permitir el movimiento controlado del posicionador el objetivo es implementar el control diseñado y simulado en el Capítulo 11 cuya estructura se repite en la figura 13.2.

Comparando las figuras 13.1 y 13.2 se puede observar que para llevar a la práctica el control diseñado queda todavía por implementar:

1. El bloque conmutador (“Relay”).
2. El cálculo de la señal  $s(x)$ .

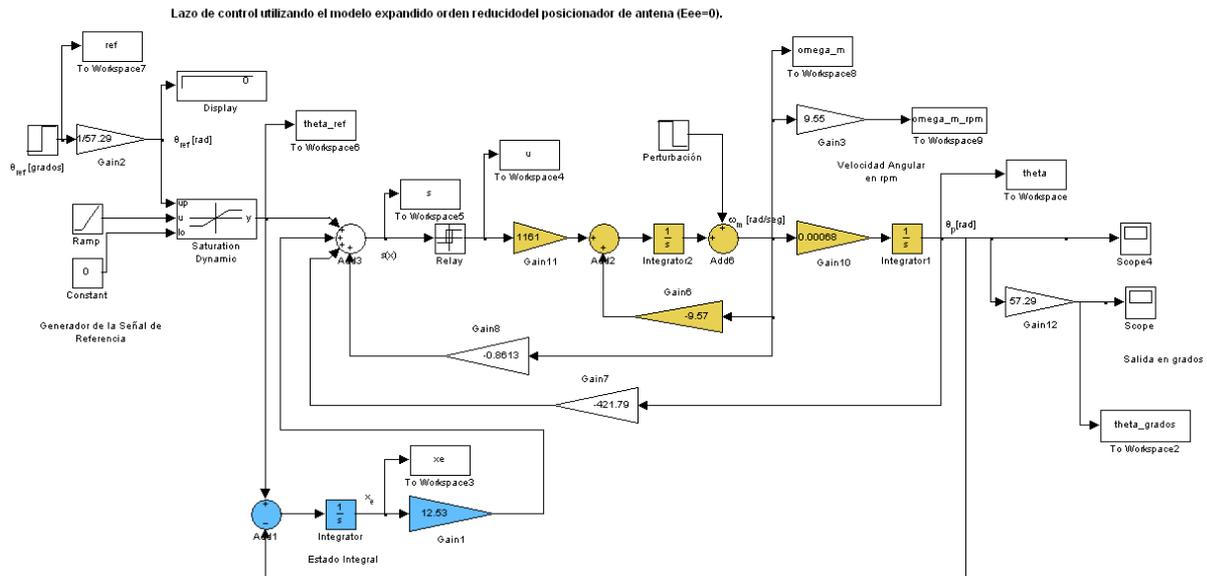


Figura 13.2: Estructura del lazo de control a implementar para obtener el control por modo deslizante.

3. La generación de la señal de referencia  $\theta_{ref}(t)$  ya que como se vio en el Capítulo 11 se utilizará una función rampa para indicar la posición final a la que deberá moverse el posicionador.
4. El cálculo del estado integral  $x_e(t)$ .

Dichos bloques fueron implementados en el controlador Rabbit3000 de manera digital. Por lo tanto las funciones del microprocesador Rabbit3000 dentro del lazo de control pueden resumirse en la figura 13.3

En las siguientes secciones se verá como se llevó a cabo la implementación de dichas funciones.

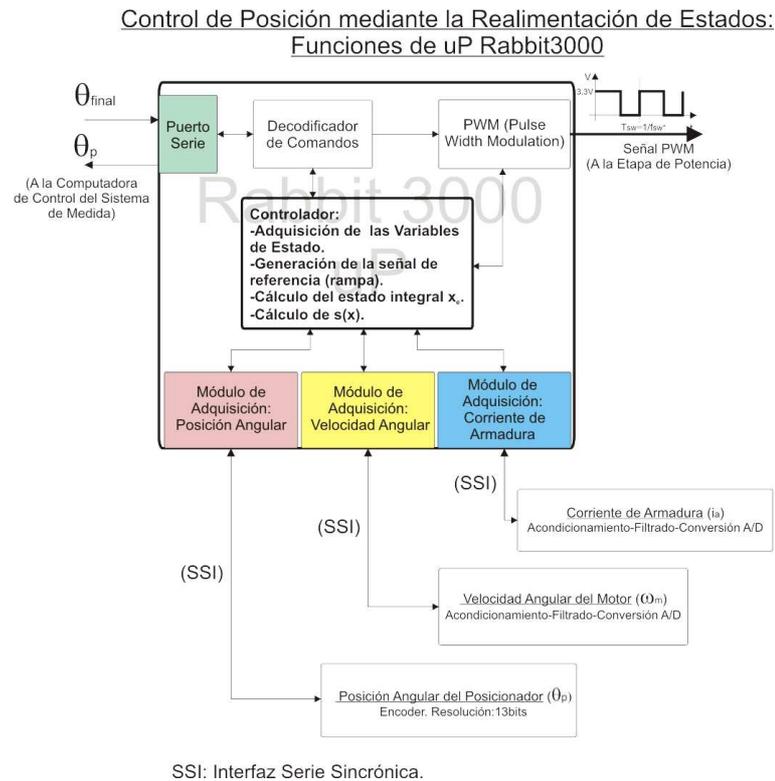


Figura 13.3: Funciones principales del microprocesador Rabbit3000 en el lazo de control.

### 13.3 Implementación Práctica del Bloque Conmutador. Cálculo de $s(x)$ .

Como se vio en la teoría de control por modo deslizante para lograr dicha estrategia de control es necesario incluir un bloque que permita conmutar el estado del sistema siendo el ejemplo típico un relay ideal que conmuta entre dos estados. Por ejemplo, en el diseño y simulación del lazo de control se utilizó un relay ideal que conmutaba su salida entre los valores 0 y 1 dependiendo del signo de la función  $s(x)$ .

Si bien en la práctica se puede utilizar una llave electrónica como relay es muy común que se cuente con un módulo generador de una señal PWM que puede considerarse como un bloque conmutador que conmuta a una frecuencia fija (la frecuencia de switching).

El esquema general de generación de dicha señal PWM se muestra en la figura 13.4 donde se utiliza una señal triangular auxiliar para determinar el estado del relay obteniéndose a la salida una señal PWM ( $u$ ).

Se puede demostrar (ver [16]) que el ciclo de trabajo de la señal PWM estará dado por el valor instantáneo de la señal  $s(x)$  que no es más que la señal de error del lazo de control (o visto de otra manera, el apartamiento de la superficie  $s(x) = 0$ ).

En el caso del control del posicionador, la generación de la señal PWM se encuentra resuelta en el periférico “on-chip” del Rabbit3000 de manera que el problema consiste en el cálculo del valor instantáneo de  $s(x)$  que determinará el ciclo de trabajo de la señal PWM generada por el controlador y que será amplificada por los módulos de potencia. Para esto se utilizará la función de librería `pwm_set()` cuyo parámetro es un valor entre

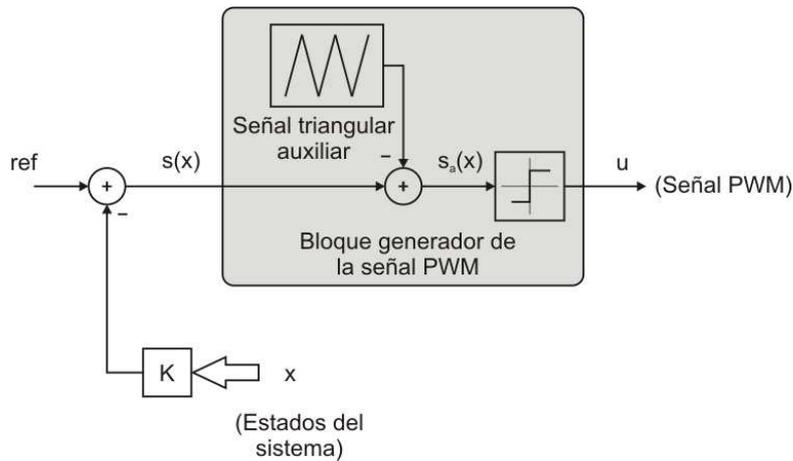


Figura 13.4: Señal PWM con ciclo de trabajo definido por  $s(x)$

0 (que corresponde al 0% del ciclo de trabajo) y 1024 (100% del ciclo de trabajo).

De acuerdo al modelo de control establecido (ver Capítulo 11) la acción de control  $u$  puede tomar valores solamente entre 0 y 1, de forma que el valor instantáneo de  $s(x)$  que determina el ciclo de trabajo podrá tomar cualquier valor entre 0 y 1 lo cual deberá traducirse en el rango 0 a 1024.

Fuera de estos límites, el ciclo de trabajo sera del 0% o 100% lo que equivale a alcanzar la acción máxima del control del sistema.

Lo anterior se implementó mediante una función llamada `s_x()` cuyos parámetros son los valores instantáneos del posicionador de antena y cuyo código se muestra a continuación:

```
float s_x(float theta_ref,float act_pos,float act_vel,float xe)
{
float sx;
sx=(theta_ref)-0.8516* act_vel-421.79* act_pos+12.53* xe;
return(sx);
}
```

En la función anterior se puede observar que la ecuación utilizada para el cálculo de la variable `sx` es la ecuación que define la superficie de conmutación diseñada en el Capítulo 11 cuya expresión se repite a continuación:

$$s(x) = \theta_{ref} - 0,861\omega_m - 471,9\theta_p + 12,53x_e \quad (13.1)$$

Una vez obtenido el valor de `sx` se procede a calcular el ciclo de trabajo teniendo en cuenta los límites superior e inferior. Para esto se utilizó la función `pwm_cycle()` cuyo código está dado por:

```
long int pwm_cycle(float sx)
{
int pwm;

if(sx<0)
pwm=0;
else if (sx>1)
pwm=1024;
else
pwm=(int)sx*1024;

return(pwm);
}
```

Función que devuelve el valor de la variable pwm que puede tomar valores entre 0 y 1024. Dicha variable se utiliza entonces para determinar el ciclo de trabajo de la señal generada por el microprocesador rabbit mediante la función `pwm_set(pwm)` y que será amplificada por la etapa de potencia para ser aplicada en la forma de tensión de armadura del motor DC.

## 13.4 Implementación del Estado Integral.

La implementación digital de un estado integral se realiza mediante la implementación de un sistema discreto cuyo modelo de estados está dado por:

$$x_e[k + 1] = x_e[k] + (\theta_{ref}[k] - \theta_p[k]) \quad (13.2)$$

$$y[k] = x_e[k] \quad (13.3)$$

donde  $y[k] = x_e[k]$  es la salida de dicho bloque y coincide con el estado integral, y  $x_e[k+1]$  es el valor del estado integral a utilizar en la próxima iteración.

La implementación del integrador digital se realizó mediante la siguiente función:

```
float xe_calc(float loop_error,float theta_ref,
             float theta_act,float delta_T)
{
static float  xe_next;
float error,xe,y;
  #GLOBAL_INIT{
xe_next=0;
}

  error=theta_ref - theta_act;
  if(loop_error>=0.008)
  {
  xe=xe_next;
  xe_next=xe+error;
  }
  y=xe*delta_T;
return(y);
}
```

donde:

- `loop_error` es el error total entre la posición deseada final y la posición actual.
- `theta_ref` es la señal de referencia instantánea  $\theta_{ref}[n]$  que está ingresando al lazo de control (recordar que se genera a través de una rampa).
- `error` es el error entre la señal de referencia  $\theta_{ref}[n]$  y la posición actual del posicionador.
- `theta_act` es la posición actual del posicionador de antena ( $\theta_p[n]$ ).
- `delta_T` es el tiempo entre un llamado a la función y el siguiente.
- `y` es el valor del estado integral en tiempo continuo.

El valor de retorno (`y`) es el que se utilizará para el cálculo de  $s(x)$ .

## 13.5 Generación de la Señal de Referencia Utilizando una Función Rampa.

Para la generación de la señal de referencia  $\theta_{ref}[n]$  que ingresa al lazo de control se escribió un función en C que incrementa el valor de dicha variable con una pendiente de 0.08

cada  $\Delta T$  segundos hasta alcanzar el mismo valor que la posición final deseada por el usuario ( $\text{final\_pos}$ ). Una vez alcanzado dicho valor permanecerá allí y será la posición final que deberá alcanzar el posicionador de antena.

```
float ramp_theta(float theta_ref,float final_pos,
                float delta_T)
{
    static float thetoref_error;
    thetoref_error=final_pos- theta_ref;
    if(thetaref_error>=0.001)  {
        theta_ref+=0.08*delta_T;
    }
    return(theta_ref);
}
```

Cabe aclarar que para el valor de pendiente establecido la variable  $\theta_{ref}[n]$  alcanza su valor final antes que el posicionador (Ver simulaciones del Capítulo 11).

## 13.6 Determinación de la Frecuencia de Muestreo.

Como se puede observar, el modelo utilizado para el diseño del sistema de control es el modelo continuo del posicionador de antena de manera que **el control por modo deslizante es del tipo continuo** lo que obliga a utilizar una frecuencia de muestreo lo suficientemente alta para que la inclusión de un controlador digital y de los bloques de adquisición (o muestreo y retención) no afecten el comportamiento del sistema a lazo cerrado.

Por otro lado, como criterio de diseño de sistemas de control por modo deslizante continuo, *la frecuencia de muestreo debe ser, al menos 10 veces mayor que la frecuencia de corte del sistema* [13].

Por lo tanto, en base a que:

- El ancho de banda del sistema a controlar (posicionador) obtenido a partir del modelo es de  $337\text{rads/seg}$  ( $53,6\text{Hz}$ ).
- La frecuencia de muestreo debe ser al menos diez veces la frecuencia de corte del sistema.
- El microprocesador rabbit es capaz de muestrear el sistema cada 1 milisegundo (verificado en el experimento de identificación).

se establece que **la frecuencia de muestreo a utilizar es  $f_s = 1\text{kHz}$** .

## 13.7 Implementación del Sistema de Control a Lazo Cerrado. Resultados Obtenidos.

Finalizada la programación del microprocesador incluyendo, además de las funciones vistas en las secciones anteriores, aquellas funciones que permiten el control y seteo del sistema

en general se procedió a la unión de todos los subsistemas desarrollados para realizar las pruebas correspondientes.

El programa utilizado se denominó `Control_posicionador_LC.c` y se adjunta en el CD-ROM.

En la figura 13.5 se muestra el sistema de control del posicionador con todos los subsistemas interconectados. El mismo está conectado a una computadora personal que provee una interfaz de usuario básica a través al puerto serie RS-232 del microprocesador Rabbit3000.

