



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciado en Astronomía

COSMOLOGÍA Y AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES

Eduardo Mario Gutiérrez

Director: Gustavo E. Romero
Co-directora: Florencia L. Vieyro

LA PLATA, ARGENTINA
- FEBRERO DE 2017 -

A Pochita.

Prefacio

Algunos de mis primeros recuerdos me encuentran en el fondo de casa, de noche, mirando el cielo con mi viejo. No sé desde cuándo pero ya sabía mi vocación, quería ser astrónomo. Por suerte, los años pasaron pero mi vocación no; más bien, ésta se afianzó año a año. Un poco más grande, comencé a pensar acerca de qué quería específicamente estudiar—dentro de la increíble gama de posibilidades que ofrece la astronomía. Había dos campos que me apasionaban: la astrofísica de agujeros negros y la cosmología. Hoy, 20 años después de aquellos primeros recuerdos, me encuentro en la última etapa de la carrera de Astronomía, estudiando un tema que combina, justamente, los agujeros negros y la cosmología. Estas palabras son, simplemente, para transmitir mi felicidad al respecto.

Dicho esto, presento esta tesis como requisito final para obtener el grado académico de Licenciado en Astronomía de la Universidad Nacional de La Plata. La misma contiene los estudios desarrollados bajo la dirección del Dr. Gustavo E. Romero y la co-dirección de la Dra. Florencia L. Vieyro, junto con la colaboración de otros investigadores miembros del Grupo de Astrofísica Relativista y Radioastronomía (GARRA).

Eduardo Mario Gutiérrez
e-mail: egutierrez@carina.fcaglp.unlp.edu.ar
La Plata, Febrero de 2017.

Agradecimientos

Estos últimos años han sido, sin duda, los mejores de mi vida; pero no habrían sido así sin la compañía de ciertas personas a quienes quiero agradecer explícitamente.

A mi director y profesor consejero, Gustavo, por tu fundamental guía intelectual, por haberme dado la oportunidad de trabajar en los temas que más me apasionan y, principalmente, por la confianza depositada en mí.

A mi co-directora, Flor, por haberme ayudado con este trabajo, en todos sus aspectos, desde el primer día hasta el último. Me siento afortunado de poder seguir trabajando y aprendiendo con vos.

A la Universidad Nacional de La Plata, por haberme permitido estudiar astronomía, en mi ciudad, y de manera pública y gratuita.

Al Obser, y a toda la gente que colabora para que ese lugar sea único.

A mis amigos, los nuevos y los viejos, y a todas aquellas personas que pasaron por mi vida brindándome su cariño y su apoyo. En especial, a Luciano y Gastón, además de por su amistad y su compañía fundamentales, por haber compartido conmigo los momentos más importantes de la carrera.

A mi familia, tíos y primos, por su compañía y su apoyo todos estos años.

A Sarita, por tu amor; por tus cariños y abrazos.

A Chacha, por haberme acompañado en el día a día (por las velitas antes de cada final), y por esa energía y alegría envidiables que transmitís a todo aquel que te cruce en su camino. Porque sos única. Gracias.

A mi mamá, por estar siempre pendiente de mí, en cada detalle. Por quererme incondicionalmente, como nadie.

A mi papá, por inculcarme la vocación científica, por tu esfuerzo para que nunca me falte nada. Por ser padre y amigo. Porque te admiro profundamente.

A Pochita, porque con tu amor y cariño fuiste una parte fundamental de mi infancia y de mi formación como persona. Como agradecimiento, te dedico esta tesis.

Resumen

Diversos mecanismos en el universo temprano podrían haber dado lugar a la formación de agujeros negros primordiales de diferentes masas. Éstos interactuarían con el plasma cósmico (radiación) acretaando y emitiendo partículas. Tal interacción podría haber modificado la evolución del factor de escala del espacio-tiempo, y producido un incremento en la entropía del universo. En este trabajo desarrollamos un modelo cosmológico de universo temprano con dos fluidos interactuantes: radiación y un gas de agujeros negros primordiales. Para las masas de estos últimos consideramos casos representativos de distribuciones extendidas y monoenergéticas. Discutimos las diferencias en los efectos que produce cada una de estas distribuciones sobre la evolución cosmológica, y analizamos la relevancia del proceso de acreción. Los escenarios cosmológicos específicos son caracterizados de acuerdo con las restricciones que existen sobre el espectro inicial de agujeros negros primordiales. Encontramos que las distribuciones monoenergéticas son más propicias para producir efectos significativos en la evolución cosmológica.

Abstract

Several processes in the early universe might lead to the formation of primordial black holes with different masses. These black holes would interact with the cosmic plasma (radiation) through the accretion and emission of particles. That interaction could have changed the evolution of the spacetime scale-factor and increased the entropy of the universe. In this thesis, we develop a cosmological model of the early universe in which there are two interacting fluids: radiation and a primordial black hole gas. Particularly, for the primordial black hole gas we consider representative cases of extended and narrow initial mass functions. We discuss the changes that each class of distributions produce, and analyze the relevance of the accretion process. Furthermore, with the aim of characterizing the scenarios, we use the available constraints over the initial mass functions of the primordial black hole gas. We find that the narrow initial mass functions are more propitious to produce significant changes in the cosmic evolution of the early universe.

Acrónimos

PBH *Primordial Black Hole*

CDM *Cold Dark Matter*

BBN *Big Bang Nucleosynthesis*

GRB *Gamma Ray Burst*

FLRW *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*

Índice general

Prefacio	V
Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
1. Introducción	3
2. Agujero negro en un baño térmico	7
2.1. Agujeros negros	7
2.1.1. Agujero negro de Schwarzschild	9
2.1.2. Termodinámica de agujeros negros	11
2.2. Termodinámica de un plasma térmico relativista	14
2.3. Agujero negro de Schwarzschild en un baño térmico	15
2.3.1. Cavidad de volumen fijo	18
2.3.2. Escenario cosmológico	19
3. Agujeros negros primordiales	25
3.1. Generalidades	25
3.2. Mecanismos de formación	27
3.3. Restricciones sobre la abundancia de PBHs	29
3.3.1. Evaporación	30
3.3.2. <i>Lensing</i> gravitacional	31
3.3.3. Efectos dinámicos	32

4. Cosmología con agujeros negros primordiales	35
4.1. Cosmología de dos fluidos interactuantes	35
4.2. Universo temprano con formación de PBHs	37
4.2.1. Distribución de masas estrecha	39
4.2.2. Distribución de masas extendida	40
5. Resultados	43
5.1. Parámetros y condiciones iniciales	43
5.2. Distribución de masas monoenergética	45
5.3. Distribución de masas tipo ley de potencia	49
5.3.1. Escenario sin restricciones	50
5.3.2. Escenario con restricciones	53
6. Conclusiones	57
A. Complementos de agujeros negros	59
A.1. Una definición formal de agujero negro	59
A.2. Otras soluciones de agujeros negros	60
B. Modelos cosmológicos	63
B.1. Modelos de FLRW	63
B.1.1. Algunas soluciones analíticas	67
C. Método de resolución numérica	69
Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

“Thought is only a flash between two long nights, but this flash is everything.”

– Henri Poincaré, *The Value of Science* (1908).

El mundo está constituido por cosas concretas, las cuales interactúan entre sí formando sistemas. A su vez, los sistemas se asocian unos con otros formando supersistemas. El sistema máximo, es decir aquel constituido por la asociación de todos los demás, es el universo (Bunge 1979).

Las distintas ciencias estudian aspectos específicos del universo. Luego, consideran sólo algunos sistemas y sólo algunas de sus interacciones; es más, consideran sólo modelos que representen tales sistemas y tales interacciones. La cosmología, en particular, es el estudio científico del universo como un todo. En otras palabras, es el estudio de los subsistemas del universo —su estructura, sus interacciones y su evolución— en la mayor escala. Existen situaciones de interés cosmológico en las cuales tales interacciones son muy débiles y no modifican la evolución cosmológica. Por ejemplo, el estado de expansión acelerada del universo actual puede representarse mediante un modelo con tres componentes de materia *no-interactuantes*: materia no-relativista, radiación y una tercera componente oscura de origen incierto (la llamada energía oscura). Sin embargo, en otros escenarios cosmológicos esto no sucede, y la interacción entre las distintas componentes de materia influye considerablemente en la evolución del universo. El objetivo de esta tesis es estudiar un escenario de este tipo; específicamente, un escenario de universo temprano¹ en el

¹En la literatura se suele llamar ‘universo temprano’ a la etapa comprendida entre tiempos $\gtrsim 10^{-10}$ s y $\sim 3.8 \times 10^5$ yr posteriores al Big Bang; mientras que para la etapa previa se utiliza el término ‘universo muy

cual coexisten dos sistemas: radiación y un gas de agujeros negros.