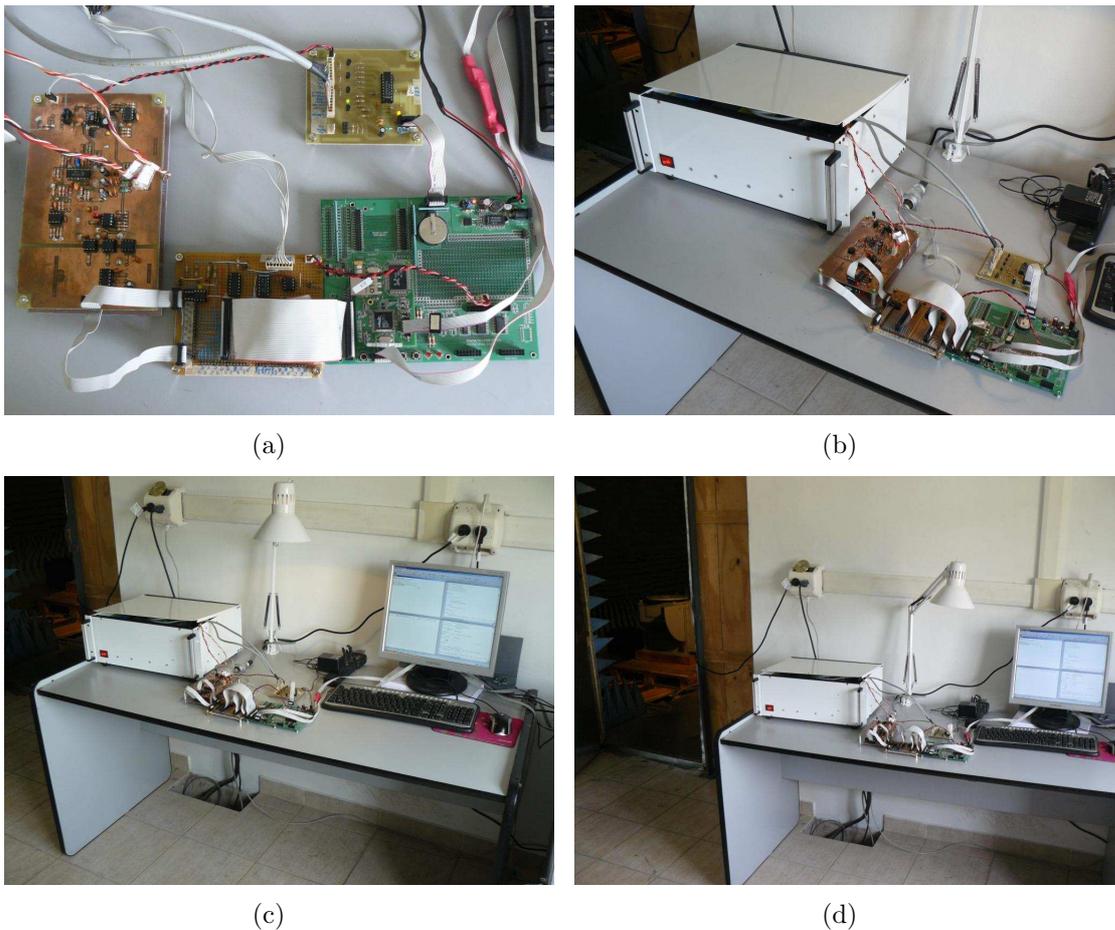


Figura 13.5: Sistema de control del posicionador de antena. Integración.

Una vez funcionando el sistema se procedió a poner en movimiento el posicionador y a la adquisición del valor que toman los estados del sistema en tiempo real a través del puerto serie.

Los resultados para movimientos de 90 y 360 grados se muestra en la sección siguiente.

### 13.7.1 Resultados Obtenidos.

Los resultados que se muestran a continuación corresponden al comportamiento del control de posición cuando se le indica, mediante la consola corriendo en la computadora personal, que gire 90 grados en el primer caso y 360 grados en el segundo. Si bien se ensayaron varias

posiciones finales, estas resultan de interés ya que permitirán comparar con los resultados de simulación para el modelo propuesto en Capítulo 11.

A modo solamente de prueba, también se analiza la respuesta del sistema cuando se aplica una carga a modo de perturbación durante el movimiento del posicionador. Esto se muestra más adelante.

### Sobre la Adquisición de Datos en Tiempo Real.

Si bien el controlador digital es capaz de controlar el sistema manteniendo una frecuencia de muestreo de 1kHz, cuando se indica al sistema que transmita el dato de posición, velocidad angular y el estado integral para poder analizar el comportamiento del vector de estados, los retardos generados en la ejecución del programa hacen que la frecuencia de muestreo se reduzca a 482Hz (medido experimentalmente) o lo que es lo mismo, que cada muestra se adquiere con una tasa de muestreo  $T_s = 2,076$  milisegundos (la mitad de lo pretendido).

Si bien la frecuencia de muestreo sigue cumpliendo con el teorema del muestreo aparecen los efectos de “*chattering*” en el control vistos en el Capítulo 6 y que consisten en un mayor apartamiento de la superficie de deslizamiento entre cada instante de muestreo.

Si bien dicho efecto no favorece al control por modo deslizante y por lo tanto debería utilizarse una forma más rápida de transmitir los datos, la interfaz serie es la interfaz más rápida de la que se dispone a la hora de escribir este informe.

Por lo tanto, se pide al lector que tenga en cuenta que en condiciones de funcionamiento normales el apartamiento de la superficie  $s(x) = 0$  que se verá en los gráficos siguientes debe ser considerablemente menor.

### Respuesta del Sistema para $r = 90^\circ$ .

El primer ensayo al que se sometió el sistema de control fue girar 90 grados a partir de una posición inicial que se consideró como cero. De acuerdo a las simulaciones y la dinámica de lazo cerrado asignada es de esperar que el sistema evolucione la mayor parte del tiempo en modo deslizante alrededor de la superficie  $s(x) = 0$ .

En la figura 13.6 se muestra la evolución de los estados del sistema (recordar que la frecuencia de muestreo se reduce a la mitad para adquirir los datos en tiempo real) donde se puede observar que el sistema real (curvas en rojo) se comporta de forma muy similar al sistema simulado, principalmente en lo que respecta a la evolución de la posición angular  $\theta_p$ .

En el caso del estado velocidad angular  $\omega_m(t)$  y del estado integral  $x_e(t)$  los efectos de *chattering* se encuentran más pronunciados.

Si bien el comportamiento de los estados es satisfactorio, resulta de interés analizar el comportamiento de la trayectoria del vector de estados en el espacio. Esto se muestra en las figuras 13.7(a) y 13.7(b). En ellas se puede observar que si bien la trayectoria se aparta de la superficie de conmutación  $s(x) = 0$ , los apartamientos siempre son en el entorno de la superficie de conmutación.

Un aspecto interesante a notar en la figura 13.7 es que **los apartamientos de la superficie de conmutación se producen ahora en el espacio** ya que la superficie de conmutación para el sistema en cuestión es un plano. Como se mencionó anteriormente,

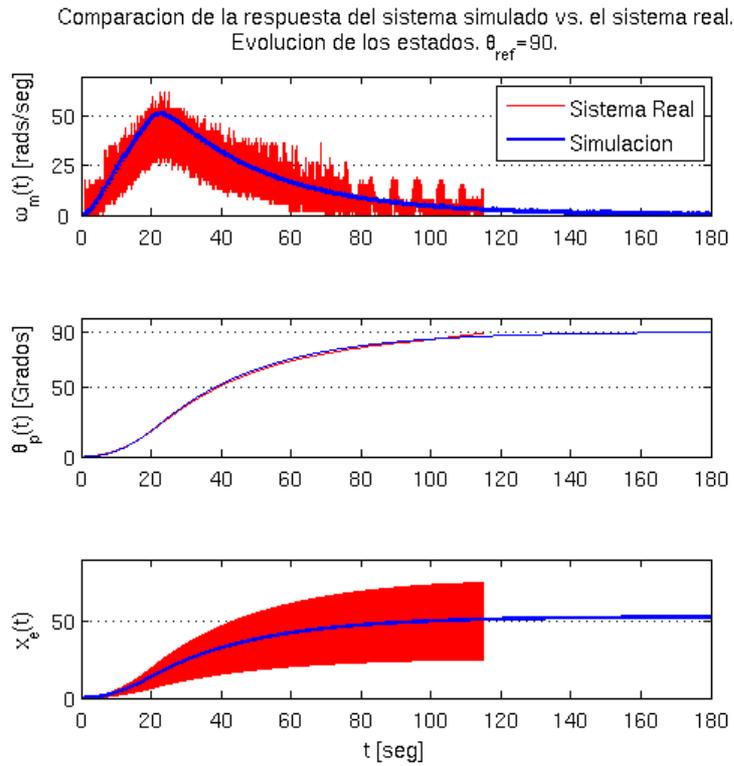


Figura 13.6: Comparación de la evolución de los estados del sistema real (rojo) y el modelo utilizado en el simulador.

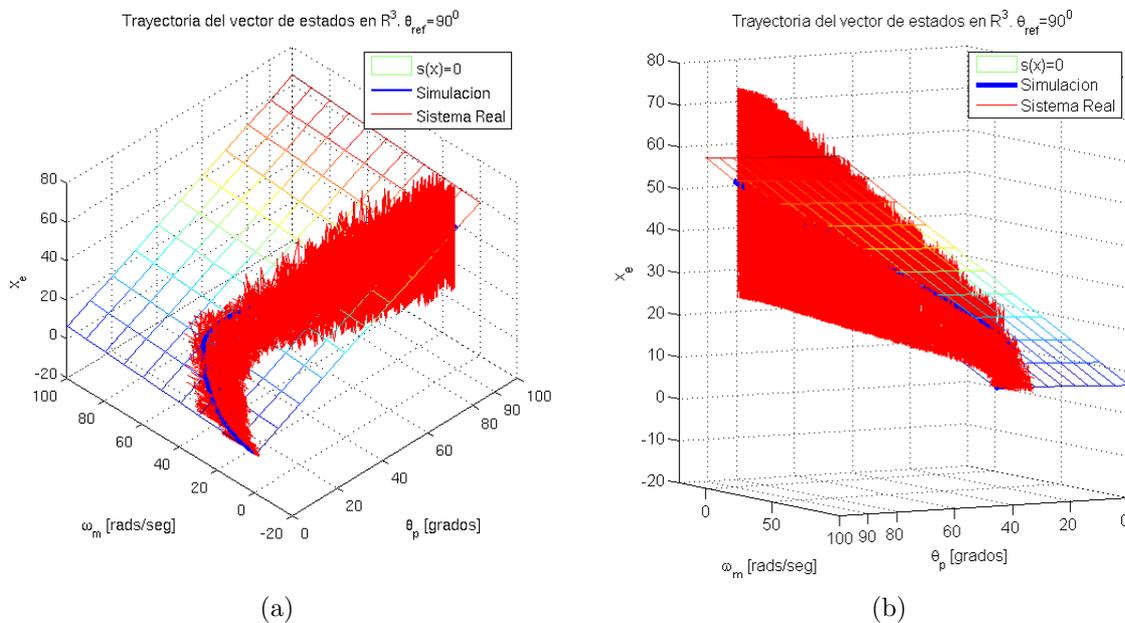


Figura 13.7: Evolución de la trayectoria del vector de estados para el movimiento de 0 a 90 grados. Observar los apartamientos respecto al plano  $s(x) = 0$ . Sistema Real: Rojo. Simulación: Azul.

dichos apartamientos serían menores si se pudiera muestrear más rápido el sistema obteniéndose el caso ideal que sería condicionar la trayectoria a evolucionar sobre el plano  $s(x) = 0$ .

Sin embargo, a pesar de los apartamientos de la superficie de conmutación la evolución de la trayectoria del sistema real respeta la forma de la trayectoria del sistema simulado.

Debe tenerse en cuenta también que el modelo de simulación utilizado no modela imperfecciones en el relay o retardos en los canales de adquisición. Aumentar la complejidad del modelo de simulación para obtener una simulación más acorde a la realidad será propuesta como una de las tareas a futuro.

### Respuesta del Sistema para $r = 360^\circ$ .

De igual manera que en el caso anterior y partir de los resultados obtenidos se indicó al sistema realizar un giro completo de 360 grados que, en condiciones normales de medida sería el máximo desplazamiento.

La evolución de los estados para el trayecto recorrido se muestra en la figura 13.8 donde se verifica que se mantiene la misma dinámica que para el caso anterior apareciendo también los efectos de “chattering”.

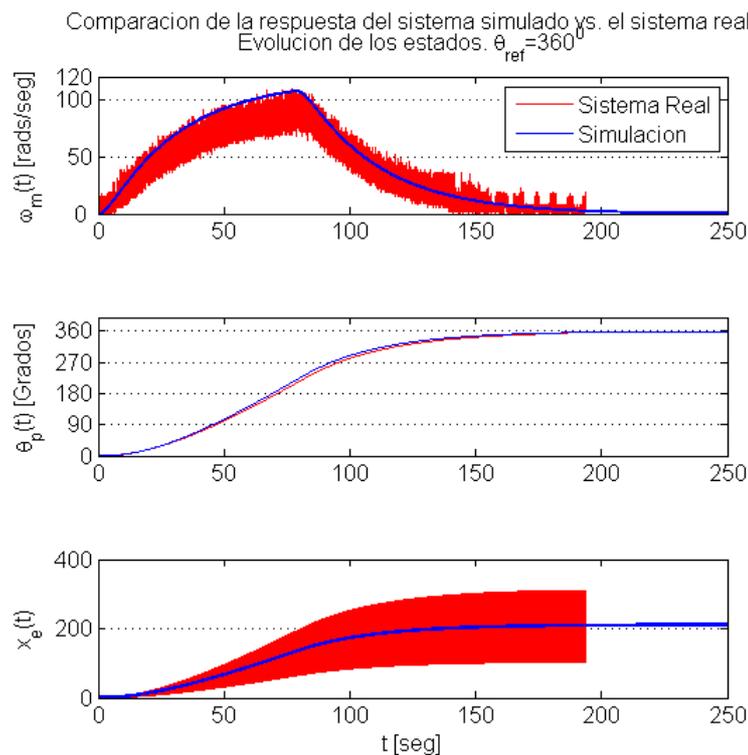


Figura 13.8: Evolución de la trayectoria del vector de estados para el movimiento de 0 a 360 grados (una revolución). Sistema Real: Rojo. Simulación: Azul.

A fin de verificar el comportamiento de la trayectoria de estados la evolución de la misma en el espacio se muestra en las figuras 13.9(a) y 13.9(b).

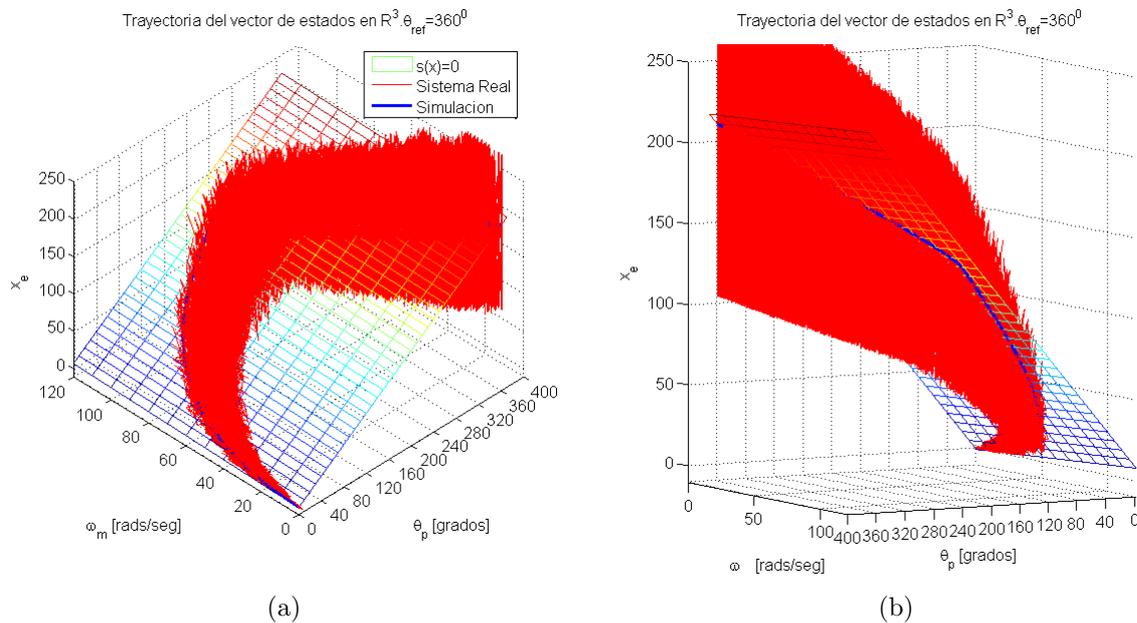


Figura 13.9: Evolución de los estados para el movimiento de 0 a 360 grados. Se observan también apartamientos respecto al plano  $s(x) = 0$ . Sistema Real: Rojo. Simulación: Azul.

Al igual que en el caso anterior, el “chattering” produce un apartamiento de la superficie de conmutación aunque el sistema respeta la forma de la trayectoria del sistema simulado.

### Respuesta del Sistema cuando se aplica una Carga.

A modo de verificar el funcionamiento del control implementado bajo condiciones de carga variable se procedió a colocar una carga de 75 kilogramos durante el recorrido del posicionador hacia la posición final indicada.

En la figura 13.10 se muestra la evolución de los estados del sistema cuando se aplica una carga a modo de perturbación en  $t = 50$  segundos durante el recorrido de 0 a 90 grados. Se observa que la respuesta del sistema, principalmente en lo que respecta a la evolución de la posición angular en azimuth ( $\theta_p(t)$ ) no se perciben cambios importantes.

De igual manera que en el caso anterior se procedió a realizar el mismo experimento durante el recorrido de 0 a 360 grados aplicando la misma carga en  $t = 70$  segundos. La evolución de los estados se muestra en la figura 13.11.

En ambos casos se observa que la perturbación no influye de forma significativa en la evolución de los estados y por lo tanto no afecta el comportamiento dinámico del sistema.

Si bien los resultados obtenidos son alentadores con respecto a la robustez del sistema implementado frente a variaciones en la carga, lo cual era una de las premisas de diseño, debe tenerse en cuenta que no representan las condiciones reales de funcionamiento del sistema lo cual deberá estudiarse una vez puesto en marcha el sistema de medida completo y con cargas (antenas) de diferentes geometrías.

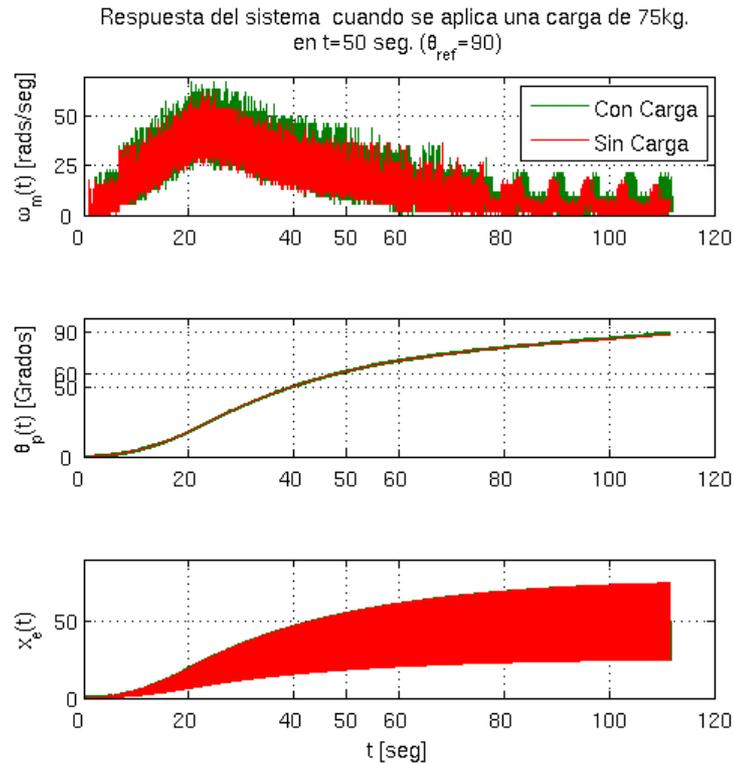


Figura 13.10: Comparación de la evolución de los estados del sistema real sin carga (rojo) y cuando se le aplica una carga en  $t = 50$  segundos (verde).

### 13.7.2 Conclusiones sobre los resultados obtenidos.

Si bien lo ideal hubiera sido mostrar la evolución de los estados a la frecuencia de muestreo de 1kHz los resultados obtenidos son muy alentadores teniendo en cuenta que:

1. La frecuencia de muestreo utilizada es la mitad de la frecuencia de muestreo para la cual se diseñó el sistema.
2. El modelo de simulación posee muchos componentes ideales, como por ejemplo, el bloque conmutador y el estado integral.
3. El sistema real está compuesto por sistemas que en la simulación se supusieron ideales, como por ejemplo, los canales de adquisición.
4. Debe tenerse en cuenta también que el diseño del lazo de control se realizó en base al modelo estimado del posicionador de antena con todo lo que ello implica (por ejemplo, se concluyó que el sistema real es de orden 5) de manera que, lograr que el sistema real se comporte de manera aproximada al modelo simulado es bastante alentador desde el punto de vista de la identificación del sistema.
5. El diseño del control implementado utilizando un controlador digital se encuentra basado en un modelo de sistema continuo. Debe recordarse que para que el comportamiento de un sistema discreto se aproxime al comportamiento de un sistema

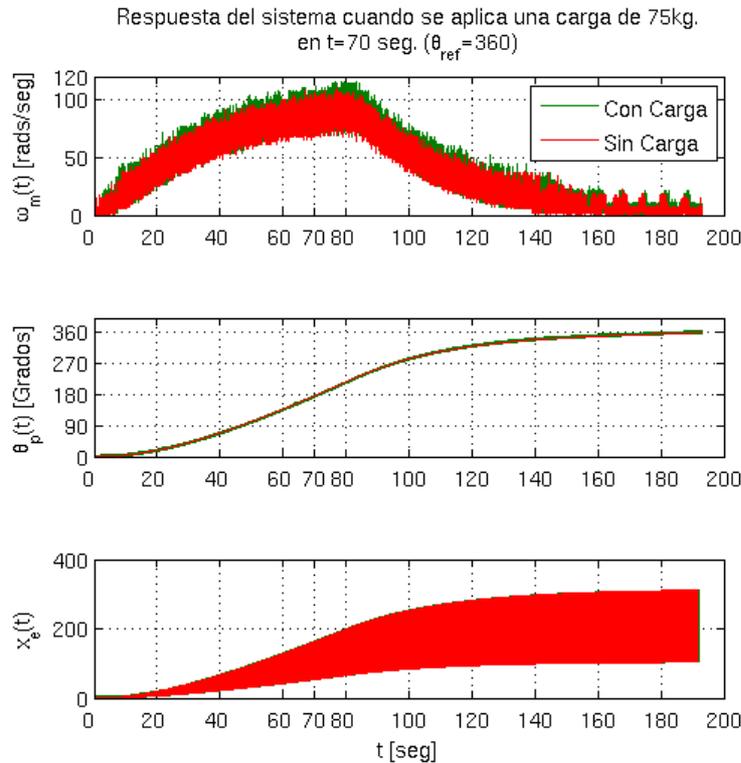


Figura 13.11: Comparación de la evolución de los estados del sistema real sin carga (rojo) y cuando se le aplica una carga en  $t = 70$  segundos (verde) cuando el sistema completa una revolución.

continuo deben utilizarse frecuencias de muestreo lo más elevadas posibles (idealmente infinitas). En este caso, el lazo de control se comporta de manera satisfactoria sin utilizar frecuencias de muestreo extremadamente altas.

Por lo tanto, si bien los resultados son satisfactorios sería deseable contar con una interfaz más rápida que permitiera muestrear el lazo de control cada 1 milisegundo, como por ejemplo, la interfaz Ethernet lo que constituye la próxima actividad a realizar en el marco del proyecto.

Se observa además que, si bien a primera vista no lo parece, la implementación del modo deslizante es relativamente sencilla en comparación con otros esquemas de control, por ejemplo controles adaptativos, lográndose un sistema de control robusto a partir de un modelo de orden reducido del sistema a controlar.

Como conclusión final se puede decir que a partir de los resultados obtenidos mediante las técnicas de Identificación de Sistemas y del Control por Modo Deslizante se ha superado el inconveniente de incertidumbre en los parámetros del sistema.

En lo que respecta a la respuesta del sistema ante variaciones en la carga o perturbaciones externas si bien los resultados obtenidos fueron positivos deberá esperarse a implementar el sistema de medida completo para basar los resultados en las condiciones de trabajo para las que fue diseñado.

## 13.8 Resumen.

Con este capítulo se pone fin a las actividades realizadas en el marco de este Trabajo Final. En el mismo se mostró el resultado de la integración de todos los subsistemas del sistema de control muchos de los cuales debieron ser desarrollados para resolver un problema: mover de manera controlada el posicionador de antena.

Los resultados obtenidos en lo que respecta al control por modo deslizante fueron más que satisfactorios considerando las limitaciones en la adquisición de los datos que se tiene a la fecha de este informe y que formarán parte de las actividades a seguir en el marco de la automatización del sistema de medida.

# Capítulo 14

## Conclusiones.

Si bien la redacción de este informe y de los informes parciales fue escrita en tercera persona me tomaré la libertad de escribir mis conclusiones sobre este proyecto en primera persona.

Con el control del posicionador de antena se concluye una etapa en el sistema de medida que deberá seguir progresando hasta lograr la automatización completa del mismo.

Cuando acepté iniciar este trabajo en el Instituto Argentino de Radioastronomía el objetivo era simple: controlar el posicionador de antena el cual ya se hallaba en el IAR y que solo contaba con un control manual y rudimentario a lo que se sumaba el absoluto desconocimiento de como estaba compuesto el mismo o del valor que tomaban los parámetros de sus componentes.

Con éste punto de partida comenzó la búsqueda de algún método que permitiera asegurar el control del posicionador sin tener demasiado conocimiento de los parámetros físicos que determinan su comportamiento dinámico o de la carga que se colocaría sobre él.

Es en la búsqueda de una solución de este tipo como llegué al control por modo deslizante cuyas principales aplicaciones son sistemas con incertidumbres en sus parámetros y en la carga. Obligado a utilizar un modelo de estados para el diseño del controlador es que aparecen en primer plano las técnicas de Identificación del Sistemas.

En lo que respecta al proyecto el mismo me permitió desde el punto de vista técnico llevar a la práctica los conceptos aprendidos sobre control y servomecanismos y control moderno además de conocimientos sobre señales y sistemas para la identificación del modelo matemático del posicionador tarea que me resultó muy interesante tanto desde el punto de vista teórico como práctico.

Además me permitió incursionar en otras áreas como la electrónica de potencia, el procesamiento analógico y digital de señales, manejo de microprocesadores y programación.

Desde el punto de vista profesional me permitió incorporarme a una organización como el IAR donde pude adquirir experiencia en el mundo laboral. Además, me permitió relacionarme con profesionales no solo de la institución sino de la Facultad de Ingeniería de la UNLP a quienes agradezco la colaboración en este trabajo.

Si bien por razones de tiempo y costo hasta aquí solamente se automatizó un solo sentido de movimiento, este proyecto debe servir como punto de partida para futuras evoluciones no solo del sistema automático de medida sino también de sistemas de control

ya que el sistema de medida puede ser un excelente campo de pruebas por ejemplo, para aplicaciones de seguimiento de objetos para lo cual sería necesario automatizar ambos ejes además de contar con modelo más completo del posicionador. Esto podría seguir formando estudiantes de la misma manera que ocurrió conmigo. Ojalá siga siendo así.

## 14.1 Mejoras a Futuro.

### 14.1.1 Del Control del Posicionador de Antena.

En lo que respecta exclusivamente al control del posicionador de antena se propone:

1. Implementar una interfaz de mayor velocidad que permita transmitir en tiempo real el valor de cada uno de los estados del sistema sin afectar la frecuencia de muestreo. Ésto permitirá realizar un mejor análisis sobre el comportamiento del mismo. Esta actividad es prioritaria a la hora de escribir este informe.
2. Mejoras en la Etapa de Potencia. Esto incluye desde un rediseño en la fuente de alimentación hasta la incorporación de más medidas de seguridad y protecciones que hagan del control de posición un instrumento seguro y confiable ya sea para el usuario o los mecanismos.
3. Mejorar el modelo matemático del posicionador. Debe recordarse que, aunque se obtuvieron resultados satisfactorios, el modelo utilizado es un modelo de orden reducido y que en la realidad corresponde a un modelo de orden cinco. Esto incluye también considerar la influencia en el comportamiento del sistema de las no linealidades ya que hasta aquí se supuso un sistema lineal e invariante en el tiempo.
4. Mejorar el modelo de simulación utilizando un modelo más próximo a la realidad. Esto implica incorporar retardos, no linealidades, etc.
5. Evolucionar hacia versiones del sistema de control dejando la etapa prototipo. Esto incluye mejoras a nivel hardware y software teniendo en cuenta otros aspectos como la compatibilidad electromagnética (EMI/EMC) con el objetivo de aumentar la confiabilidad del sistema de control y del sistema de medida en general.
6. Ensayos de la robustez del control implementado. Esto deberá verificarse cuando el sistema de medida completo entre en funcionamiento.
7. Implementación de un limitador de velocidad que permita aumentar la resolución del sistema de medida. La necesidad de este limitador será evaluada cuando el sistema de medida completo entre en funcionamiento.
8. Análisis de la posibilidad de implementar un Control por Modo Deslizante Discreto lo cual depende de la bondad del modelo del sistema con que se cuente.

### 14.1.2 Del Sistema de Medida en General.

Si bien en este proyecto se resolvió uno de los problemas más grandes del sistema de medida que es lograr el control del posicionador de antenas quedan por resolver los siguientes aspectos:

1. Integración del sistema en general, esto incluye unir los distintos subsistemas (computadora personal, receptor, oscilador de la antena de referencia y control del posicionador) para la puesta en marcha del sistema de medida.
2. Finalizar la programación de la computadora de control del sistema de medida que adquiera el dato de posición y potencia recibida para poder conformar los diagramas de radiación.
3. Validación de la estrategia de control propuesta para la medida de antenas.
4. Mejoras de software y hardware del sistema de medida en general.

## Apéndice A

### Cálculo de la expresión simplificada de $H_1(s)$ .

La función transferencia que representa la relación entre la velocidad de giro del motor DC y la tensión de entrada aplicada al mismo para el sistema electromecánico asociado al movimiento en azimut tiene la siguiente expresión:

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_{eq} s^2 + (R_a J_{eq} + L_a B_{eq}) s + (R_a B_{eq} + K_i K_b)} \quad (A.1)$$

Y se desea llevarla a una forma que deje en evidencia la existencia de dos polos, uno asociado a la parte eléctrica del sistema y el otro a la parte mecánica. La estructura propuesta en el Capítulo 4 tiene la siguiente forma:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K'}{(sK_E + 1) \cdot (sK_M + 1)} \quad (A.2)$$

donde

- $K_E$  se encuentra asociada al polo eléctrico ( $s_1 = 1/K_E$ ).
- $K_M$  se encuentra asociada al polo mecánico ( $s_2 = 1/K_M$ ).

El procedimiento consiste en partir de la ecuación (A.1) y llegar a la ecuación (A.2) y se describe a continuación.