En la década de 1970, Carr & Hawking (1974) propusieron que fluctuaciones extremas en el universo temprano podrían haber dado lugar a la formación de agujeros negros de diferentes masas. Debido a su origen, a estos objetos se los llamó agujeros negros primordiales o *Primordial Black Holes (PBHs)*. A diferencia de los agujeros negros galácticos o supermasivos, los PBHs podrían tener masas relativamente pequeñas, lo que implica que aportarían cantidades significativas de radiación al universo temprano mediante el proceso de evaporación por radiación de Hawking (Hawking 1974). De la misma manera, debido a la alta densidad del universo temprano, los PBHs acretarían partículas del plasma cósmico aumentando su energía. Esta interacción mutua entre los PBHs y la radiación podría modificar la evolución cosmológica.

En general, según el mecanismo por el cual se formen los PBHs, su distribución inicial de masas será o bien extendida, o bien estrecha y centrada alrededor de una masa particular. Diversos autores han estudiado los efectos de la presencia de distintas poblaciones de PBHs sobre la dinámica del universo. Un estudio pionero fue presentado por Barrow et al. (1991), quienes consideraron una población de PBHs con una distribución de masas tipo ley de potencia. En su tratamiento, Barrow et al. (1991) desprecian la acreción de radiación sobre los PBHs y, además, consideran que todos los agujeros negros se forman simultáneamente. En otros trabajos también se han estudiado poblaciones de PBHs monoenergéticas (e.g, Barrow et al. 1992; Zimdahl & Pavon 1998; Brevik & Hales 2003), o escenarios con formación continua de PBHs en espacio-tiempos con más de 4 dimensiones (Borunda & Masip 2010). Por otro lado, desde la propuesta de Carr y Hawking, numerosas restricciones observacionales y teóricas han sido impuestas sobre el espectro inicial de los PBHs (ver, e.g., Carr et al. 2010). A su vez, estas restricciones pueden trasladarse a restricciones sobre diversas condiciones generales del universo temprano. En resumen, los PBHs proveen una herramienta valiosa para el estudio de los primeros instantes de la expansión cósmica.

La hipótesis básica de esta tesis es que las condiciones en el universo temprano permitieron la formación de una población de PBHs. Tales agujeros negros habrían interactuado con el plasma cósmico produciendo ciertos efectos en la evolución del universo. El objetivo general del trabajo es *investigar los efectos de una población de PBHs acretantes en la evolución cosmológica del universo temprano*. Para desarrollar esta tarea, nos planteamos

temprano' (del inglés *very early universe*). En este trabajo utilizamos simplemente 'universo temprano' para referirnos a cualquiera de estas dos etapas.

los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar un modelo cosmológico que represente escenarios de universo temprano con radiación y con PBHs acretantes, y encontrar las ecuaciones que rigen su evolución.
- Aplicar dicho modelo a poblaciones de PBHs con distribuciones de masas extendidas y monoenergéticas. En cada caso, resolver las ecuaciones para distintas condiciones iniciales, y analizar la evolución cosmológica y la generación de entropía. Además, estudiar si la acreción de radiación sobre los PBHs es relevante en dicha evolución.
- En todos los casos, discutir las implicancias de las restricciones que existen sobre el espectro inicial de PBHs.

La tesis consta de seis capítulos, más tres apéndices complementarios. En el Capítulo 2 presentamos las principales propiedades de los sistemas involucrados en nuestro modelo cosmológico. Es decir, introducimos por un lado el concepto de agujero negro y su termodinámica, y por otro la termodinámica de un plasma térmico relativista. Luego, estudiamos, de manera general, la interacción de este plasma con un único agujero negro. En el Capítulo 3 discutimos las principales propuestas relacionadas con los PBHs. En particular, los posibles mecanismos para su formación y las distintas restricciones teóricas y observacionales que existen sobre su espectro inicial de masas. En el Capítulo 4 desarrollamos un modelo cosmológico que representa un universo temprano con presencia de PBHs, y encontramos las ecuaciones que rigen la evolución cosmológica. Luego, aplicamos el modelo a casos representativos de distribuciones extendidas y estrechas; a saber, distribuciones tipo ley de potencia y tipo delta de Dirac. En el Capítulo 5 analizamos los resultados de las ecuaciones correspondientes a cada distribución, considerando distintas condiciones iniciales. En particular, estudiamos escenarios en los que la cantidad de PBHs está acotada por las restricciones discutidas en el Capítulo 3. Finalmente, en el Capítulo 6, presentamos las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Agujero negro en un baño térmico

Según el modelo estándar de la cosmología, la componente dominante en el universo temprano es la radiación—más precisamente, un plasma relativista en equilibrio térmico. Si en este escenario se forman agujeros negros, éstos interactúan con la radiación acretaando y emitiendo partículas. En este capítulo estudiamos dicha interacción. Para ello, consideramos un sistema compuesto por un único agujero negro de Schwarzschild y un plasma térmico relativista contenidos en una cavidad. Analizamos si existen configuraciones de equilibrio térmico entre ambas componentes.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la primera sección introducimos el concepto de agujero negro y la solución de Schwarzschild. Además, discutimos la termodinámica de estos objetos. En la segunda sección presentamos brevemente la termodinámica de un plasma relativista en equilibrio térmico. Finalmente, en la tercera sección, estudiamos la interacción del plasma con un único agujero negro en distintos escenarios.

2.1. Agujeros negros

A finales del siglo XVIII, John Michell (1724-1793) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827) llegaron de manera independiente a la misma conclusión: si un objeto fuese lo suficientemente masivo y compacto, tendría asociado un campo gravitatorio tan intenso que no dejaría escapar ni siquiera la luz. Este razonamiento se basaba en el concepto Newtoniano de “velocidad de escape”, bajo la suposición de que la luz experimenta la interacción gravitatoria. A estos objetos se les llamó ‘estrellas oscuras’ y su existencia fue posteriormente descartada a partir del descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de la luz.

Más de cien años después, en 1915, Albert Einstein (1879-1955) completó su Teoría General de la Relatividad. En esta teoría, la gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. Esta curvatura, representada por el *tensor de curvatura de Riemann*¹, está relacionada con la cantidad de energía e impulso de la materia, representada por el tensor de energía-impulso, a través de las ecuaciones de campo de la Relatividad General o *ecuaciones de Einstein*. Al ser un fenómeno geométrico, la gravedad afecta la trayectoria de cualquier partícula material, incluidos los fotones.

Durante el siglo XX se estudiaron diversas soluciones a las ecuaciones de campo; algunas de ellas representan espacio-tiempos que contienen regiones tan curvadas que no dejan escapar ni siquiera la luz. A estas soluciones se les llamó soluciones de *agujeros negros*². Independientemente, físicos como Robert Oppenheimer (1904-1967) y Subrahmanyan Chandrasekar (1910-1995) estudiaron las propiedades de la materia ante el colapso gravitatorio y encontraron, entre otras cosas, que no existe mecanismo que detenga el colapso de una estrella con masa $M > 10 M_{\odot}$. El resultado de tal proceso es un objeto completamente colapsado, por lo cual el espacio-tiempo que lo rodea debe estar extremadamente curvado. Luego, se empezó a considerar que estos espacio-tiempos podían ser representados por las soluciones de agujeros negros.

A partir de estos descubrimientos, se ha acumulado considerable evidencia astronómica que respalda la existencia de los agujeros negros (ver, e.g, Casares 2007; Camenzind 2007; Romero & Vila 2014). Desde el punto de vista astrofísico podemos clasificar a los mismos de la siguiente manera (e.g. Frolov & Zelnikov 2011):

- agujeros negros galácticos o de masa estelar ($M \sim 3 - 10 M_{\odot}$);
- agujeros negros de masa intermedia ($M \sim 10^3 M_{\odot}$);
- agujeros negros supermasivos ($M \sim 10^5 - 10^9 M_{\odot}$);
- agujeros negros primordiales (en principio el rango de masas no está acotado).

La evidencia respalda principalmente la existencia de los agujeros negros galácticos y supermasivos. Los agujeros negros de masa intermedia podrían formarse por acreción de materia sobre un agujero negro de masa estelar, o por la colisión de dos o más de éstos. En

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

²En verdad, el término ‘agujero negro’ fue acuñado recién en 1967 por el físico estadounidense John Archibald Wheeler (1911-2008). Anteriormente se utilizaron otros términos como por ejemplo ‘estrella congelada’.

tanto, los agujeros negros primordiales se podrían haber formado en el universo temprano por mecanismos diversos que estudiaremos en profundidad en el Cap. 3.