En primer lugar,

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left[ \frac{L_a J_{eq}}{R_a B_{eq}} s^2 + \left( \frac{R_a J_{eq} + L_a B_{eq}}{R_a B_{eq}} \right) s + \left( 1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}} \right) \right]} = \\ &= \frac{\frac{K_i}{R_a B_{eq}}}{\underbrace{\frac{L_a J_{eq}}{R_a B_{eq}} s^2 + \left( \frac{R_a J_{eq} + L_a B_{eq}}{R_a B_{eq}} \right) s + 1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}}} \quad (A.3) \\ &= \left( 1 + s \frac{L_a}{R_a} \right) \cdot \left( 1 + s \frac{J_{eq}}{B_{eq}} \right) \end{aligned}$$

donde  $L_a/R_a$  y  $J_{eq}/B_{eq}$  son las constantes de tiempo  $\tau_e$  y  $\tau_m$  respectivamente, ya mencionadas en el Capítulo 4. Así, la ecuación (A.3) puede escribirse en función de la constante de tiempo correspondiente a la parte eléctrica y mecánica:

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_i}{R_a B_{eq}}}{(1 + s\tau_e) \cdot (1 + s\tau_m) + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}} = \frac{\frac{K_i}{R_a B_{eq}}}{s^2 \tau_e \tau_m + (\tau_e + \tau_m) + 1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}} \quad (\text{A.4})$$

Sacando factor común  $1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}$  en el denominador de (A.4):

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_i}{R_a B_{eq}}}{\left(1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}\right) \left(s^2 \frac{\tau_e \tau_m}{1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}} + s \frac{\tau_e + \tau_m}{1 + \frac{K_i K_b}{R_a B_{eq}}} + 1\right)} \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, comparando la expresión obtenida en (A.5) con la expresión a la cual se quiere llegar dada por la ecuación (A.2) se tiene que:

1.  $K' = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right)}$
2.  $K_E \cdot K_M = \frac{\tau_E \tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}}$
3.  $K_E + K_M = \frac{\tau_E + \tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}}$

pudiendo simplificarse ecuación 3 ya que por lo general es válido suponer que el polo eléctrico es mucho más rápido que el polo mecánico o que es lo mismo que la constante de tiempo eléctrica es mucho menor que la constante de tiempo mecánica:

$$\boxed{\tau_e \ll \tau_m}$$

de forma que

$$K_E + K_M = \frac{\tau_E + \tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} \simeq \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} = K_M \quad (\text{A.6})$$

que sustituyendo en 2 se tiene que:

$$K_E \cdot K_M = \frac{\tau_E \tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} = \tau_E \cdot \underbrace{\frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}}}_{K_M} = \tau_E \cdot K_M \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto se concluye que:

$$\boxed{K_E = \tau_e}$$

y

$$\boxed{K_M = \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}}}$$

De esta forma  $H_1(s)$  puede escribirse como:

$$H_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right) \cdot (s\tau_E + 1) \cdot \left(s \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}} + 1\right)} \quad (\text{A.8})$$

Donde

- $K' = \frac{K_i}{R_a B_{eq} \left(1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}\right)}$
- $K_E = \tau_E$
- $K_M = \frac{\tau_M}{1 + \frac{K_b K_i}{R_a B_{eq}}}$

que verifica la forma:

$$H_1(s) = \frac{K'}{(sK_E + 1) \cdot (sK_M + 1)} \quad (\text{A.9})$$

Para más información ver [15].

# Apéndice B

## Trayectorias en el espacio de estados. Método del Plano de Fase. Análisis del doble integrador.

El método del plano de fase es una herramienta muy útil para el análisis de sistemas lineales y no lineales. En líneas generales, el método se basa en la representación de la trayectoria descrita por el vector de estados  $x(t) = [x_1; x_2 \dots; x_n]$  a medida que transcurre el tiempo y se aplica generalmente en el estudio de sistemas de orden 2.

En este apéndice se resumen las características más importantes del método con el fin de poder interpretar los resultados mostrados en el plano de fase durante los sucesivos capítulos del informe. También se analizan dos casos basados en el modelo del doble integrador cuyos resultados se utilizaron en los ejemplos sobre sistemas de estructura variable del Capítulo 6.

### B.1 Trayectorias en el espacio de estados.

#### B.1.1 Introducción.

Como se mencionó oportunamente, el vector de estados  $x$  depende del tiempo  $t$  (variable independiente) por lo cual, si bien por comodidad se escribe como  $x$ , la verdadera notación es  $x(t)$  (o  $x[k]$  para el caso discreto). Hecha esta aclaración, es de esperar que exista una forma de hallar la evolución de  $x(t)$ , o lo que es lo mismo, hallar una expresión que describa la evolución temporal de las  $n$  variables de estados del sistema. Dicha expresión está dada por:

$$x(t) = \phi(t - t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau) \cdot B \cdot u(\tau) d\tau \quad (\text{B.1})$$

donde  $\phi(t)$  es la matriz de *transición de estados*.

Ahora, muchas veces resolver la ecuación (B.1) para ver como evoluciona el vector de estados resulta complicado o poco útil si lo que se quiere es determinar el comportamiento del sistema bajo distintas condiciones. Es por esto que, cuando se trabaja con sistemas de orden 2 o 3 se recurre a otro tipo de técnicas para determinar la trayectoria determinada por el vector de estados.

### B.1.2 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G(x, y) \\ \dot{y} &= H(x, y)\end{aligned}\tag{B.2}$$

donde, para los sistemas lineales

- $G(x, y) = ax + by$ .
- $H(x, y) = cx + dy$ .

con  $a, b, c$  y  $d$  constantes y se denomina **sistema autónomo** si la variable  $t$  no aparece explícitamente lo que **permite analizar las soluciones del sistema en el plano  $x \perp y$**  sin necesidad de hallar la solución particular de  $x(t)$  e  $y(t)$ , especialmente cuando el cálculo de éstas se vuelve demasiado complicado.

Una solución de  $x(t), y(t)$  que sea solución del sistema (B.2) representa una curva  $C$  en el plano  $x \perp y$  denominada *trayectoria* cuya evolución (o sentido positivo) está definido de acuerdo al sentido creciente de  $t$  (que es el parámetro independiente).

El objetivo de este tipo de análisis es estudiar muchas soluciones al mismo tiempo y no una sola en particular para determinar patrones de comportamiento de un mismo problema, como por ejemplo, trayectorias para distintas condiciones iniciales.

Si se observa el modelo de estados es evidente que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden donde

$$\dot{x}_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\tag{B.3}$$

con  $i = 1 \dots n$ .

Considerando  $n = 2$  se obtendría la forma propuesta en (B.2).

### B.1.3 Ejemplo 1.

Supóngase el siguiente modelo de estados de un sistema con polos reales y distintos cuyas variables de estado son  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11/9 \\ -11/9 \end{bmatrix} \cdot u \\ [y] &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{B.4}$$

Este sistema tiene dos polos ubicados en  $s_1 = -1$  y  $s_2 = -10$  que hace que la respuesta libre sea una suma de exponenciales.

En la figura B.1 se muestra la respuesta libre del sistema cuando se supone la condición inicial  $[x_1(t_0); x_2(t_0)] = [0, 5; 1]$ . En ella puede observarse la evolución de las variables de estado en el plano  $x_1 \perp x_2$  que describe la trayectoria del vector de estados representado por el vector  $OP$ . También se muestra por separado la evolución temporal de cada variable de estado.

Como era de esperar, el inicio de la trayectoria se encuentra en el punto  $[0, 5; 1]$  y evoluciona hacia el origen ya que se trata de un sistema lineal estable. En este caso se dice que en el origen se tiene un “*nodo estable*”.

En la figura B.2 se muestra la trayectoria para distintas condiciones iniciales.

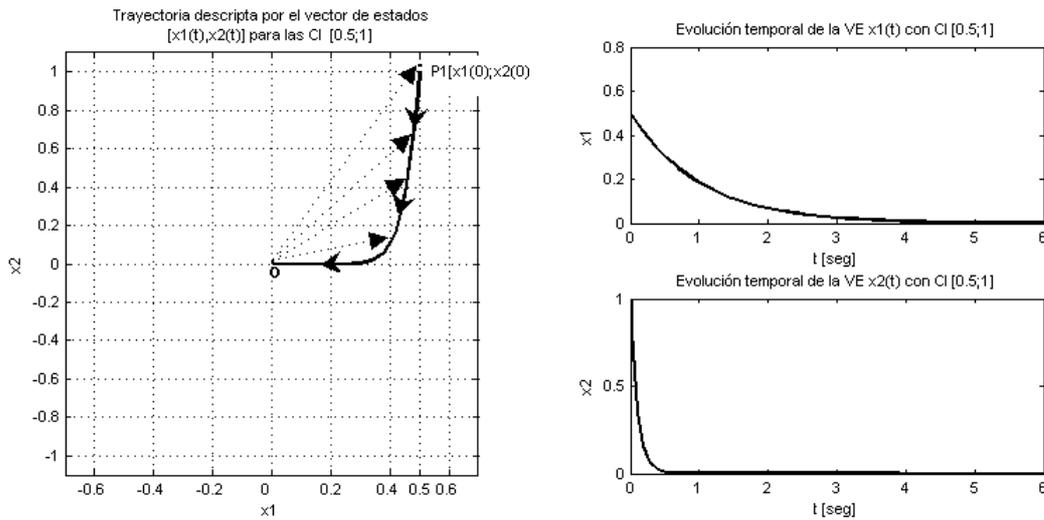


Figura B.1: a) Trayectoria descrita para el vector de estados para el sistema con condiciones iniciales  $[0.5; 1]$ . b) Evolución temporal de las variables de estado que describen la trayectoria de la figura B.1(a).

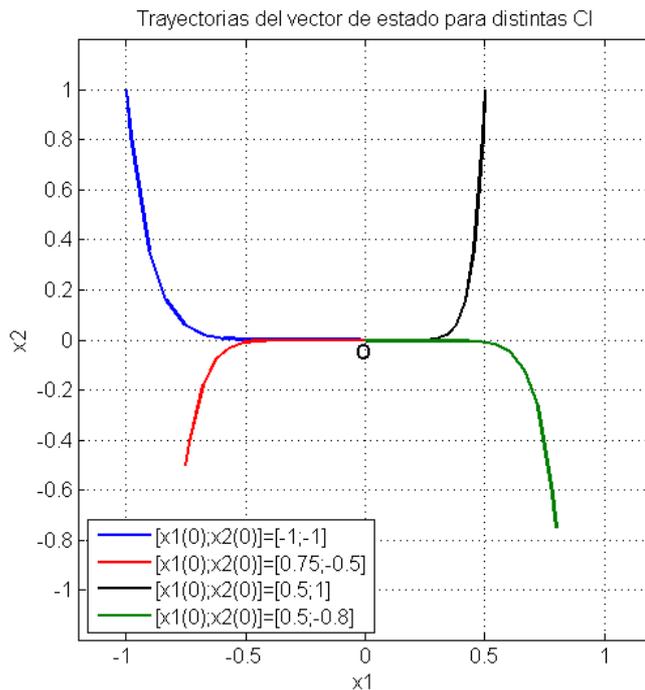


Figura B.2: Trayectorias determinadas por el vector de estados del sistema (B.4) para distintas condiciones iniciales

## B.2 El Método del Plano de Fase. Fundamentos básicos.

Como se mencionó anteriormente, éste método se aplica generalmente en el estudio de sistemas de orden 2 principalmente porque que es más rápido y sencillo representar un

vector en  $R^2$ .

El método del plano de fase permite analizar sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo

$$F(x, x', x'') = 0 \quad (\text{B.5})$$

las cuales no contienen a la variable independiente (el tiempo  $t$ ) en forma explícita y que pueden ser reducidas a una ecuación de primer orden que da a lugar a curvas en el plano  $(x, dx/dt)$ <sup>1</sup>.

Si se considera

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y \quad (\text{B.6})$$

y

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (\text{B.7})$$

entonces por regla de la cadena  $\dot{y}$  puede escribirse como:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \dot{x} = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot y \quad (\text{B.8})$$

que sustituyendo en la ecuación (B.6) se tiene que

$$F(x, y, (dy/dx) \cdot y) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Se tiene ahora una ecuación diferencial de primer orden para  $y$  que depende de la variable  $x$  que es ahora la variable independiente de la ecuación por lo que puede obtenerse una solución de la forma  $y(x)$  que pueda ser representada en el plano  $x \perp y$ .

La ecuación (B.9) es un caso un particular del sistema general

$$F(x, G(x, y), H(x, y)) = 0 \quad (\text{B.10})$$

tratado en la sección anterior.

Este método se utiliza bastante en el análisis del modelo de estados ya que *las variables del plano de fase coinciden con las variables de estado del modelo canónico controlable* (debe recordarse que para un mismo sistema pueden existir diferentes juegos de variables de estado). De esta forma, el estado de un sistema para un determinado instante estará determinado por el valor de  $x$  e  $y$  (o lo que es lo mismo por  $x$  y el valor de su derivada  $dx/dt$ ).

Al igual en el caso general, el vector de estados es el vector que une al origen con un punto de la trayectoria la cual queda definida por la variación de dicho vector.

El método del plano de fase será de gran utilidad para el análisis del comportamiento del doble integrador en el Capítulo 6. Si el mismo se supone como un control de posición, entonces en los ejes del plano de fase quedarán representadas la posición (por ejemplo, la posición en azimut del posicionador) y la velocidad con la que gira (por ejemplo, la velocidad de giro del eje del motor DC).

---

<sup>1</sup>Por simplicidad se escribirá como  $x$  como  $x(t)$  y a  $y$  como  $y(t)$ .

### B.2.1 Ejemplo 2: Sistema en el modelo canónico controlable. Trayectorias en el plano de fase.

Supóngase ahora, un sistema representado por su modelo canónico controlable cuyas variables de estado son  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y se verifica que  $\dot{x}_1 = x_2$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot u \quad (\text{B.11})$$

$$[y] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Éste sistema tiene polos complejos conjugados en  $s = -1 \pm j1$  de forma que la respuesta libre del sistema para determinadas condiciones iniciales o la respuesta del sistema cuando se aplica una entrada  $u$  presentará oscilaciones amortiguadas.

En la figura B.3 se muestra la respuesta libre del sistema cuando se suponen condiciones iniciales  $x(t_0) = [1; 1]$ . En ella puede observarse la evolución de las variables de estado en el plano  $x_1 \perp x_2$  que describe la trayectoria del vector de estados representado por el vector  $OP$ . También se muestra por separado la evolución en el tiempo de cada variable de estado (para la trayectoria en color negro).

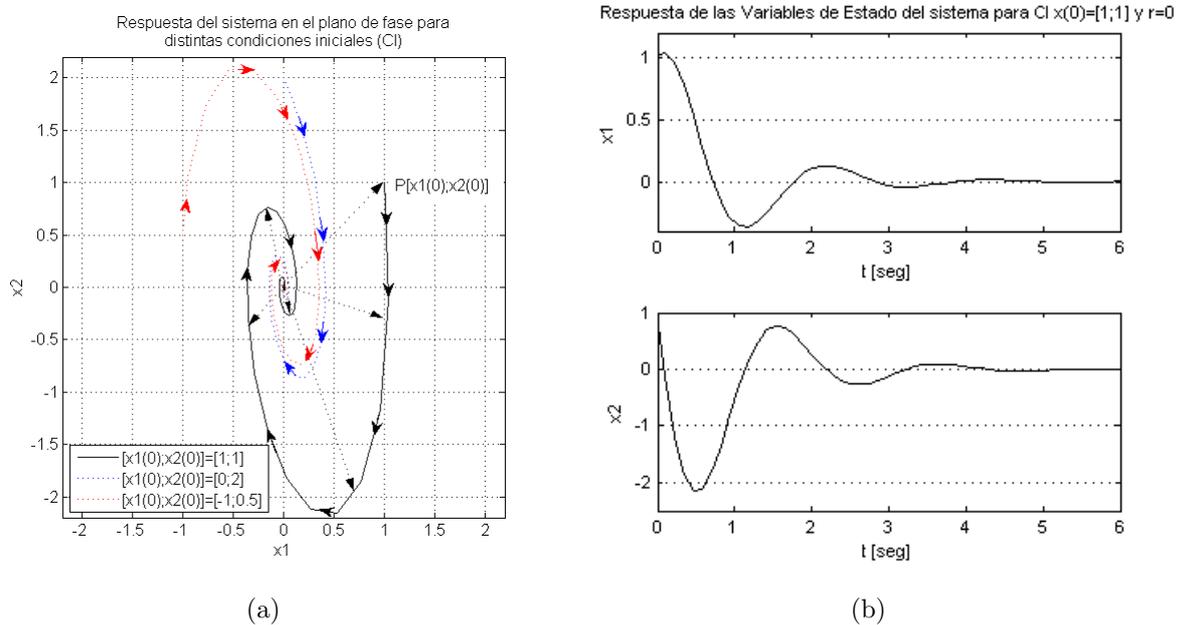


Figura B.3: a) Trayectorias en el plano de fase para distintas condiciones iniciales. b) Evolución temporal de la respuesta de cada variable de estado a las condiciones iniciales  $[1; 1]$

Análogo a lo visto en el ejemplo 1, el inicio de la trayectoria se encuentra en el punto  $(1, 1)$  y evoluciona hacia el origen ya que se trata de un sistema lineal estable.