Formalmente, un agujero negro es una *región* del espacio-tiempo causalmente desconectada del resto. Esta región está rodeada por una hipersuperficie tipo luz llamada *horizonte de eventos*; cualquier partícula que cruce el horizonte en dirección al agujero negro no puede regresar. Diversas soluciones a las ecuaciones de campo representan universos con regiones de este tipo. No obstante, es posible dar una definición de agujero negro independientemente de la métrica particular y del sistema de coordenadas adoptado (ver el Apéndice A.1).

2.1.1. Agujero negro de Schwarzschild

En 1916, el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild (1873-1916) encontró la primera solución a las ecuaciones de campo de la Relatividad General³. La solución de Schwarzschild representa un espacio-tiempo esféricamente simétrico, estacionario y estático. En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

donde $r_S := 2GM/c^2$ es llamado *radio de Schwarzschild*, c es la velocidad de la luz en el vacío, G es la constante de gravitación universal y M es la masa del agujero negro. En estas coordenadas, la métrica es singular en $r = 0$ y en $r = r_S$. Sin embargo, calculando el escalar de Kretschmann⁴ (e.g Henry 2000),

$$K := R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}, \quad (2.2)$$

donde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de curvatura de Riemann, notamos que el espacio-tiempo de Schwarzschild es singular sólo en $r = 0$. La singularidad en $r = r_S$ es aparente y se debe a la elección de coordenadas. Luego, deben existir sistemas de coordenadas en los cuales la métrica de Schwarzschild sea regular en $r = r_S$. En efecto, realizando el cambio de variable

$$v := ct + r + r_S \log \left| \frac{r - r_S}{r_S} \right|, \quad (2.3)$$

³K. Schwarzschild envió una carta con la solución a Einstein mientras se encontraba combatiendo en el frente ruso durante la Primera Guerra Mundial. En la misma escribe: “As you see, the war treated me kindly enough, in spite of the heavy gunfire, to allow me to get away from it all and take this walk in the land of your ideas”.

⁴Erich Justus Kretschmann (1887-1973).

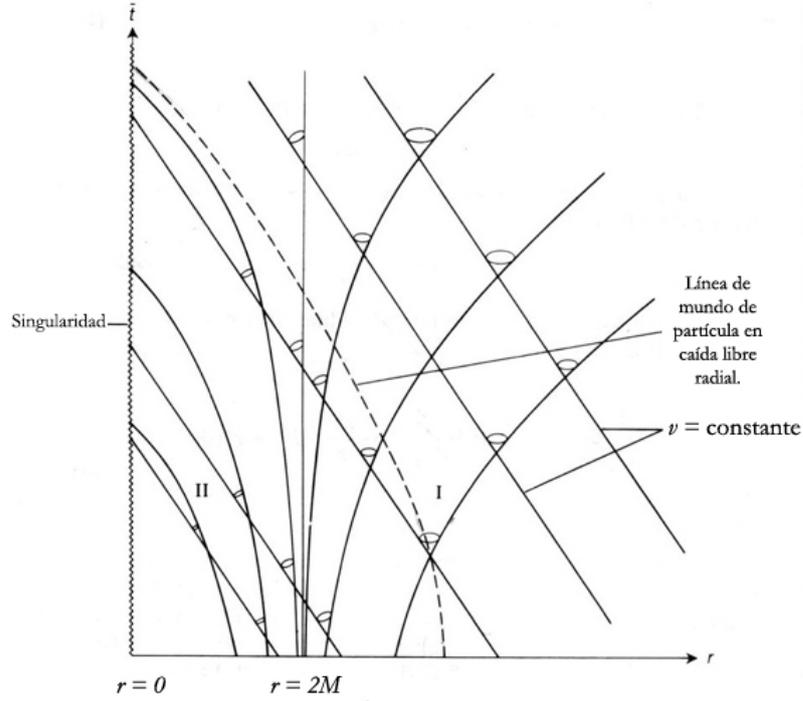


Figura 2.1: Diagrama de espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas. Se muestra el comportamiento de los conos de luz y de una geodésica tipo tiempo en las proximidades del horizonte de eventos $r_S = 2MG/c^2$. La región II representa al agujero negro de Schwarzschild y la región I al resto del universo.

podemos expresar la solución de Schwarzschild en las llamadas *coordenadas de Eddington-Finkelstein*⁵,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 + 2drdv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.4)$$

resultando la misma regular en $r = r_S$. Como v es una coordenada nula, es común definir la coordenada tipo tiempo \bar{t} a través de

$$c\bar{t} := v - r = ct + r_S \log \left| \frac{r - r_S}{r_S} \right|, \quad (2.5)$$

con lo cual la métrica resulta

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{2cr_S}{r} d\bar{t}dr + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.6)$$

que nuevamente es regular en $r = r_S$. En la Fig. (2.1) mostramos un diagrama espacio-temporal de la solución de Schwarzschild en estas coordenadas. Podemos notar que la superficie $r = r_S$ es de tipo luz, y al cruzarla no existen curvas causales que permitan

⁵Sir Arthur Stanley Eddington (1882-1944); David Ritz Finkelstein (1929-2016).

regresar a la región exterior. De esta manera, los eventos en la región $r < r_S$ están causalmente desconectados del resto del espacio-tiempo. En este sentido, la región $r = r_S$ es un *horizonte de eventos* y la región $r \leq r_S$ es un *agujero negro*.

La solución de Schwarzschild es la solución de agujero negro más simple y está caracterizada por un solo parámetro, su masa M . En el Apéndice A.2 presentamos soluciones de agujeros negros más generales.

2.1.2. Termodinámica de agujeros negros

Todo agujero negro, luego de un tiempo de relajación, alcanza un estado de equilibrio (estacionario) en el cual está completamente descrito por tres parámetros: su masa M , su momento angular J y su carga eléctrica Q (e.g. Misner et al. 1973). Ciertas propiedades geométricas de estos objetos satisfacen una serie de leyes que se asemejan a las leyes de la termodinámica ordinaria (Bekenstein 1973; Bardeen et al. 1973). A partir de estas propiedades se pueden asociar cantidades termodinámicas a los agujeros negros estacionarios.

El área \mathcal{A} de un agujero negro estacionario es (ver, e.g. Romero & Vila 2014)

$$\mathcal{A} = 4\pi \left\{ 2 \left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - q^2 + \frac{2GM}{c^2} \left[\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - q^2 - \left(\frac{J}{cM} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.7)$$

donde $q^2 := GQ^2/4\pi\epsilon_0 c^4$; y G , ϵ_0 y c son la constante de gravitación universal, la permitividad del vacío y la velocidad de la luz en el vacío, respectivamente. Invirtiendo esta relación obtenemos una expresión para la masa del agujero negro:

$$M \equiv M(\mathcal{A}, J, Q) = \frac{c^2}{G} \left\{ \frac{\pi \left[(q^2 + \mathcal{A}/4\pi)^2 + 4(J/c)^2 \right]}{\mathcal{A}} \right\}^{1/2}. \quad (2.8)$$

Ante una pequeña variación $d\mathcal{A}$, dJ , dQ , la masa varía una cantidad

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} d\mathcal{A} + \frac{\Omega}{c^2} dJ + \frac{\Phi}{c^2} dQ, \quad (2.9)$$

donde $\kappa := 8\pi G(\partial M/\partial \mathcal{A})_{J,Q}$ es la *gravedad superficial*, $\Omega := c^2(\partial M/\partial J)_{\mathcal{A},Q}$ es la *velocidad angular de rotación*, y $\Phi := c^2(\partial M/\partial Q)_{\mathcal{A},J}$ es el *potencial eléctrico* del agujero negro. El segundo y el tercer término de la ecuación (2.9) representan las variaciones de la energía de rotación y de la energía eléctrica del agujero negro.

Podemos notar que si asignamos al agujero negro una temperatura proporcional a la gravedad superficial κ y una entropía proporcional a su área \mathcal{A} , la relación (2.9) resulta análoga a la primera ley de la termodinámica. Más aún, existen dos teoremas que apoyan

esta analogía (ver, e.g., Frolov & Novikov 1997): por un lado, la gravedad superficial κ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte de eventos; por otro lado, el *teorema de las áreas* enuncia que el área \mathcal{A} nunca decrece, $\Delta\mathcal{A} \geq 0$. Estos dos enunciados son similares, respectivamente, a la ley cero y a la segunda ley de la termodinámica ordinaria.

Si le damos sentido físico a estas analogías obtenemos una contradicción, ya que en el contexto de la Relatividad General un agujero negro es un absorbente perfecto, es decir, tiene temperatura nula. La solución a este problema proviene de consideraciones cuánticas. En 1974, Stephen Hawking (1942-) propuso que los agujeros negros estacionarios emiten radiación con un espectro térmico (Hawking 1974). Sus cálculos son realizados en el marco de la “gravedad semiclásica”⁶. En su forma más general, el resultado de Hawking puede enunciarse de la siguiente manera:

Sea un espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ que contiene un agujero negro estacionario. Sea un campo cuántico propagándose en este espacio-tiempo. Luego, a tiempos asintóticamente grandes partículas de este campo son radiadas al infinito asintóticamente plano con un espectro térmico a la temperatura $T = \hbar\kappa/2\pi k_{\text{B}}c$.

A partir de este enunciado decimos que un agujero negro estacionario es, en efecto, un sistema en equilibrio termodinámico. Además, su temperatura resulta proporcional a la gravedad superficial, en acuerdo con la analogía previa.

Cabe mencionar que al radiar, la masa de un agujero negro decrece y en consecuencia decrece su área. Es decir que la radiación de Hawking viola el teorema de las áreas, y parece dificultar la relación entre la entropía y el área. No obstante, en un proceso físico real un agujero negro no está aislado; las partículas térmicas emitidas aportan a la entropía del medio. Se puede verificar que la entropía total del sistema no decrece en el proceso.

En base a lo discutido formalizamos la termodinámica de los agujeros negros. Para ello, definimos la temperatura y la entropía de un agujero negro⁷:

$$T_{\text{BH}} := \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_{\text{B}}c}, \quad S_{\text{BH}} := \frac{k_{\text{B}}c^3}{4\hbar G} \mathcal{A}. \quad (2.10)$$

Luego, postulamos las *Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros*:

⁶En gravedad semiclásica, los campos de materia son tratados como campos cuánticos propagándose en un espacio-tiempo clásico $(M, g_{\mu\nu})$.

⁷Esta expresión para la entropía es conocida por el nombre de *entropía de Bekenstein-Hawking*; Jacob David Bekenstein (1947-2015).

- **Ley Cero** La temperatura de un agujero negro estacionario es constante sobre su horizonte de eventos.
- **Primera Ley** La variación de la energía E de un agujero negro al pasar de un estado estacionario a otro es

$$dE = T_{\text{BH}}dS_{\text{BH}} + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (2.11)$$

- **Segunda Ley** En cualquier proceso en el que esté involucrado un agujero negro, la entropía total no decrece:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{BH}} + \Delta S_{\text{m}} \geq 0, \quad (2.12)$$

donde S_{m} es la entropía del medio.

Al igual que en la termodinámica ordinaria, la tercera ley posee varios enunciados (e.g. Bardeen et al. 1973; Israel 1986). Aunque no será de utilidad en este trabajo, presentamos por completitud uno de ellos:

- **Tercera Ley** Es imposible, mediante cualquier proceso físico, llevar la temperatura de un agujero negro al cero absoluto en un número finito de pasos (Bardeen et al. 1973).

Para un agujero negro de Schwarzschild ($J = Q = 0$), las cantidades termodinámicas son simplemente

$$T_{\text{BH}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_{\text{B}} G M}, \quad S_{\text{BH}} = \frac{4\pi k_{\text{B}} G}{\hbar c} M^2. \quad (2.13)$$

La tasa de pérdida de masa por radiación de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild es (Frolov & Zelnikov 2011)

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{\text{rad}} = \frac{1}{c^2} \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\text{rad}} = \frac{1}{c^2} \Sigma_{\text{BH}} h_* \sigma T_{\text{BH}}^4, \quad (2.14)$$

donde Σ_{BH} es el área efectiva del agujero negro y h_* es el número de grados de libertad internos del campo cuántico.

Una característica importante de los agujeros negros de Schwarzschild es que su calor específico es negativo. En efecto,

$$C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{J=Q=0} = -\frac{8\pi k_{\text{B}} G}{\hbar c} M^2. \quad (2.15)$$

Esto implica que ante una disminución de la energía (o masa) del agujero negro, su temperatura se incrementa. Luego, cuanto más pequeño es un agujero negro más intensamente radía.

2.2. Termodinámica de un plasma térmico relativista

Si un fluido está en equilibrio térmico a una temperatura tal que $k_B T \gg m_e c^2$, se podrán crear variadas clases de partículas y antipartículas en distintas interacciones. A estas temperaturas, casi todas las partículas creadas son ultrarelativistas, es decir que satisfacen la relación de dispersión $E_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|$. Además, si la tasa de interacciones es suficientemente alta, las distintas clases de partículas alcanzan rápidamente un equilibrio termodinámico entre sí⁸.

En el universo actual, la componente de radiación está dominada principalmente por el *fondo cósmico de microondas* (CMB) que presenta un espectro térmico a una temperatura $T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K}$. En cambio, en el universo temprano las temperaturas y densidades extremadamente elevadas permitieron que existan distintas clases de partículas relativistas en proporciones comparables.

Supongamos que tenemos \mathcal{N} clases de partículas ultrarelativistas en equilibrio termodinámico a una temperatura T . La densidad de partículas n_i , la densidad de energía ρ_i y la presión p_i de la clase i de partículas están dadas por (ver, e.g., Rich 2010)

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} f_i(\mathbf{p}), \\ \rho_i &= \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} f_i(\mathbf{p}) E_{\mathbf{p}}, \\ p_i &= \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} f_i(\mathbf{p}) \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E_{\mathbf{p}}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde g_i denota el número de grados de libertad internos y $f_i(\mathbf{p})$ la densidad de estados de momento \mathbf{p} de la clase i . Para un sistema en equilibrio termodinámico, $f_i(\mathbf{p})$ está dado por las funciones de distribución de Fermi-Dirac (+) o de Bose-Einstein (-), según sea el caso:

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(E_{\mathbf{p}} - \mu_i)/k_B T] \pm 1}. \quad (2.17)$$

Aquí, μ_i es el potencial químico de la clase i . Para temperaturas suficientemente altas ($k_B T \gg \mu$) podemos despreciar los potenciales químicos y realizar las integraciones en

⁸En un contexto cosmológico, la condición para el equilibrio es que la tasa de interacciones Γ sea mucho mayor que la tasa de expansión del universo, $\Gamma \gg \dot{a}$.

(2.16). Se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} n_i(T) &= c_i \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3, \\ \rho_i(T) &= d_i \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}, \\ p_i(T) &= d_i \frac{(k_B T)^4}{3(\hbar c)^3}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Los factores constantes c_i y d_i dependen de los grados de libertad internos de las partículas de la clase i . Notamos que las cantidades termodinámicas para las \mathcal{N} clases de partículas tienen la misma dependencia con la temperatura. Luego, para el sistema compuesto,

$$\begin{aligned} n(T) &= f_* \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3, \\ \rho(T) &= g_* \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}, \\ p(T) &= g_* \frac{(k_B T)^4}{3(\hbar c)^3}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde f_* y g_* dan cuenta de la contribución de todas las especies. En general, f_* y g_* serán funciones de la temperatura, ya que cuanto más elevada sea ésta, más clases de partículas habrá en el plasma. No obstante, esta dependencia es discreta (se puede incluir por medio de funciones Θ de Heaviside) y no será de importancia.

Por último, de la Ec. (2.19) deducimos la ecuación de estado

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (2.20)$$

Además, a partir de la relación fundamental $dS = (dE + pdV)/T$ obtenemos la densidad de entropía del plasma:

$$s(T) = \frac{\rho(T) + p(T)}{T} = \frac{4}{3} \frac{\rho(T)}{T} = \frac{4}{3} \frac{g_* k_B^4}{(\hbar c)^3} T^3. \quad (2.21)$$

2.3. Agujero negro de Schwarzschild en un baño térmico

Supongamos un plasma térmico relativista en interacción con un agujero negro de Schwarzschild. Al estar en un espacio-tiempo curvo, las condiciones para el equilibrio del plasma cambian. Para encontrarlas, consideremos el tensor de energía-impulso de un fluido en equilibrio termodinámico en un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

con ρ la densidad de energía, p la presión, u^μ la cuadrivelocidad del fluido y $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo (en este caso la métrica de Schwarzschild, Ec. 2.1). En el sistema de referencia propio del fluido la cuadrivelocidad toma componentes $u^\mu \rightarrow (1/\sqrt{-g_{00}(r)}, 0, 0, 0)$. Luego, de la conservación del tensor de energía-impulso, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, se deduce la siguiente ecuación para el gradiente de presión:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d \ln \alpha}{dr}, \quad (2.23)$$

donde hemos definido $\alpha(r) := \sqrt{-g_{00}(r)}$.