En la figura B.4 se muestra la respuesta del mismo sistema pero aplicando un escalón a la entrada con condiciones iniciales nulas ( $x(t_0) = [0; 0]$ ) donde puede observarse como la respuesta forzada hace que el sistema se encuentre en equilibrio en un punto del plano

que no es el origen. Al igual que en el caso anterior se grafican por separado la evolución temporal de las variables de estado. (Observar el valor final de la variable  $x_1$  en ambas gráficas).

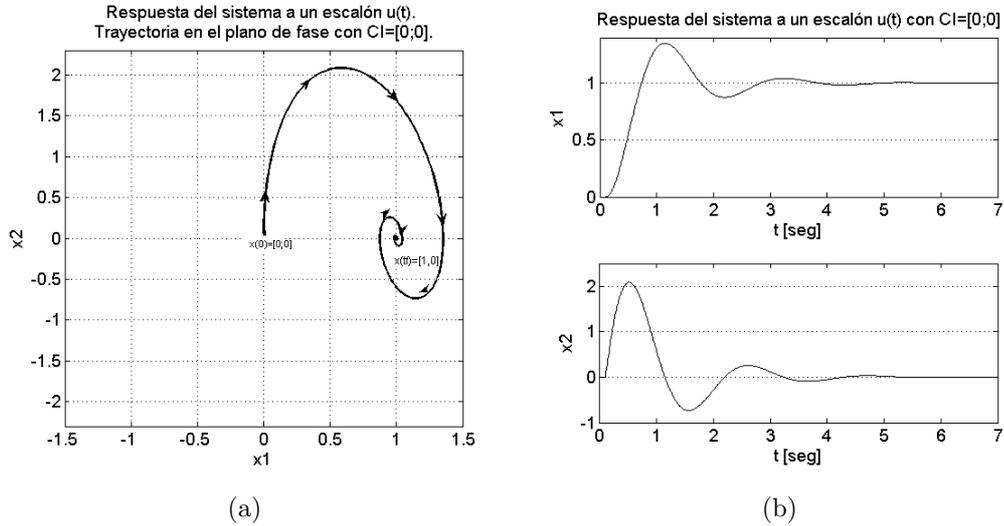


Figura B.4: a) Trayectoria descrita cuando se aplica un escalón a la entrada con condiciones iniciales nulas. b) Evolución temporal de la respuesta de cada variable de estado.

A diferencia del caso anterior el inicio de la trayectoria se halla en el origen de coordenadas y las variables de estados tienden a un valor final distinto de cero ya que la entrada permanecerá en 1, por lo que la salida del sistema permanecerá en el valor final correspondiente. En este caso, se puede observar el efecto de la respuesta forzada debida a  $u \neq 0$ .

En ambos diagramas se observan las oscilaciones que pueden verificarse en los diagramas de evolución temporal. El análisis del plano de fase permite interpretar estos resultados principalmente cuando se trata de sistemas no lineales.

### B.2.2 Interpretación de las Trayectorias. Propiedades.

En el caso general en que un sistema esté representado por las variables de estado  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la trayectoria descrita puede tomar distintas formas dependiendo de como varía cada variable de estado respecto del tiempo de forma que pueden obtenerse distintas trayectorias como por ejemplo rectas, elipses, parábolas o hipérbolas dependiendo del sistema.

A pesar de las distintas trayectorias, es posible establecer algunas propiedades que se cumplen para todos los sistemas:

1. La pendiente de una trayectoria que pasa por un punto  $P(x_0, y_0)$  es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{H(x_0, y_0)}{G(x_0, y_0)} \quad (\text{B.12})$$

2. Las trayectorias cortan al eje de las abscisas en ángulo recto ya que en esos puntos se verifica que  $dx/dt = 0$  de forma tal que la pendiente de la trayectoria (de acuerdo a la propiedad anterior) corresponde a una recta 90 grados.
3. El tiempo que tarda el sistema en evolucionar de un estado  $x(t_0)$  a un estado  $x(t_f)$  sobre una determinada trayectoria en el plano de fase está dado por:

$$t = \int_{x(t_0)}^{x(t_f)} \frac{1}{v} dx = \int_{x(t_0)}^{x(t_f)} \frac{1}{(dx/dy)} dx = \int_{x(t_0)}^{x(t_f)} \frac{1}{G(x, y)} dx \quad (\text{B.13})$$

donde  $G(x, y)$  es una función que describe la velocidad con la que un punto se desplaza sobre la trayectoria en el plano de fase.

4. Por cada punto del plano de fase pasa solo una trayectoria salvo en los puntos de equilibrio del sistema donde se verifica

$$\dot{x}(t) = 0 \quad (\text{B.14})$$

o lo que es lo mismo, aquellos puntos del sistema donde los estados dejan de evolucionar (pueden ser más de uno en el caso de los sistemas no lineales).

5. Para un sistema lineal que evoluciona libremente desde cualquier condición inicial, el único punto de equilibrio posible es el origen de coordenadas.
6. Las trayectorias de un sistema para dos condiciones iniciales distintas pero proporcionales son semejantes.

Si además uno se encuentra trabajando en el **modelo canónico controlable**, puede agregarse una propiedad más:

7. El sentido de recorrido de cualquier trayectoria (sin importar el sistema) es siempre en sentido horario. Supóngase que se toma un punto  $P(x_{10}, x_{20})$  de la trayectoria en el primer cuadrante. Por tratarse del plano de fase se verifica que  $x_2 = dx_1/dt$  por lo tanto se tiene la siguiente condición

$$\begin{aligned} x_1 &> 0 \\ dx_1/dt &> 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

de forma que la variable  $x_1$  no tiene otra opción más que continuar incrementándose (es decir, en el sentido positivo de las  $x_1$ ). Repitiendo el mismo análisis para cada cuadrante se verifica esta propiedad.

### B.3 Análisis en el Plano de Fase del Doble Integrador con Conmutación en la Realimentación (Ejemplo 6.1).

Modelo del sistema: El modelo a utilizar para el análisis será en modelo de estados considerado en el Capítulo 6 con la misma asignación de estados y de ganancias para los lazos de realimentación.

Para el caso propuesto en el Ejemplo 6.2,  $k_2 = 0$  y  $k_1$  toma los valores  $+1$  y  $-1$ . Esto permitirá obtener un modelo de estados para cada uno de los sistemas determinado por la posición de la llave  $L$ .

### B.3.1 Análisis del sistema a lazo cerrado con la llave en la posición A ( $k_1 = -1$ ).

Para la llave en la posición A, el modelo de estados del sistema realimentado estará dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ [y] &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Analizando el polinomio característico de la matriz A se obtiene la ubicación de los polos de lazo cerrado:

$$P(s) = |S.I - A| = \begin{vmatrix} S & -1 \\ -1 & S \end{vmatrix} = S^2 - 1 \Rightarrow S_{1,2} = \pm 1 \quad (\text{B.17})$$

Se tiene entonces que el sistema tiene un polo en el semiplano izquierdo y otro en el semiplano derecho. Se concluye que cuando la llave está en la posición A, el sistema de lazo cerrado es INESTABLE.

### B.3.2 Análisis en el Plano de Fase.

Dado que el análisis del sistema conmutado se realizará en el plano de fase, resulta útil analizar también en el plano de fase los dos sistemas por separado. Para esto es necesario hallar la relación que existe entre las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$ .

Del análisis del lazo de control, se pueden plantear las siguientes igualdades:

$$\left. \begin{aligned} e &= r + x_1 \\ e &= \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{x}_1 = r + x_1 \Rightarrow \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = r + x_1 \quad (\text{B.18})$$

Luego, dado que  $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2$  y suponiendo  $r = 0$  se puede integrar entre  $t_0$  (instante inicial) y  $t$ .

$$\int_{t_0}^t \dot{x}_1(t) d\dot{x}_1(t) = \int_{t_0}^t x_1(t) dx_1(t) \quad (\text{B.19})$$

de donde se obtiene (sustituyendo  $\dot{x}_1$  por  $x_2$ ) que la relación entre los estados está dada por la siguiente expresión:

$$x_2^2(t) - x_1^2(t) = 2 \cdot (C_1 - C_2) \quad (\text{B.20})$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que dependen del estado inicial del sistema ( $x_1(t_0)$  y  $x_2(t_0)$ ).

Se observa en la ecuación (B.20) que las trayectorias en el plano de fase están descritas por hipérbolas cuyas asíntotas tendrán la dirección de los autovectores asociados

a los autovalores de la matriz  $A$  y sus vértices se hallarán ubicados en los puntos  $(0, \pm\sqrt{2.(C_1 - C_2)})$  ó  $(\pm\sqrt{2.(C_1 - C_2)}, 0)$ .

En la Figura B.5 se observan las trayectorias que describe el vector de estados así como el sentido de las mismas. Resulta importante observar que no importa cual sea la condición inicial del sistema, éste nunca alcanza el equilibrio (origen del plano) y que dependiendo de la región del plano en que se encuentre, el sentido en que evoluciona tiende a coincidir con el sentido del autovector estable o inestable.

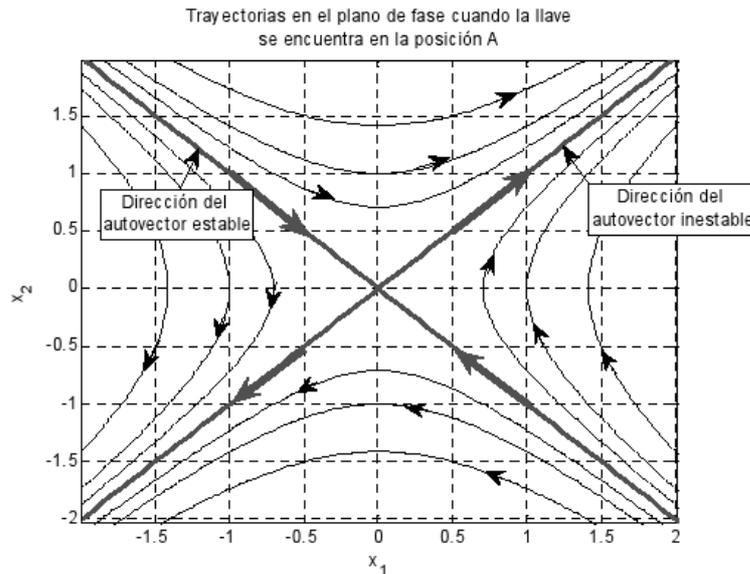


Figura B.5: Trayectorias en el plano de fase para la llave en la posición A.

De esta forma se concluye que el sistema es INESTABLE cuando se realimenta con ganancia igual a -1.

### B.3.3 Análisis del sistema con la llave en la posición B ( $k_1 = 1$ ).

Procediendo de igual forma que en el caso anterior, para la llave en la posición B el modelo de estados del sistema realimentado será:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ [y] &= [ 1 \quad 0 ] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.21}$$

Analizando el polinomio característico de la matriz  $A$  se obtiene la ubicación de los polos de lazo cerrado:

$$P(s) = |S.I - A| = \begin{vmatrix} S & -1 \\ 1 & S \end{vmatrix} = S^2 + 1 \Rightarrow S_{1,2} = \pm j1 \tag{B.22}$$

Determinándose que el sistema tiene un polos complejos conjugados en  $s = \pm j1$ .

De esta forma se concluye que cuando la llave está en la posición B el sistema de lazo cerrado presenta una respuesta del tipo oscilatoria.

### B.3.4 Análisis en el Plano de Fase.

El procedimiento es el mismo que en el caso anterior. Planteando las siguientes igualdades:

$$\left. \begin{array}{l} e = r - x_1 \\ e = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{x}_1 = r - x_1 \Rightarrow \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = r - x_1 \quad (\text{B.23})$$

Luego, dado que  $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2$  y suponiendo  $r = 0$  se integra nuevamente entre  $t_0$  y  $t$ .

$$\int_{t_0}^t \dot{x}_1(t) d\dot{x}_1(t) = - \int_{t_0}^t x_1(t) dx_1(t) \quad (\text{B.24})$$

de donde se obtiene (sustituyendo  $\dot{x}_1$  por  $x_2$ ) que la relación entre el estado  $x_1$  y  $x_2$  está dada por la siguiente expresión:

$$x_2^2(t) + x_1^2(t) = 2 \cdot (C_3 + C_4). \quad (\text{B.25})$$

Donde, al igual que en el caso anterior,  $C_3$  y  $C_4$  son constantes que dependen del estado inicial del sistema.

Se observa en la ecuación (B.25) que las trayectorias en el plano de fase estarán descritas por circunferencias concéntricas de radio  $R = \sqrt{2(C_3 + C_4)}$ .

Gráficamente lo anterior se muestra en la figura B.6.

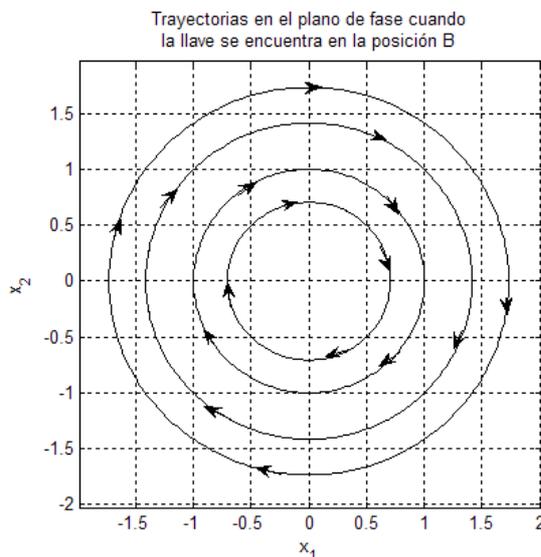


Figura B.6: Trayectorias en el plano de fase para la llave en la posición B.

De esta forma se concluye que a partir de un estado inicial, el sistema oscilará no pudiendo alcanzar el equilibrio.

Los resultados obtenidos se utilizarán para interpretar los resultados obtenidos en el ejemplo 6.2 del Capítulo 6.

## B.4 Análisis en el plano de fase del doble integrador con conmutación en excitación (Ejemplo 6.3).

Al igual que en el caso anterior se considera un sistema a lazo cerrado compuesto por un doble integrador con un bloque no lineal a la entrada como el de la figura B.7. Considerando el mismo juego de variables de estado que en el ejemplo anterior el objetivo de esta sección será determinar las trayectorias en el plano de fase determinadas por el sistema para poder interpretar los resultados del ejemplo 6.3 del Capítulo 6.

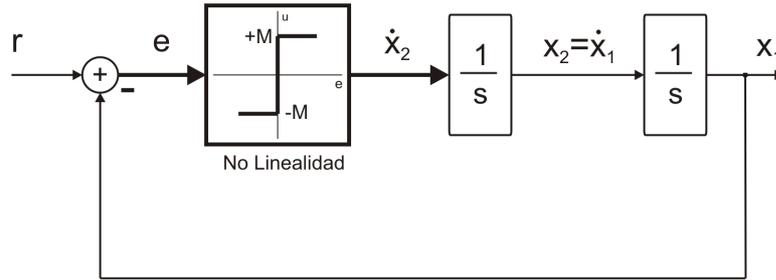


Figura B.7: Lazo de control del doble integrador con conmutación en la excitación.

A diferencia del caso anterior, en este caso no hay una llave que conmute el sistema sino que depende del signo de la señal de error  $e(t)^2$ .

Como se sabe de la definición básica de sistemas de estructura variable, el sistema propuesto puede considerarse como dos sistemas lineales conviviendo en un solo sistema. Por lo tanto, el análisis del comportamiento del mismo puede hacerse para las dos condiciones:  $e > 0$  y  $e < 0$ .

Para cada condición se tiene un valor a la salida del actuador ya que:

$$e = r - x_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } r > x_1 \Rightarrow e > 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = +M \\ \text{si } r < x_1 \Rightarrow e < 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -M \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Por lo tanto, la acción de control que ingresa al doble integrador varía entre dos valores posibles:  $+M$  y  $-M$ .

### B.4.1 Análisis para $e > 0$ .

Esta condición se tiene cuando  $r > x_1$ .

Analizado el lazo de control de la figura B.7 y los resultados obtenidos en (B.26) se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dt} \underbrace{=}_{\substack{\text{(por regla} \\ \text{de la cadena)}}} \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = +M \Rightarrow \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} \cdot \dot{x}_1 = +M \quad (\text{B.27})$$

<sup>2</sup>Si bien en el Capítulo 6 se planteó un sistema SEV donde el bloque conmutador estaba controlado por una función  $S(x)$  que dependía del estado del sistema, en este caso se considerará el caso más sencillo donde la conmutación se produce dependiendo del signo de  $e(t)$ .

que al igual que en el ejemplo anterior puede resolverse por separación de variables:

$$\int_{t_0}^t \dot{x}_1(t) \cdot d\dot{x}_1(t) = \int_{t_0}^t +M \cdot dx_1(t) \quad (\text{B.28})$$

obteniéndose la siguiente solución:

$$\frac{\dot{x}_1^2(t)}{2} - \frac{\dot{x}_1^2(t_0)}{2} = M \cdot x_1(t) - M \cdot x_1(t_0) \quad (\text{B.29})$$

Haciendo uso del hecho que  $x_2 = \dot{x}_1$  (B.29) puede escribirse como:

$$\frac{x_2^2(t)}{2} - \frac{x_2^2(t_0)}{2} = M \cdot x_1(t) - M \cdot x_1(t_0) \Rightarrow \frac{x_2^2(t)}{2} - C_1 = M \cdot x_1(t) - C_2. \quad (\text{B.30})$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales del sistema. Agrupando términos de esta última ecuación se llega a la siguiente forma:

$$x_2^2(t) = 2M \cdot x_1(t) + 2(C_1 - C_2) \Rightarrow x_2^2(t) = 2 \cdot (M \cdot x_1(t) + C_3) \quad (\text{B.31})$$

y suponiendo  $M = 1$ , la ecuación que describe las trayectorias de fase toma la siguiente forma

$$x_2^2(t) - 2 \cdot (x_1(t) + C_3) = 0 \quad (\text{B.32})$$

que corresponde a **parábolas con vértice en  $(-C_3, 0)$  y cóncavas hacia la derecha.**

En la figura B.8 se muestran distintas trayectorias posibles para distintas condiciones iniciales con sus sentido de recorrido (recordar que por tratarse del plano de fase la evolución sobre la trayectoria es siempre en sentido horario).

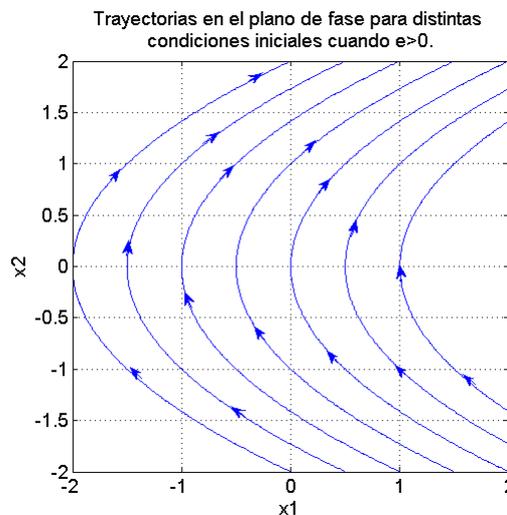


Figura B.8: Trayectorias en el plano de fase para la condición  $e > 0$ .

### B.4.2 Análisis para $e < 0$ .

Cuando el error es menor que cero, de forma análoga al caso anterior, las trayectorias en el plano de fase están representadas por la siguiente ecuación

$$x_2^2(t) + 2 \cdot (x_1(t) - K_3) = 0 \quad (\text{B.33})$$

que también son **parábolas pero con vértice ahora en  $(K_3, 0)$  y cóncavas hacia la izquierda** como se muestra en la figura B.9.

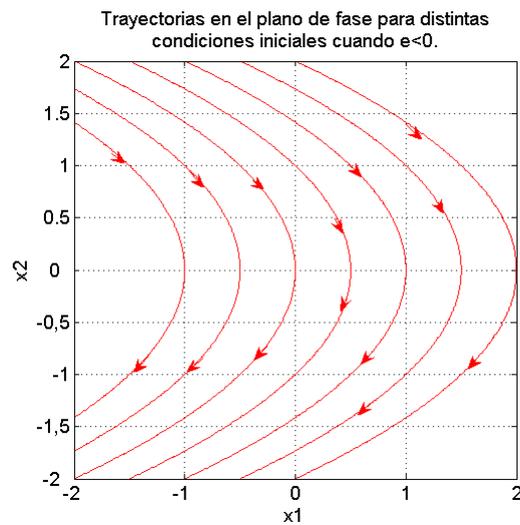


Figura B.9: Trayectorias en el plano de fase para la condición  $e < 0$ .

### B.4.3 Comportamiento del Sistema Completo.

Uniando los resultados obtenidos en B.4.1 y B.4.2 se obtiene la respuesta del sistema completo. Si se observa en la figura B.10 el bloque no lineal, la conmutación se produce cuando  $e = 0$  por lo tanto, en el plano de fase esto se traduce en un cambio en la trayectoria descrita por el vector de estados cuando  $x_1 = r$  (ver figura B.11).

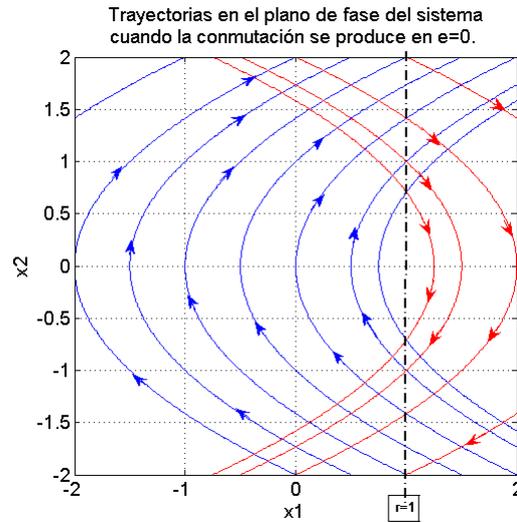


Figura B.10: Trayectorias en el plano de fase del sistema completo. La conmutación se produce cuando  $e = 0 (r = x_1)$ .

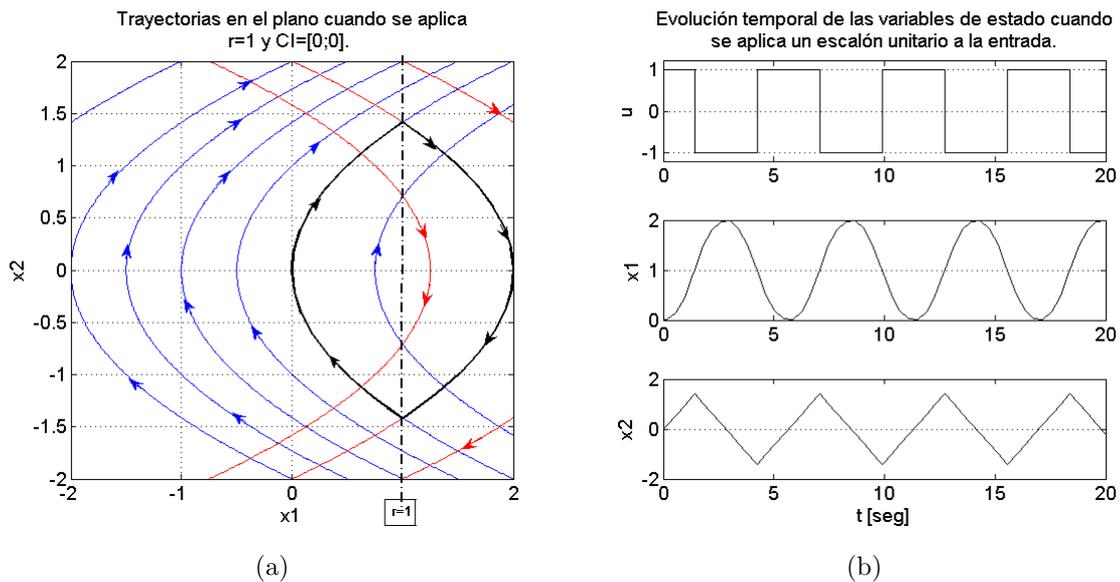


Figura B.11: a) Trayectoria obtenida de la simulación del sistema cuando se aplica una referencia a la entrada con condiciones iniciales nulas. b) Evolución temporal de los estados.

## B.5 Análisis en el plano de fase $e$ y $\dot{e}$ .

Todos los casos vistos hasta ahora pueden representarse también en el plano  $e \perp \dot{e}$  cuya ventaja principal es que, sin importar el valor de la referencia aplicada, el punto de equilibrio al que deberá llegar el sistema será en origen del plano de coordenadas  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  condición que se da cuando el sistema llega al estado deseado ( $y = r$ ).

Esto es posible ya  $e$  y  $\dot{e}$  son variables de estado del sistema. Por ejemplo, para el caso

visto en la sección B.4 puede considerarse (suponiendo  $r = cte$ ):

$$\begin{aligned} e &= r - x_1 \\ \dot{e} &= -\dot{x}_1 = -x_2 \end{aligned} \tag{B.34}$$

De esta manera, se obtienen las mismas trayectorias que dependen de las condiciones iniciales que se tomen, pero la conmutación se produce cuando  $e = 0$  como se muestra en la figura B.12<sup>3</sup>.

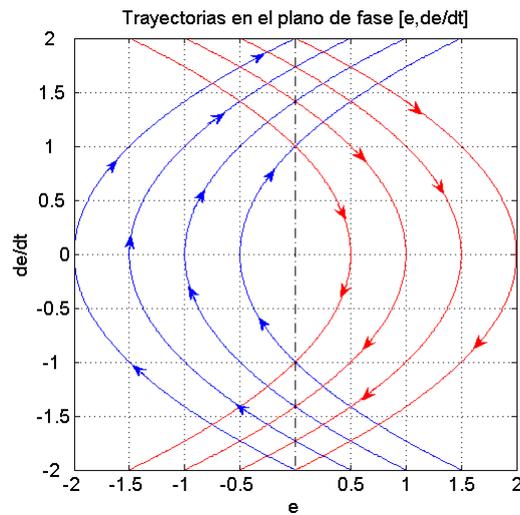


Figura B.12: Trayectorias en el plano de fase  $(e, de/dt)$ .

Como es de esperar se concluye también que el sistema oscila, por lo que nunca alcanzará el correspondiente punto de equilibrio  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  sin importar la condición inicial o la entrada que se aplique al mismo (ver figura B.13).

Éste tipo de representación en el plano de fase es bastante común y será utilizada a lo largo de todo el proyecto.

<sup>3</sup>NOTA: tener en cuenta que en el plano  $e \perp \dot{e}$  las trayectorias correspondientes a la condición  $e > 0$  son parábolas cóncavas hacia la izquierda y para  $e < 0$  cóncavas hacia la derecha.

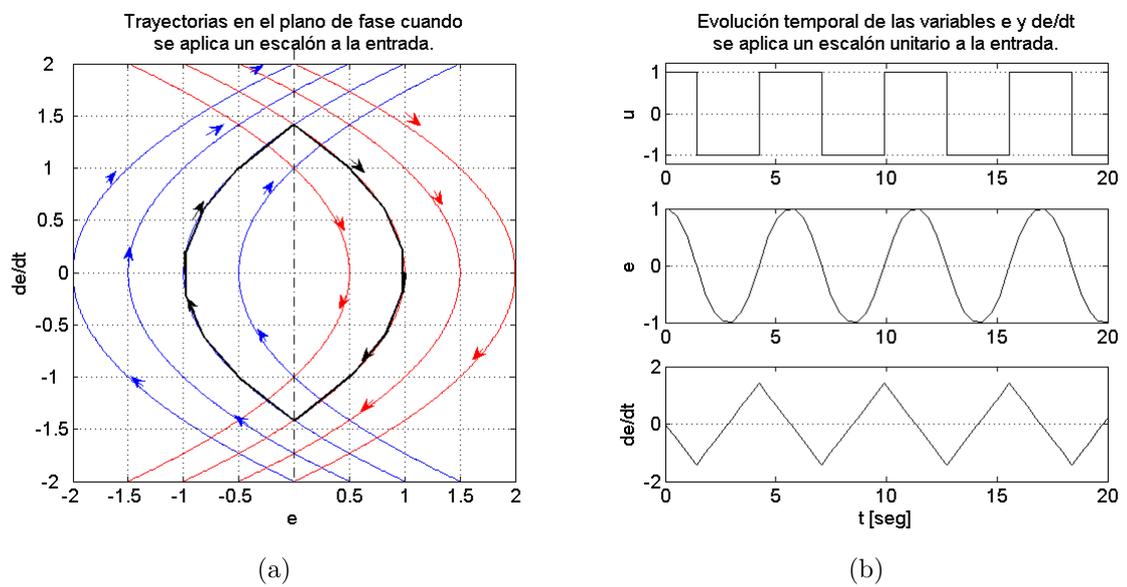


Figura B.13: a) Trayectoria obtenida de la simulación del sistema cuando se aplica una referencia a la entrada con condiciones iniciales nulas. b) Evolución temporal de los estados. (Observar que los estados evolucionan en un entorno de  $e = 0$ ) .

# Apéndice C

## Identificación de un Modelo Tipo ARX.

A modo de introducción se supone que se tiene un sistema cuyos parámetros son desconocidos y que el modelo que se cree mejor se ajusta al modelo real es un modelo tipo ARX de orden  $n_a$  cuya ecuación recursiva está dada por:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{n_a} y[n-n_a] = b_1 u[n-1] + \dots + b_{n_b} y[n-n_b] \quad (\text{C.1})$$

De manera que la transferencia entre la entrada  $u[n]$  y la salida  $y[n]$  puede escribirse como:

$$\frac{y[n]}{u[n]} = \frac{b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}} \quad (\text{C.2})$$

donde se supone como caso extremo que a lo sumo en número de polos es igual al número de ceros de manera que es válido considerar el orden del sistema como  $n_s = n_a = n_b$  dando origen a un vector de incógnitas de orden  $2n_s$  dado por:

$$\theta^T = [ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_s} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_s} ]^T \quad (\text{C.3})$$

Luego, se demuestra en [17] que el predictor para el modelo ARX tiene la siguiente estructura:

$$\hat{y}[n|\theta] = B(q) \cdot u[n] + [1 - A(q)] \cdot y[n] \quad (\text{C.4})$$

que puede reescribirse como

$$\hat{y}[n|\theta] = \varphi^T[n] \cdot \theta \quad (\text{C.5})$$

donde

$$\varphi[n] = [ -y[n-1] \ -y[n-2] \ \dots \ -y[n-n_s] \ u[n-1] \ u[n-2] \ \dots \ u[n-n_s] ]^T \quad (\text{C.6})$$

y que se conoce como *vector de regresión*.

De esta manera que quedan definidas ecuaciones que permitirán trabajar con el error entre la salida real del sistema  $y[n]$  y la salida del predictor  $\hat{y}[n|\theta]$ .