Reemplazando la ecuación de estado para el plasma, (2.20), en la Ec. (2.23) e integrando, resulta $\rho(r) = \rho_\infty / \alpha(r)^4$, donde ρ_∞ es la densidad de energía del plasma cuando $r \rightarrow \infty$. Combinando este resultado con la Ec. (2.19) obtenemos la *temperatura medida en un sistema de referencia estático en r*:

$$T(r) = \frac{T_\infty}{\alpha(r)}, \quad (2.24)$$

donde T_∞ es la temperatura en $r \rightarrow \infty$. Esta expresión se denomina *temperatura de Tolman*⁹. Notamos que $\alpha(r_S) = 0$, luego, $T(r)$ diverge en el radio de Schwarzschild. Esto significa que no es posible mantener al plasma en equilibrio en las cercanías del agujero negro; algunas de las partículas cruzarán el horizonte de eventos y le cederán su energía. No obstante, en un intervalo de tiempo corto, la variación de energía será pequeña y podremos considerar este efecto como una acreción de radiación térmica sobre el agujero negro. Consideraremos que el plasma está en equilibrio hasta una distancia $r \gtrsim R_c > r_S$, con R_c un radio característico de la acreción de las partículas. La interacción entre los dos sistemas —que están separadamente en equilibrio— se dará sobre la superficie efectiva determinada por este radio característico.

Bajo estas aproximaciones, estudiamos la acreción sobre el agujero negro desde un sistema de referencia estático, espacialmente en el infinito. La cuadrivelocidad de este sistema tiene componentes $u^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$ —ya que $\sqrt{-g_{00}(r)} \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$. La energía de una partícula ultrarelativista de cuádrimomento p^μ que se dirige al agujero negro sobre una geodésica nula es $E_\infty = u^\mu p_\mu = p_0$. Como el espacio-tiempo de Schwarzschild es estacionario, esta cantidad se conserva a lo largo de la geodésica. Luego, al cruzar el horizonte de eventos aporta dicha cantidad de energía al agujero negro.

Para calcular la tasa de acreción, modelamos al agujero negro como una esfera rígida dispersora y a las partículas del plasma como proyectiles, los cuales no serán dispersados

⁹Richard C. Tolman (1881-1948).

sino absorbidos. La *sección eficaz total* de dispersión de una esfera rígida de radio R es $\sigma = \pi R^2$. En este caso R será la menor distancia a la que puede acercarse una partícula sin ser absorbida. Del estudio de las geodésicas nulas resulta (ver, e.g., Frolov & Zelnikov 2011)

$$R_c = \frac{\sqrt{27}}{2} r_S, \quad (2.25)$$

donde r_S es el radio de Schwarzschild del agujero negro. Consideramos a esta cantidad como el radio característico de acreción que mencionamos anteriormente.

Cuando un flujo de partículas J incide sobre un centro dispersor clásico, el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo es

$$\dot{N} = J\sigma. \quad (2.26)$$

Por homogeneidad, el flujo de partículas a través de la superficie $r \rightarrow \infty$ es

$$J_\infty = n_\infty v. \quad (2.27)$$

Aquí, $v = c$ es la velocidad de las partículas y n_∞ es la densidad de partículas en el infinito. Combinando las Ecs. (2.25), (2.26), (2.27) y la expresión para el radio de Schwarzschild obtenemos la tasa de acreción de partículas:

$$\left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_{\text{acrec}} = \frac{27\pi G^2}{c^3} n_\infty M^2, \quad (2.28)$$

donde G es la constante de gravitación universal y M es la masa del agujero negro. De la misma manera, si en lugar de n_∞ consideramos la densidad de energía ρ_∞ , obtenemos la tasa de acreción de energía:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\text{acrec}} = \frac{27\pi G^2}{c^3} \rho_\infty M^2, \quad (2.29)$$

La energía E de un agujero negro de Schwarzschild es $E = Mc^2$. Luego, debido a la acreción, su masa aumenta a una tasa

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{\text{acrec}} = \frac{27\pi G^2}{c^5} \rho_\infty M^2. \quad (2.30)$$

Finalmente, como mencionamos en la Sección (2.1.2), el agujero negro también emite partículas. Combinando las Ecs. (2.13), (2.14) y (2.30) obtenemos la expresión completa para la tasa de variación de masa del agujero negro:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \frac{27\pi G^2}{c^5} \rho_\infty M^2 - \frac{1}{c^2} \Sigma_{\text{BH}} h_* \sigma T_{\text{BH}}^4} \quad (2.31)$$

A continuación, estudiamos el comportamiento del sistema en dos escenarios: agujero negro y plasma contenidos en una cavidad de volumen fijo, e inmersos en un universo en expansión. Por simplicidad consideramos que las únicas partículas relativistas involucradas son fotones.

2.3.1. Cavidad de volumen fijo

Sea una cavidad de volumen V que contiene dos sistemas en interacción: un gas de fotones en equilibrio térmico (radiación) y un agujero negro de Schwarzschild. Suponemos que V es lo suficientemente grande para que sean válidas las aproximaciones de la sección anterior. Caracterizamos al gas de fotones por su temperatura en “infinito”, $T_R \equiv T_\infty$, y al agujero negro por su masa M . La energía total del sistema está fija y es igual a

$$E = E_{\text{BH}} + E_R = Mc^2 + V \frac{4\sigma}{c} T_R^4, \quad (2.32)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Si los sistemas interactúan, tanto la masa del agujero negro como la temperatura del gas evolucionan. La condición de equilibrio termodinámico es que la entropía total,

$$S = S_R + S_{\text{BH}} = \frac{16}{3c} \sigma V T_R^3 + \frac{4\pi k_B G}{\hbar c} M^2, \quad (2.33)$$

sea máxima para el valor fijo de la energía. Diferenciando la Ec. (2.32) obtenemos $dM = -(16\sigma/c^3) V T_R^3 dT_R$. Reemplazando en $dS = 0$ resulta que la entropía es extremal si

$$T_R = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \equiv T_{\text{BH}}, \quad (2.34)$$

es decir, si las temperaturas del gas y del agujero negro coinciden. Además, para que el equilibrio sea estable se debe cumplir $d^2S < 0$; esta condición es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$E_{\text{BH}}|_{\text{eq}} > 4E_R|_{\text{eq}}. \quad (2.35)$$

El mecanismo por el cual se estabiliza el equilibrio es el siguiente. Supongamos que el sistema sufre una perturbación y el agujero negro absorbe una pequeña cantidad de radiación incrementándose su masa. Por un lado, de la Ec. (2.13) notamos que su temperatura, y por ende su tasa de emisión, disminuyen. Por otro lado, su tasa de acreción también cae debido a que disminuyó la radiación en el exterior. Si se cumple la condición (2.35), el segundo efecto es más importante y el agujero negro emite radiación, regresando así a su

estado original. El mecanismo de estabilización en la situación inversa (emisión pequeña) es análogo.

Podemos llegar a las mismas conclusiones directamente a partir de la Ec. (2.31), que en este caso particular se reduce a

$$\frac{dM}{dt} = \frac{108\pi G^2 \sigma}{c^6} M^2 (T_R^4 - T_{\text{BH}}^4). \quad (2.36)$$

En efecto, el agujero negro deja de acretar o emitir cuando $dM/dt = 0$. De la Ec. (2.36) notamos que esto sucede para $T_R = T_{\text{BH}}$, en acuerdo con el análisis anterior. Además, la masa del agujero negro en este estado puede obtenerse como solución de la ecuación

$$M_{\text{eq}}^5 - \frac{E}{c^2} M_{\text{eq}}^4 + \frac{\hbar c^7}{15\pi^2 (8G)^4} = 0. \quad (2.37)$$

Resolvemos la Ec. (2.36) considerando que cada subsistema evoluciona a través de sucesivos estados de equilibrio. En la Fig. (2.2) se muestran los resultados para el caso en que se cumple la desigualdad dada en la Ec. (2.35) y se alcanza un equilibrio estable entre las componentes. Notamos que la entropía aumenta hasta alcanzar un valor máximo en el equilibrio. En la Fig. (2.3) se muestran los resultados en un escenario en que la desigualdad no se cumple y el agujero negro se evapora en un tiempo finito. Para notar con más claridad la evolución de la entropía, graficamos el cociente entre la entropía al tiempo t y la entropía inicial, verificando que también crece en este escenario.

2.3.2. Escenario cosmológico

Sean un agujero negro de Schwarzschild y un gas de fotones en equilibrio térmico inmersos en un espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)¹⁰ plano (ver Apénd. B.1). La métrica de este espacio-tiempo está dada por la Ec. (B.1)¹¹:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.38)$$

con $a(t)$ el factor de escala. Consideramos que la evolución del universo está determinada únicamente por la radiación. Por ende, $a(t)$ está dado por la Ec. (B.21). Además, suponemos que la interacción entre las componentes modifica las propiedades del agujero negro pero no las de la radiación¹².