Como se establece en el Capítulo 7, se pretende calcular un estimado que  $\theta$  que minimize la siguiente función:

$$J(\theta) = \sum_{n=1}^N e^T[n, \theta] \cdot e[n, \theta] \quad (\text{C.7})$$

que en el caso de un sistema SISO se convierte en:

$$J(\theta) = \sum_{n=1}^N e^2[n, \theta] \quad (\text{C.8})$$

donde el error  $e[n, \theta]$  está dado por la diferencia entre la salida del sistema y la salida del predictor en el  $n$ -ésimo instante. Entonces se tiene:

$$e[n, \theta] = y[n] - \hat{y}[n | \theta]. \quad (\text{C.9})$$

Sustituyendo (C.6) en (C.9) se tiene que la expresión del error estará dada por:

$$e[n, \theta] = y[n] - \hat{y}[n | \theta] = y[n] - \varphi^T[n] \cdot \theta \quad (\text{C.10})$$

Ahora, el objetivo es calcular las  $2n_s$  incógnitas (parámetros) que componen el vector  $\theta$ , pero en ninguna parte de la teoría se ha dicho cuantas muestras de  $u[n]$  e  $y[n]$  deben considerarse. Es decir, que no se ha determinado el valor de  $N$ , que deberá ser tenido en cuenta para llevar el experimento de identificación a la práctica.

Supóngase que se adquieren  $N$  muestras de la entrada y la salida tal que  $n_s < N$ . De esta manera queda determinado el conjunto

$$Z^N = [ y[1] \ y[2] \ \dots \ y[N] \ u[1] \ u[2] \ \dots \ u[N] ] \quad (\text{C.11})$$

a partir del cual deberá calcularse  $\hat{\theta}$  que mejor se ajuste.

Considerando la expresión del error en la ecuación (C.10) se puede calcular el error para cada instante  $n$ . Considerando condiciones iniciales nulas para cada instante se tiene:

- $n = 1$ :

$$\begin{aligned} e[1, \theta] &= y[1] - \hat{y}[1 | \theta] = y[1] - \varphi^T[1] \cdot \theta \\ &= y[1] + a_1 \underbrace{y[0]}_{=0} + a_2 \underbrace{y[-1]}_{=0} + \dots + a_{n_s} \underbrace{y[1 - n_s]}_{=0} \\ &\quad - b_1 \underbrace{u[0]}_{=0} - b_2 \underbrace{u[-1]}_{=0} - \dots - b_{n_s} \underbrace{u[1 - n_s]}_{=0} \\ &\Rightarrow e[1, \theta] = y[1] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

- $n = 2$ :

$$\begin{aligned} e[2, \theta] &= y[2] - \hat{y}[2 | \theta] = y[2] - \varphi^T[2] \cdot \theta \\ &= y[2] + a_1 y[1] + a_2 \underbrace{y[0]}_{=0} + \dots + a_{n_s} \underbrace{y[2 - n_s]}_{=0} \\ &\quad - b_1 u[1] - b_2 \underbrace{u[0]}_{=0} - \dots - b_{n_s} \underbrace{u[2 - n_s]}_{=0} \\ &\Rightarrow e[2, \theta] = y[2] + a_1 y[1] - b_1 u[1] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

- Si se continúa hasta  $n = n_s$ :

$$\begin{aligned}
 e[n, \theta] &= y[n] - \hat{y}[n|\theta] = y[n] - \varphi^T[n] \cdot \theta \\
 &= y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_{n_s} \underbrace{y[0]}_{=0} \\
 &\quad - b_1 u[n-1] - b_2 u[n-2] - \dots - b_{n_s} \underbrace{u[0]}_{=0} \\
 \Rightarrow e[n, \theta] &= y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_{n-1} y[1] - b_1 u[n-1] \\
 &\quad - b_2 u[n-2] - \dots - b_{n-1} u[1]
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Todavía no aparecen todos los coeficientes  $\{a_1, \dots, a_{n_s}; b_1, \dots, b_{n_s}\}$  de manera que es necesario considerar un instante más:

- $n = n_s + 1$

$$\begin{aligned}
 e[n_s + 1, \theta] &= y[n_s + 1] - \hat{y}[n_s + 1|\theta] = y[n_s + 1] - \varphi^T[n_s + 1] \cdot \theta \\
 &= y[n_s + 1] + a_1 y[n_s] + a_2 y[n_s - 1] + \dots + a_{n_s} y[1] \\
 &\quad - b_1 u[n_s] - b_2 u[n_s - 1] - \dots - b_{n_s} u[1] \\
 \Rightarrow e[n_s + 1, \theta] &= y[n_s + 1] + a_1 y[n_s] + a_2 y[n_s - 1] + \dots + a_{n_s} y[1] \\
 &\quad - b_1 u[n_s] - b_2 u[n_s - 1] - \dots - b_{n_s} u[1].
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Ahora, si se observa atentamente la última ecuación del error (ecuación (C.15)), puede verse que es la primera ecuación de  $e[n, \theta]$  donde aparecen **todos** los parámetros incógnita del vector  $\theta$  por lo tanto la primera ecuación de error que se puede considerar para realizar algún tipo de cálculo es  $e[n_s + 1, \theta]$ .

De esta manera, a medida que se avanza en una muestra se tiene un nuevo intervalo de error hasta  $n = N$ . Esto se muestra gráficamente en la figura C.1.

Por lo tanto, dado que el primer error se tiene para  $n = n_s + 1$  por lo que es necesario redefinir el índice de optimización propuesto en el Capítulo 7 (tener en cuenta que se trata de un desarrollo teórico) de la siguiente forma:

$$J(\theta) = \sum_{n=n_s+1}^N e^T[n, \theta] \cdot e[n, \theta] \tag{C.16}$$

con  $N > n_s + 1$ .

Considerando  $N - n$  términos de error tomando como valor inicial  $e[n_s + 1, \theta]$  se tiene la expresión del error de predicción a medida que se colectan nuevas muestras:

$$\begin{aligned}
 e[n_s + 1, \theta] &= y[n_s + 1] - \varphi^T[n_s + 1] \cdot \theta \\
 e[n_s + 2, \theta] &= y[n_s + 2] - \varphi^T[n_s + 2] \cdot \theta \\
 &\quad \vdots \\
 e[N, \theta] &= y[N] - \varphi^T[N] \cdot \theta
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

donde

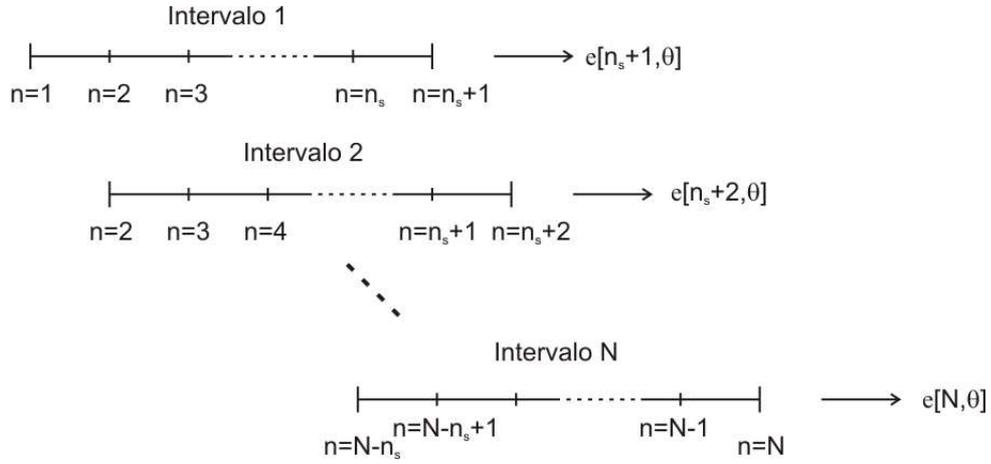


Figura C.1: Evolución del error de predicción a medida que se adquieren las muestras de entrada/salida del sistema.

1.  $\varphi^T[n]$  es un vector fila de dimensión  $1 \times 2n_s$ .
2.  $\theta$  es, como se sabe, un vector columna de dimensión  $2n_s \times 1$ .

Luego, considerando un nivel superior de notación matricial, se pueden agrupar los términos de la ecuación (C.17) para escribir que el vector de error generado hasta el instante  $N$  estará dado por:

$$\epsilon[N, \theta] = Y[N] - \Phi[N] \cdot \theta \quad (\text{C.18})$$

Donde:

1.  $\epsilon[N, \theta] = [ e[n_s + 1, \theta] \quad e[n_s + 2, \theta] \quad \dots \quad e[N, \theta] ]^T$
2.  $Y[N] = [ y[n_s + 1] \quad y[n_s + 2] \quad \dots \quad y[N] ]^T$
3.  $\Phi[N] = [ \varphi[n_s + 1] \quad \varphi[n_s + 2] \quad \dots \quad \varphi[N] ]^T$
4.  $\theta^T = [ a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_s} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_s} ]^T$

Que en forma matricial puede escribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[n_s + 1] \\ e[n_s + 2, \theta] \\ e[n_s + 3, \theta] \\ \vdots \\ e[N, \theta] \end{bmatrix}}_{N-n_s \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} y[n_s + 1] \\ y[n_s + 2] \\ y[n_s + 3] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}}_{N-n_s \times 1} - \underbrace{\begin{bmatrix} y[n_s] & y[n_s - 1] & \dots & y[1] & u[n_s] & u[n_s - 1] & \dots & u[1] \\ y[n_s + 1] & y[n_s] & \dots & y[2] & u[n_s + 1] & u[n_s] & \dots & u[2] \\ y[n_s + 2] & y[n_s + 1] & \dots & y[3] & u[n_s + 2] & u[n_s + 1] & \dots & u[3] \\ \vdots & \vdots \\ y[N - 1] & y[N - 2] & \dots & y[N - n_s] & u[N - 1] & u[N - 2] & \dots & u[N - n_s] \end{bmatrix}}_{N-n_s \times 2n_s} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_s} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_s} \end{bmatrix}}_{2n_s \times 1} \quad (C.19)$$

De manera que para obtener un sistema de ecuaciones que permita despejar  $2n_s$  incógnitas debe verificarse que

$$N - n_s = 2n_s \Rightarrow \boxed{N = 3n_s} \quad (C.20)$$

que es obtuvo el número mínimo de muestras que permite resolver el sistema (C.19).

Ahora, el objetivo es obtener  $\hat{\theta}$  que minimice el índice de performance  $J(\theta)$  que ahora se puede expresar como un producto vectorial.

$$J(\theta) = \epsilon^T[N, \theta] \cdot \epsilon[N, \theta]. \quad (C.21)$$

Como se vio en la teoría,  $\hat{\theta}$  se obtiene despejando  $\theta$  a partir de

$$\frac{dJ(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (C.22)$$

Entonces, de (C.21) se tiene que:

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \epsilon^T[N, \theta] \cdot \epsilon[N, \theta] \\ &= (Y - \Phi \cdot \theta)^T \cdot (Y - \Phi \cdot \theta) \\ &= Y^T Y - \theta^T \Phi^T Y - Y^T \Phi \theta + \theta^T \Phi^T \Phi \theta \end{aligned} \quad (C.23)$$

Derivando respecto de  $\theta$ :

$$\frac{dJ(\theta)}{d\theta} = -2Y^T \Phi + 2\theta^T \Phi^T \Phi \quad (C.24)$$

Igualando (C.24) a cero y despejando respecto de  $\theta$  se tiene el estimado por mínimos cuadrados  $\hat{\theta}$  que minimiza  $J(\theta)$ :

$$\boxed{\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T Y} \quad (C.25)$$

ecuación conocida como **ecuación normal**.

Si  $\hat{\theta}$  verifica que  $J(\hat{\theta}) < J(\theta) \forall \theta$  entonces el sistema es *identificable*.

El cálculo de  $\hat{\theta}$  a partir de la ecuación (C.25) no es directo. Las condiciones que aseguran un  $\hat{\theta}$  único a partir de la ecuación (C.25) se muestran en la sección siguiente.

## C.1 Condición de Persistencia de la excitación (*Persistently Exciting Condition*).

Si se observa la ecuación (C.25), para obtener  $\hat{\theta}$  es necesario que el producto  $\Phi^T \Phi$  arroje una matriz invertible o lo que es lo mismo una matriz no singular. Esta condición se asegura evitando que las filas de la matriz  $\Phi[y, u]$  sean linealmente dependientes.

Si se observa la estructura de la matriz  $\Phi[y, u]$

$$\Phi = \begin{bmatrix} y[n_s] & y[n_s - 1] & \dots & y[1] & u[n_s] & u[n_s - 1] & \dots & u[1] \\ y[n_s + 1] & y[n_s] & \dots & y[2] & u[n_s + 1] & u[n_s] & \dots & u[2] \\ y[n_s + 2] & y[n_s + 1] & \dots & y[3] & u[n_s + 2] & u[n_s + 1] & \dots & u[3] \\ \vdots & \vdots \\ y[N - 1] & y[N - 2] & \dots & y[N - n_s] & u[N - 1] & u[N - 2] & \dots & u[N - n_s] \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

es inmediato que para asegurar la independencia de las filas, lo único que puede hacerse es asegurar que  $u[n]$  sea lo más distinta posible entre cada intervalo de muestreo o lo que es lo mismo que muestras sucesivas estén lo menos correlacionadas posible. Desde el punto de vista físico, lo que se está haciendo es excitar toda la dinámica del sistema para que los efectos de todas las singularidades aparezcan a la salida.

El concepto de persistencia de la excitación será tenido en cuenta a la hora del diseño del experimento de identificación o lo que es lo mismo, a la hora de determinar las propiedades de la señal  $u[n]$  a aplicar al posicionador de antena.

Volviendo a la ecuación normal, el producto  $\Phi^T \Phi$  en notación matricial está dado por:

$$\Phi^T \Phi = \underbrace{\begin{bmatrix} y[n_s] & y[n_s + 1] & y[n_s + 2] & \dots & y[N - 1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y[1] & y[2] & y[3] & \dots & y[N - n_s] \\ u[n_s] & u[n_s + 1] & u[n_s + 2] & \dots & u[N - 1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u[1] & u[2] & u[3] & \dots & u[N - n_s] \end{bmatrix}}_{2n_s \times N - n_s} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y[n_s] & \dots & y[1] & u[n_s] & \dots & u[1] \\ y[n_s + 1] & \dots & y[2] & u[n_s + 1] & \dots & u[2] \\ y[n_s + 2] & \dots & y[3] & u[n_s + 2] & \dots & u[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y[N - 1] & \dots & y[N - n_s] & u[N - 1] & \dots & u[N - n_s] \end{bmatrix}}_{N - n_s \times 2n_s} \quad (\text{C.27})$$

de donde puede demostrarse que la matriz de dimensión  $n \times n$  que ocupa la parte derecha inferior de la matriz  $\Phi^T \Phi$  ( $2n \times 2n$ ) que solamente depende de  $u[n]$  debe ser no singular.

Verificada la condición anterior, el estimado  $\hat{\theta}$  estará dado por:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T Y \quad (\text{C.28})$$

De esta manera se obtuvo por mínimos cuadrados una estimación de  $\theta$ .

En caso de querer mejorar dicha estimación se pueden aplicar funciones de peso para lo cual se utilizará un índice de performance con la siguiente estructura:

$$J(\theta) = \sum_{n=n_s}^N w[n] \cdot e^T[n, \theta] \cdot e[n, \theta] = \epsilon^T W \epsilon . \quad (\text{C.29})$$

Donde  $w[n]$  es una función que pesa los errores. Por ejemplo, debe ser pequeña para errores grandes y viceversa y de esa forma ayudar a minimizar  $J(\theta)$ . La asignación de pesos por lo general proviene de análisis estadísticos. En este caso, el método de los mínimos cuadrados se denomina *weighted least squares* y los parámetros estimados estarán dados por:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T W Y \quad (\text{C.30})$$

En el caso en que  $W = I$  se tiene mínimos cuadrados estándar.