¹⁰Alexander A. Friedmann (1888-1925); Georges H. J. É. Lemaître (1894-1966); Howard P. Robertson (1903-1961); Arthur G. Walker (1909-2001).

¹¹En rigor, en lugar de la solución de Schwarzschild deberíamos utilizar una solución de agujero negro que asintóticamente tienda a un modelo cosmológico; por ejemplo, la solución de McVittie (McVittie 1933). Para el caso en cuestión, sin embargo, las diferencias son menores.

¹²Ambas consideraciones serán abandonadas cuando estudiemos un gas de agujeros negros.

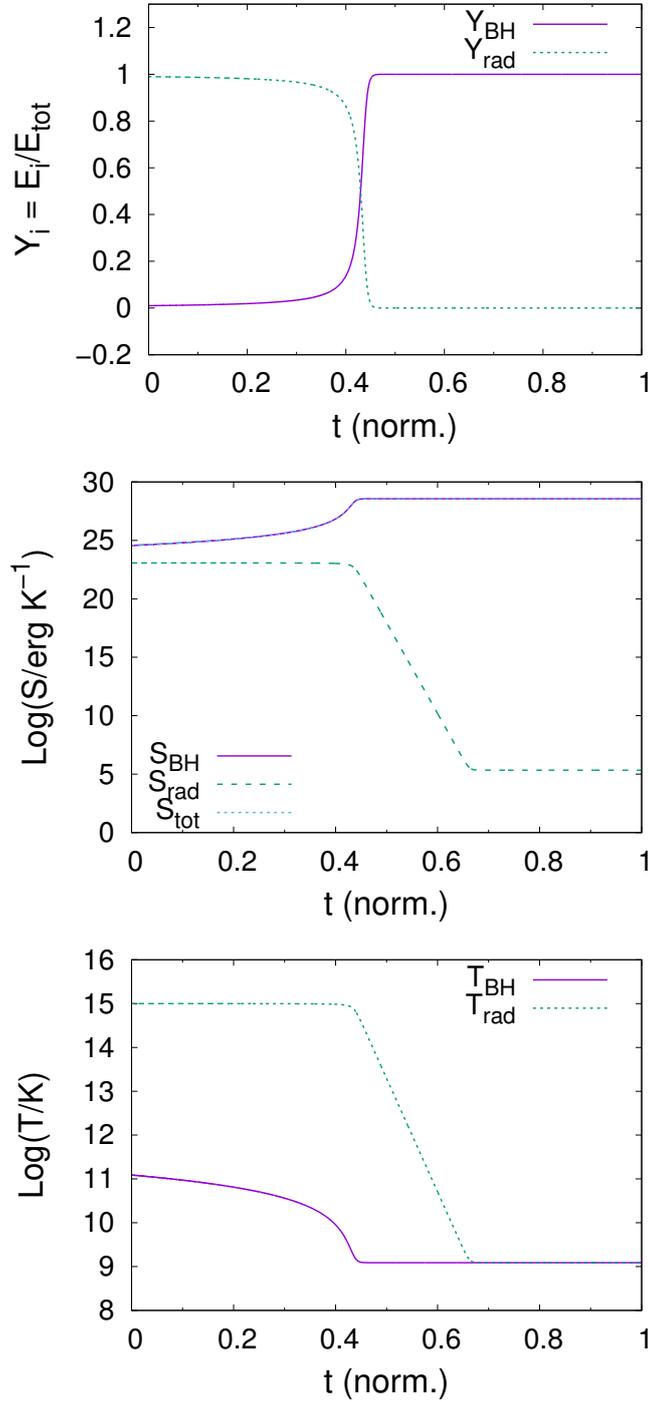


Figura 2.2: Evolución temporal de las cantidades termodinámicas relevantes en el caso en que se alcanza un equilibrio estable. En la figura superior se muestran las energías normalizadas de ambas componentes. En la figura central se muestra la entropía de cada componente así como la entropía total. En la figura inferior se muestra la temperatura de ambas componentes. En los tres casos, la escala temporal está normalizada al intervalo $[0,1]$.

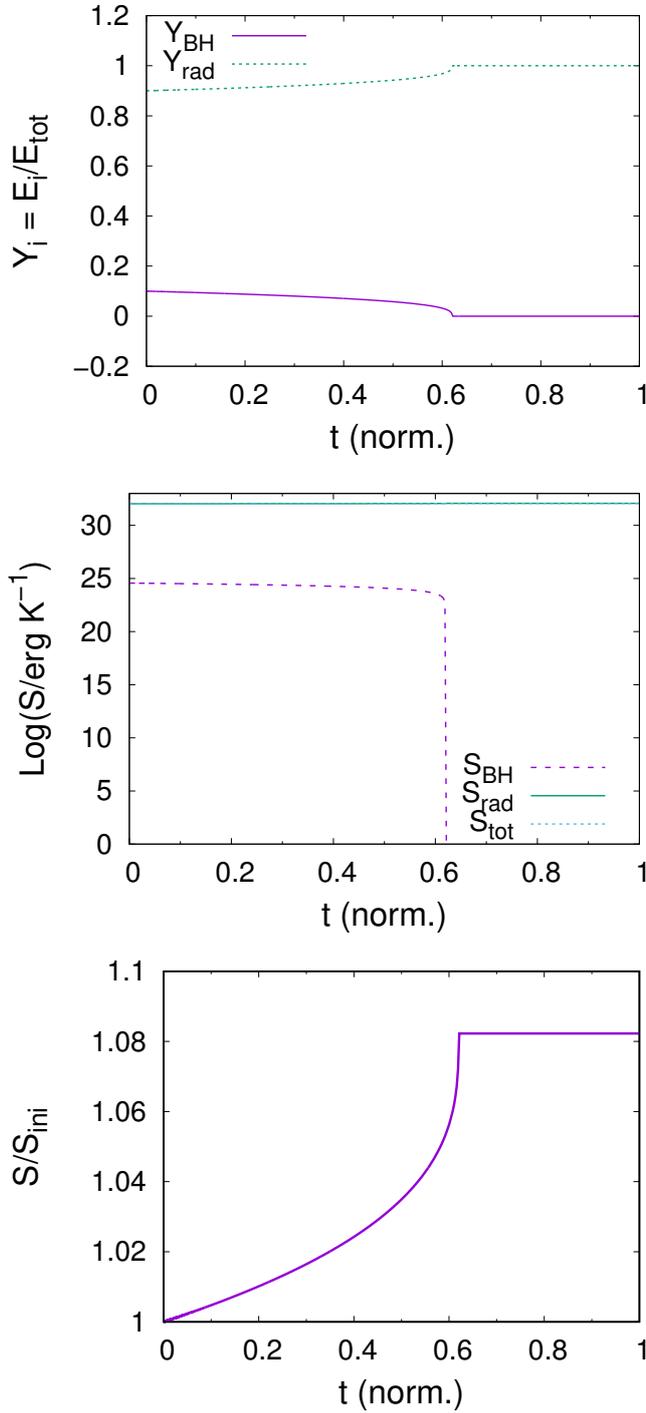


Figura 2.3: Evolución temporal de las cantidades termodinámicas relevantes en el caso en que no se cumplen las condiciones para la estabilidad del equilibrio. En la figura superior se muestran las energías normalizadas de ambas componentes. En la figura central se muestran la entropía de cada subcomponente así como la entropía total. En la figura inferior se muestra el cociente entre la entropía total al tiempo t y la entropía inicial. En los tres casos, la escala temporal está normalizada al intervalo $[0,1]$.

La condición de equilibrio térmico de la radiación implica que ésta se expande adiabáticamente. En efecto, consideremos el tensor de energía-impulso de la radiación (Ec. 2.22). En este espacio-tiempo, la conservación del mismo implica

$$d(\rho a^3) = -p da^3. \quad (2.39)$$

Para un volumen comóvil $V = a^3$ esta ecuación es equivalente a la Primera Ley de la Termodinámica, $dE = -pdV$, donde E es la energía contenida en el volumen. Reemplazando este resultado en la relación fundamental de la entropía resulta

$$dS = d(sa^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad sa^3 = \text{const.}, \quad (2.40)$$

donde s es la densidad de entropía del gas. Teniendo en cuenta que para la radiación $s \propto T^3$, obtenemos cómo evoluciona la temperatura con el factor de escala:

$$T(t) \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (2.41)$$

Descrito este escenario, es necesario modificar la ecuación que rige la evolución de la masa del agujero negro como

$$\frac{dM}{dt} = \frac{108\pi G^2 \sigma}{c^6} M^2 \left[\left(\frac{T_0}{a(t)} \right)^4 - T_{\text{BH}}^4 \right], \quad (2.42)$$

donde T_0 es la temperatura del gas al tiempo inicial. La dependencia explícita de la ecuación anterior con el tiempo implica que no hay soluciones de equilibrio. En efecto, si planteamos $dM/dt = 0$ resulta

$$M_{\text{eq}} = M_{\text{eq}}(t) = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_{\text{B}} G T_0} a(t). \quad (2.43)$$

Supongamos que el agujero negro se encuentra en equilibrio al tiempo t_1 con una masa $M_1 = M_{\text{eq}}(t_1)$. Para mantenerse en ese estado en un instante t_2 inmediatamente posterior, su masa deberá haber aumentado hasta un valor $M_2 = M_{\text{eq}}(t_2) > M_{\text{eq}}(t_1) = M_1$. Pero esto no es posible pues en el intervalo transcurrido la temperatura de la radiación disminuyó, y por ende disminuyó la tasa de acreción sobre el agujero negro. Luego, dM/dt es negativa durante ese intervalo y $M_2 < M_1$. Debido a que el calor específico del agujero negro es negativo no hay manera de que la acreción vuelva a dominar. El agujero negro se evapora completamente en un tiempo finito.

Para ejemplificar esta situación, resolvemos la Ec. (2.42) para condiciones iniciales arbitrarias (el análisis es independiente de estas condiciones) y presentamos los resultados

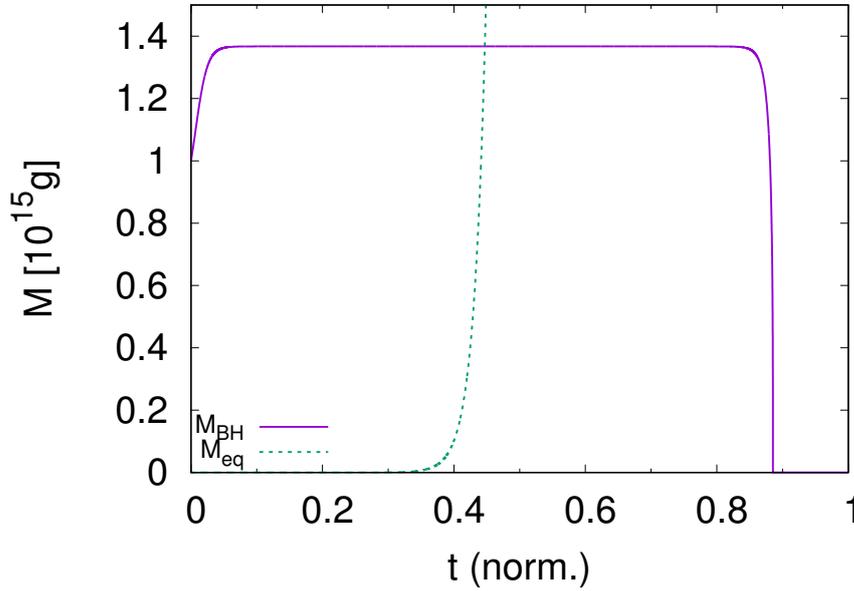
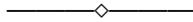


Figura 2.4: Evolución temporal de la masa del agujero negro en un marco cosmológico. Se muestra además la evolución de la masa de equilibrio. La escala temporal está normalizada al intervalo $[0,1]$.

en la Fig. (2.4). Notamos que el agujero negro comienza acretaando radiación y aumentando su masa. Luego de un tiempo, la temperatura de la radiación decae lo suficiente para que la acreción sea muy pequeña, y el agujero negro experimenta un período de equilibrio aparente. Cuando la masa del agujero negro y la masa de equilibrio se igualan el agujero negro comienza a evaporarse lentamente. A determinado tiempo la evaporación se vuelve significativa y el agujero negro se evapora completamente.



En este capítulo, hemos estudiado los sistemas materiales que estarán involucrados en nuestro modelo cosmológico. Por un lado, introducimos la solución de agujero negro de Schwarzschild y discutimos su termodinámica. Por otro, discutimos las características más importantes de la termodinámica de un plasma térmico relativista. Luego, estudiamos la interacción entre estos dos sistemas. En particular, consideramos dos escenarios: los sistemas inmersos en una cavidad de volumen fijo y en un marco cosmológico. Analizamos la existencia de soluciones de equilibrio, encontrándolas sólo en el primero de los escenarios.

Capítulo 3

Agujeros negros primordiales

En este capítulo presentamos algunos aspectos de la física de los PBHs. Discutimos sus mecanismos de formación, su posible influencia en distintos procesos cosmológicos y astrofísicos, y las más significativas restricciones teóricas y observacionales a su existencia. Para un análisis más detallado sugerimos consultar el libro de Calmet et al. (2013).

3.1. Generalidades

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General admiten soluciones de agujeros negros de cualquier masa. Sin embargo, en el universo actual sólo parecen formarse agujeros negros de masa estelar. En general, para que se forme un agujero negro a partir de un objeto de masa M , es necesario que el objeto se comprima hasta su radio de Schwarzschild, $r_S = 2GM/c^2$. Luego, la densidad de la materia debe alcanzar un valor del orden de

$$\rho(M) \sim \frac{M}{r_S^3} = \frac{c^6}{8G^3M^2} \sim 10^{17} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} \text{ g cm}^{-3}. \quad (3.1)$$

Para agujeros negros de masa pequeña (i.e., $M \ll M_\odot$) las densidades requeridas resultan muy elevadas y no son alcanzables mediante procesos físicos conocidos. En cambio, en el universo temprano (dominado por radiación) la densidad es función del tiempo cósmico t ,

$$\rho \sim t^{-2}, \quad (3.2)$$

lo que implica que a tiempos pequeños la densidad del Universo pudo ser lo suficientemente alta para que se formen agujeros negros. Zel'dovich & Novikov (1966), Hawking (1971) y Carr & Hawking (1974) fueron algunos de los primeros en proponer la formación de agujeros negros en el universo temprano.

Si comparamos la densidad cósmica al tiempo t con la densidad asociada a un agujero negro de Schwarzschild de masa M , obtenemos que la masa de los PBHs debe ser del orden de la *masa del horizonte de partículas* en la época en que se forman:

$$M_{\text{PBH}} \sim M_{\text{H}} \sim \frac{c^3 t}{G} \simeq 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23} \text{ s}} \right) \text{ g.} \quad (3.3)$$

Luego, el espectro de masas de estos objetos puede abarcar un rango extremadamente amplio: aquellos formados al tiempo de Planck ($t_{\text{P}} \sim 10^{-43} \text{ s}$) tendrían una masa del orden de la masa de Planck ($m_{\text{P}} \sim 10^{-5} \text{ g}$), mientras que aquellos formados a 1 s podrían tener masas tan grandes como $10^5 M_{\odot}$.

Para los PBHs de masa más pequeña la evaporación por radiación de Hawking es un proceso importante. En efecto, el tiempo característico de evaporación de un agujero negro puede obtenerse a partir de la Ec. (2.14) y resulta

$$t_{\text{evap}} \sim 10^{10} \left(\frac{M}{10^{15} \text{ g}} \right) \text{ yr.} \quad (3.4)$$

PBHs con masa $M \sim 10^{15} \text{ g}$ se estarían evaporando en el presente. Esto sugiere la siguiente clasificación para los PBHs:

- **PBHs con $M < 10^{15} \text{ g}$.** Estos agujeros negros se habrían evaporado completamente al tiempo presente. Sin embargo, su radiación pudo haber afectado diversos procesos en el universo temprano. Por ejemplo, los PBHs evaporados en el primer segundo posterior al Big Bang pueden haber generado la entropía del universo (Zeldovich & Starobinskii 1976), o cambiado los detalles de la bariogénesis (Dolgov et al. 2000; Bugaev et al. 2003) y de la nucleosíntesis primordial o *Big Bang Nucleosynthesis (BBN)* (e.g. Zeldovich et al. 1977; Vainer et al. 1978). Además, pueden haber producido neutrinos (Bugaev & Konishchev 2002) u otras partículas hipotéticas (Lemoine 2000) mediante la evaporación. Si estas evaporaciones dejan partículas ‘reliquia’ con masas del orden de la masa de Planck, éstas deberían contribuir a la materia oscura fría o *Cold Dark Matter (CDM)* (e.g. MacGibbon 1987; Barrow et al. 1992; Alexander & Meszaros 2007). Evaporaciones de PBHs a tiempos posteriores pueden haber tenido también importantes efectos astrofísicos; por ejemplo, aportando a la reionización del universo (He & Fang 2002).
- **PBHs con $M \sim 10^{15} \text{ g}$.** Estos agujeros negros se estarían evaporando actualmente. Su radiación debería contribuir al fondo difuso de rayos γ (e.g. Wright 1996; Carr et al. 2016b) y a la cantidad de positrones y antiprotones presentes en los rayos cósmicos

(e.g. Kiraly et al. 1981). La distribución de energía de las partículas emitidas podría dar información acerca de la física de altas energías involucrada en la fase explosiva final del proceso de evaporación (Halzen et al. 1991).