## C.2 Mínimos Cuadrados Recursivos.

Como se vio en las secciones anteriores, en base a un número mínimo de muestras  $N$  se obtuvo una primer estimación del valor de  $\theta$  denominada  $\hat{\theta}$ .

En el capítulo 7 se mostró un ejemplo donde para un sistema de orden 3 eran necesarias 9 muestras para obtener un primer valor de  $\hat{\theta}$ .

Ahora, es posible que durante el lapso en que se adquieren dichas muestras no aparezcan todos los fenómenos a partir de los cuales se pueda extraer información del sistema o simplemente que “mejoren” el valor de  $\hat{\theta}$  de manera que  $\hat{\theta} \rightarrow \theta_0$ .

Es por esto que aparece una forma recursiva de calcular  $\hat{\theta}$  cuando el número de muestras es  $M > N$  o simplemente en sistemas donde los datos se van obteniendo en tiempo real. De esta manera, el valor de  $\hat{\theta}$  para cada iteración será de la forma:

$$\hat{\theta}_{Actual} = \hat{\theta}_{Anterior} + (\text{Término Corrector}) \quad (\text{C.31})$$

Volviendo a la ecuación normal  $\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T Y$ , el primer paso sería analizar que sucede con las estructuras  $\Phi^T \Phi$  y  $\Phi^T Y$  cuando se incorporan más datos.

En el instante  $N + 1$  se tiene que  $\Phi[N + 1]$  tendrá la siguiente estructura:

$$\Phi[N + 1] = [ \varphi[n_s + 1] \quad \varphi[n_s + 2] \quad \dots \quad \varphi[N] \quad \varphi[N + 1] ]^T \quad (\text{C.32})$$

Y además el producto  $\Phi^T \Phi$  puede escribirse como la siguiente sumatoria:

$$\begin{aligned} \Phi^T \Phi &= \sum_{n=n_s}^{N+1} \varphi[n] \cdot \varphi^T[n] \\ &= \begin{bmatrix} -y[n-1] \\ \vdots \\ -y[n-n_s] \\ u[n-1] \\ \vdots \\ u[n-n_s] \end{bmatrix} \cdot [ -y[n-1] \quad \dots \quad -y[n-n_s] \quad u[n-1] \quad \dots \quad u[n-n_s] ] \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

expresión a partir de la cual es fácil de demostrar que el producto  $\Phi^T \Phi$  es una matriz de covarianza.

Cambiando el límite de la sumatoria (C.16) se tiene la siguiente expresión:

$$\Phi^T \Phi[N+1] = \sum_{n=n_s}^{N+1} \varphi[n] \cdot \varphi^T[n] = \sum_{n=n_s}^N \varphi[n] \cdot \varphi^T[n] + \varphi[N+1] \cdot \varphi^T[N+1]. \quad (\text{C.34})$$

La cual se puede escribir como:

$$\Phi^T \Phi[N+1] = \Phi^T[N] \cdot \Phi[N] + \varphi[N+1] \cdot \varphi^T[N+1] \quad (\text{C.35})$$

donde el término  $\Phi^T[N] \cdot \Phi[N]$  es el que se tiene mediante mínimos cuadrados ordinarios.

Luego, para obtener  $\hat{\theta}$  se necesita la inversa de  $\Phi^T \Phi[N+1]$  de manera que se define la siguiente matriz de dimensión  $2n_s \times 2n_s$ :

$$P[N+1] = \left[ \underbrace{\Phi^T[N+1]}_{2n_s \times N-n_s+1} \cdot \underbrace{\Phi[N+1]}_{N-n_s+1 \times 2n_s} \right]^{-1} \quad (\text{C.36})$$

donde se pueden observar las dimensiones de cada una de las matrices y la cual, a partir de los resultados obtenidos en la ecuación (C.34), se puede escribir como:

$$P[N+1] = [\Phi^T[N] \cdot \Phi[N] + \varphi[N+1] \cdot \varphi^T[N+1]]^{-1} \quad (\text{C.37})$$

que resulta en la inversa de la suma de dos matrices. Utilizando el lema de inversión de matrices<sup>1</sup> se evita la inversión de la matriz  $P$  ya que se puede escribir de la siguiente forma:

$$P[N+1] = P[N] - \frac{P[N] \cdot \varphi[N+1] \cdot \varphi^T[N+1] \cdot P[N]}{1 + \varphi^T[N+1] \cdot P[N] \cdot \varphi[N+1]} \quad (\text{C.38})$$

que es una ecuación recursiva para el cálculo de  $P[N+1]$ .

De forma similar se puede determinar el otro producto de matrices involucrado en la ecuación normal

$$\Phi Y[N+1] \quad (\text{C.39})$$

donde

$$1. \Phi^T[N+1] = [ \varphi[n_s] \quad \varphi[n_s+1] \quad \dots \quad \varphi[N] \quad \varphi[N+1] ]$$

$$2. Y[N+1] = [ y[n_s] \quad y[n_s+1] \quad \dots \quad y[N] \quad y[N+1] ]^T$$

que al igual que en caso anterior es posible que sea escrita en función del cálculo hasta el N-ésimo instante:

$$\Phi^T Y[N+1] = \Phi^T[N] \cdot Y[N] + \varphi[N+1] \cdot y[N+1] \quad (\text{C.40})$$

---

<sup>1</sup>El lema de inversión de matrices verifica lo siguiente:  $(A + BCD) = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$

De esta manera, el estimado de  $\theta$  en el instante  $N + 1$  (llámese  $\hat{\theta}[N + 1]$ ) estará dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}[N + 1] &= P[N + 1] \cdot (\Phi^T Y[N + 1]) \\ &= \left[ P[N] - \frac{P[N] \cdot \varphi[N + 1] \cdot \varphi^T[N + 1] \cdot P[N]}{1 + \varphi^T[N + 1] \cdot P[N] \cdot \varphi[N + 1]} \right] \cdot \\ &\quad [\Phi^T[N] \cdot Y[N] + \varphi[N + 1] \cdot y[N + 1]]\end{aligned}\quad (\text{C.41})$$

Aplicando propiedad distributiva y haciendo algunas operaciones elementales se llega a que:

$$\boxed{\hat{\theta}[N + 1] = \hat{\theta}[N] + K[N + 1] [y[N + 1] - \varphi^T[N + 1] \cdot \hat{\theta}[N]]}\quad (\text{C.42})$$

donde:

1.  $\hat{\theta}[N]$  es el estimado calculado con las  $3n_s$  primeras muestras obtenidas o en la iteración anterior.
2.  $K[N + 1] = P[N + 1] \cdot \varphi[N + 1]$ .
3.  $P[N + 1] = P[N] - \frac{P[N] \cdot \varphi[N + 1] \cdot \varphi^T[N + 1] \cdot P[N]}{1 + \varphi^T[N + 1] \cdot P[N] \cdot \varphi[N + 1]}$ .

De manera que se tiene un algoritmo recursivo donde el cálculo del nuevo estimado es en base al estimado calculado en la iteración anterior (o lo que es lo mismo del error de predicción calculado en la iteración anterior) cuya expresión está dada por

$$e[N + 1] = y[N + 1] - \varphi^T[N + 1] \cdot \hat{\theta}[N]\quad (\text{C.43})$$

y del valor que tome el vector  $K[N + 1]$  que puede suponerse como la “ganancia” de dicha corrección.

Con todo lo visto hasta aquí, el cálculo de  $\hat{\theta}$  puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Determinar  $N$ .
2. Asignar valores iniciales a  $P[N]$  y a  $\hat{\theta}[N]$ . Lo más común es utilizar  $P[N] = \rho I$  donde  $\rho$  es un número grande (lo que indica que la ganancia de la corrección será grande) y  $\hat{\theta}[N] = 0$  (aunque podría hacer un cálculo previo).
3. Recolectar  $\{y[1], \dots, y[n_s], \dots, y[N]; u[1], \dots, u[n_s], \dots, u[N]\}$  y calcular  $\varphi^T[N + 1]$ .
4. Asignar  $k \leftarrow N$ .
5. Calcular la ganancia de la corrección:  $K[n + 1] = \left[ P[n] - \frac{P[n] \cdot \varphi[n + 1] \cdot \varphi^T[n + 1] \cdot P[n]}{1 + \varphi^T[n + 1] \cdot P[n] \cdot \varphi[n + 1]} \right] \cdot \varphi[n + 1]$ .
6. Obtener  $\{y[N + 1]; u[N + 1]\}$ .
7. Calcular el nuevo estimado:  $\hat{\theta}[n + 1] \leftarrow \hat{\theta}[n] - K[n + 1] [y[n + 1] - \varphi^T[n + 1] y[n]]$ .
8. Calcular  $P[n + 1]$  (necesario para calcular  $K[n + 2]$ ).  
 $P[n + 1] \leftarrow [I - K[n + 1] \cdot \varphi^T[n + 1]] \cdot P[n]$ .

9. Formar  $\varphi[n + 2]$ .
10.  $n \leftarrow n + 1$ .
11. Volver al paso 5.

Cabe aclarar que si bien el algoritmo anterior no será utilizado de forma explícita como se vio hasta ahora, entender como funcionan este tipo de algoritmos basados en regresiones lineales es interesante para comprender dos aspectos importantes a tener en cuenta:

1. El funcionamiento del Filtro de Kalman.
2. El cumplimiento de la condición *Persistently Exciting*.

ambos tenidos en cuenta durante el informe.

### Mínimos Cuadrados Recursivos con peso (Weighted Recursive Least Squares).

Al igual que en mínimos cuadrados ordinarios vistos en la sección en la primer parte del apéndice, los algoritmos recursivos utilizan un factor de peso donde la matriz  $W[n]$  toma la siguiente forma:

$$W[n] = \begin{bmatrix} a\gamma^{n-ns} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}. \quad (\text{C.44})$$

O lo que es lo mismo, el índice de performance tiene la siguiente forma:

$$J(\theta) = \sum_{n=ns}^N a\gamma^{N-s} \cdot e^T[n, \theta] \cdot e[n, \theta]. \quad (\text{C.45})$$

Donde se observa que es un factor que da mayor peso a los errores “nuevos”. El valor de  $a$  por lo general se elige para minimizar el *bias* del estimado.

El procedimiento de cálculo es el mismo que en la sección anterior, solamente que ahora  $P[N + 1]$  estará dado por la siguiente expresión:

$$P[N + 1] = \frac{P[N]}{\gamma} - \frac{a}{\gamma} \left[ \frac{P[N] \cdot \varphi[N + 1] \cdot \varphi^T[N + 1] \cdot P[N]}{\gamma + a\varphi^T[N + 1] \cdot P[N] \cdot \varphi[N + 1]} \right]. \quad (\text{C.46})$$

Para más información referirse a [9], [17], [19], [20].

# Bibliografía

- [1] Gary E. Evans. “*Antenna Measurement Techniques*”. Artech House. 2003.
- [2] Hugh H. Skilling. “*Los Fundamentos de las Ondas Eléctricas*”. McGraw-Hill.
- [3] IEEE. “*IEEE Standard Test Procedures for Antennas (Std 149-1979)*”. IEEE. 1979.
- [4] John D. Kraus. “*Electromagnetismo*”. McGraw-Hill.
- [5] Leland H. Hemming. “*Electromagnetic Anechoic Chambers: A Fundamental Design and Specification Guide*”. Wiley Interscience.
- [6] Silvio O. Lobosco, José L. Pereira da Costa Díaz. “*Selección y Aplicación de Motores Eléctricos*”. Siemens & Marcombo.
- [7] William L. Brogan. “*Modern Control Theory. 3<sup>rd</sup> Edition*”. Prentice Hall. 1991.
- [8] Bernard Friedland. “*Control System Design. An Introduction to Space-State Methods*”. McGraw-Hill. 1986.
- [9] G. F. Franklin, J. Powell. “*Digital Control of Dynamic Systems*”. Addison-Wesley. 1980.
- [10] Benjamin C. Kuo. “*Sistemas de Control Automático*”. Pearson. 1996.
- [11] Karl J. Åström. “*Computer Controlled Systems. Theory and Design. 3<sup>rd</sup> Edition.*”. Prentice Hall. 1997.
- [12] Trabajo Final. César González, Luis A. Motrel. Dir.: Ing. Ricardo Mantz. “*Control de Posición de Motor de Corriente Continua en Tiempo Mínimo.*”.1994.
- [13] Vadim Utkin, Jurgen Guldner, Jingxin Shi. “*Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*”. Taylor & Francis. 1999.
- [14] L. Moreno, I. Peñarrocha, H. de Battista. “*Notas de Curso: Sistemas de Control de Estructura Variable*”. Universidad Politécnica de Valencia. 2003.
- [15] Ned Mohan, Tore Undeland, William Robbins. “*Power Electronics. Converters, Applications and Design. 2<sup>nd</sup> Edition*”. Wiley & Sons. 1995.
- [16] Hansruedi Buhler. “*Réglage Par Mode de Glissement.*”. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. 1999.

- [17] Lennart Ljung. “*System Identification. Theory for the User (2nd Edition)*”. Prentice-Hall. 1999.
- [18] Lennart Ljung, Torkel Glad. “*Modeling of Dynamic Systems*”. Prentice Hall. 1994.
- [19] Lennart Ljung. “*System Identification Toolbox For Use With Matlab. User’s Guide*”. Mathworks. 2007.
- [20] Lennart Ljung. “*From Data to Model: A Guided Tour of System Identification.*”. Department of Electrical Engineering. Linköping University. 1994.
- [21] Tohru Katayama. “*SubSpace Methods for System Identification*”. Springer. 2005.
- [22] Boaz Porat. “*A Course on Digital Signal Processing*”. John Willey & Sons. 1997.
- [23] Alan V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. Hamid Nawab. “*Signals and Systems (2<sup>nd</sup> Edition)*”. Pearson. 1997.
- [24] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, John R. Buck. “*Discrete-Time Signal Processing (2<sup>nd</sup> Edition)*”. Prentice Hall. 1999.
- [25] Paul L. Meyer. “*Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*”. Addison-Wesley-Longman. 1998.
- [26] G. Welch, G. Bishop. “*An Introduction to the Kalman Filter*”. Department of Computer Science. University of North Carolina. 1998.
- [27] P. Van Overschee, B. De Moore. “*N<sub>4</sub>SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems*”. Automatica Vol. 30, No. 1, pp. 75-93. 1994.
- [28] Microchip: <http://www.microchip.com>
- [29] Freescale: <http://www.freescale.com>
- [30] Rabbit Semiconductor: <http://www.rabbit.com>
- [31] Rabbit Semiconductor. “*Rabbit 3000 Microprocessor User’s Manual*”. 2003.
- [32] Rabbit Semiconductor. “*Rabbit 3000 Microprocessor Designer’s Handbook*”. 2003.
- [33] Rabbit Semiconductor. “*RabbitCore RCM3000 User’s Manual*”. 2003.
- [34] Rabbit Semiconductor. “*Dynamic C User’s Manual*”. 2003.
- [35] Kamal Hyder, Bob Perrin. “*Embedded Systems Design Using the Rabbit 3000 Microprocessor*”. Elsevier. 2005.
- [36] Technical Note TN200. “*SPI: Using the Rabbit Clocked Serial Ports*”. Rabbit Semiconductor.
- [37] Don Lancaster. “*Active Filter Cookbook. 2<sup>nd</sup> Edition.*”. Newlines. 2000.

- [38] Sergio Franco. *“Design With Operational Amplifiers and Analog Integrated Circuits.”*. Tata-McGraw-Hill. 2002.
- [39] Ramón Pallás-Areny, John W. Webster. *“Analog Signal Processing.”*. Wiley & Sons. 1999.
- [40] William H.Press, Brian P. Flanerry. *“Numerical Recipes in C. (2<sup>nd</sup> edition)”*. Cambridge. 2002