- **PBHs** con $M > 10^{15}$ g. De existir estos agujeros negros, serían detectables por sus efectos gravitacionales. En efecto, serían candidatos a contribuir a la **CDM** (ver, e.g., Chapline 1975; Carr et al. 2016a). Los agujeros negros más masivos podrían, además, haber influenciado los detalles de la formación de estructura a gran escala en el universo (Meszaros 1975; Carr 1977; Afshordi et al. 2003) y servido como ‘semillas’ para la formación de agujeros negros supermasivos en los núcleos de las galaxias (Carr & Rees 1984; Düchting 2004). Por otro lado, se ha propuesto la fusión de estos **PBHs** para explicar los eventos de ondas gravitacionales detectados recientemente (e.g. Eroshenko 2016; Sasaki et al. 2016).

Incluso si los **PBHs** no influyeron en ninguno de estos procesos, su estudio es importante pues impone restricciones a la fracción de masa en el universo que pudo devenir en **PBHs**. Esta cantidad depende de la época de formación de los **PBHs** y es de gran interés cosmológico. Discutimos estas restricciones en la Sec. 3.3.

3.2. Mecanismos de formación

La densidad elevada en el universo temprano es una condición necesaria pero no suficiente para la formación de **PBHs**. En la mayoría de los escenarios en que esto sucede se requieren de inhomogeneidades con sobredensidad que, eventualmente, dejen de expandirse y recolapsen (Carr 1975). Las inhomogeneidades podrían ser literalmente primordiales (i.e., provenir de las condiciones iniciales del universo) o podrían surgir espontáneamente en un universo inicialmente suave—por ejemplo, a través de fluctuaciones de campos cuánticos durante la época inflacionaria.

Los primeros cálculos, realizados por Carr & Hawking (1974), suponían que la región densa que posteriormente colapsa para formar un **PBH** es esféricamente simétrica y forma parte de un universo de **FLRW** cerrado (ver Apéndice B.1). Para colapsar, la región debe ser más grande que la longitud de Jeans, que es \sqrt{w} veces la longitud del horizonte (w depende de la ecuación de estado del universo, $p = w\rho$; para un universo dominado por radiación $w = 1/3$). Luego, el contraste de densidades, $\delta \equiv \delta\rho/\rho$, debe exceder un valor crítico $\delta_c \sim w$. Si las fluctuaciones tienen un espectro gaussiano, la fracción de masa que

deviene en PBHs es

$$\beta(M) \sim \varepsilon(M) \exp \left[-\frac{w^2}{2\varepsilon(M)^2} \right], \quad (3.5)$$

donde $\varepsilon(M)$ es la amplitud de la fluctuación cuando la masa del horizonte es M . Los PBHs tienen una masa del orden de la masa del horizonte en la época que se forman: $M_{\text{PBH}} = w^{3/2} M_{\text{H}}$. Luego, si las fluctuaciones son invariantes de escala (i.e. ε independiente de M) el espectro de masas resulta extendido (Carr 1975):

$$\frac{dn}{dM_{\text{PBH}}} \propto M_{\text{PBH}}^{-\alpha}, \quad (3.6)$$

con $\alpha \sim 2 - 3$. Desarrollos más detallados se basan en la aplicación de “fenómenos críticos” de colapso gravitacional¹ a la formación de PBHs. En estos estudios, se considera un espacio-tiempo asintóticamente plano. Sin embargo, Niemeyer & Jedamzik 1998 encontraron resultados similares en espacio-tiempos que asintóticamente tienden a universos de FLRW: para diversos perfiles de las perturbaciones, obtuvieron la siguiente relación entre la masa de los PBHs y la perturbación de densidad δ :

$$M_{\text{PBH}} = K M_{\text{H}} (\delta - \delta_c)^\eta, \quad (3.7)$$

donde M_{H} es la masa del horizonte de partículas, y las constantes están en los rangos $0.34 < \eta < 0.37$, $2.4 < K < 11.9$ y $0.67 < \delta_c < 0.71$. Como $M_{\text{PBH}} \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow \delta_c$, en estos escenarios la masa de los PBHs puede ser mucho más pequeña que la masa del horizonte en la época de formación. Esto, a su vez, modifica el espectro de masas (e.g., Green & Liddle 1999; Kribs et al. 1999).

Escenarios más exóticos incluyen transiciones de fase que potenciarían la formación de PBHs. Algunas de estas propuestas incluyen *ecuaciones de estado suaves* (e.g., Khlopov et al. 1985; Jedamzik & Niemeyer 1999), *colapso de bucles de cuerdas cósmicas* (e.g., Hawking 1987; Polnarev & Zembowicz 1991), o *colisiones de burbujas* (e.g. Crawford & Schramm 1982; Hawking et al. 1982). En estos escenarios, el espectro de masas de los PBHs resulta extremadamente acotado y centrado en el valor dado por la Ec. (3.3) al tiempo t en que ocurre la transición de fase.

¹Al estudiar el colapso de distintos tipos de campos de materia esféricamente simétricos, siempre existe una solución *crítica* que separa las configuraciones en las que se forma un agujero negro de aquellas en las que no (Choptuik 1993). Las distintas configuraciones están descritas por un índice p . Si p_c es el índice crítico, la masa del agujero negro formado resulta proporcional a $(p - p_c)^\eta$, para algún exponente η .

Inflación y PBHs

La inflación cósmica es un período de expansión acelerada exponencial en el universo temprano, propuesto para solucionar varios problemas en el marco del modelo cosmológico estándar. Además, provee un mecanismo para la amplificación de las fluctuaciones primordiales a partir de las cuales se forma la estructura a gran escala del universo. En general, la inflación es producida por un campo escalar llamado *inflaton* (para una discusión detallada ver, e.g., Weinberg 2008).

La inflación tiene dos consecuencias importantes en relación a los PBHs (Carr & Lidsey 1993). Por un lado, los PBHs formados antes del final del período de inflación serán diluidos y su densidad será despreciable. Por otro lado, la inflación genera las fluctuaciones primordiales que pueden devenir en PBHs. La amplitud y la dependencia con la escala de estas fluctuaciones depende de las características del inflaton propuesto. Luego, es posible acotar los modelos de inflación a través de observaciones que impongan restricciones sobre el espectro de potencia de las perturbaciones primordiales; por ejemplo, a través de mediciones de las anisotropías en el CMB (Ade et al. 2016; Hlozek et al. 2012), o de observaciones de la estructura a gran escala del universo (Bird et al. 2011).

Las restricciones sobre la abundancia de PBHs también imponen condiciones sobre el espectro de potencia de las fluctuaciones primordiales y, a través de éstas, sobre los modelos de inflación. Si bien estas restricciones son varios órdenes de magnitud más grandes que las que se obtienen de las observaciones directas, resultan de utilidad pues son válidas sobre un rango de escalas mucho mayor. Luego, restringen una región mucho más amplia del inflaton y pueden utilizarse para descartar modelos de inflación que las observaciones directas no contradicen (Josan & Green 2010; Peiris & Easter 2008).

3.3. Restricciones sobre la abundancia de PBHs

Las restricciones sobre la abundancia de PBHs están expresadas en términos de la fracción de densidad de energía del universo en forma de PBHs en la época en que éstos se forman²:

$$\beta := \frac{\rho_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{tot}}}. \quad (3.8)$$

²En el caso de un espectro de masas extendido, es necesario reinterpretar esta cantidad de manera que $\beta(M_{\text{PBH}})dM_{\text{PBH}}$ sea la fracción de densidad de energía del universo en forma de PBHs con masas en el rango $(M_{\text{PBH}}, M_{\text{PBH}} + dM_{\text{PBH}})$.

Debido a que los PBHs se comportan como un fluido tipo *polvo*, su densidad de energía evoluciona según $\rho_{\text{PBH}} \sim a^{-3}$, a diferencia de la de radiación que lo hace como $\rho_{\text{rad}} \sim a^{-4}$. Luego, durante la época en que esta última domina, la fracción de densidad de energía del universo en forma de PBHs crece linealmente con a . De esta forma, incluso si la fracción de energía en PBHs es pequeña inicialmente, a tiempos posteriores se volverá significativa.

Las principales restricciones sobre la abundancia de PBHs pueden clasificarse en tres grupos (Green 2015): restricciones por evaporación, por *lensing* gravitacional y por efectos dinámicos. Para un análisis más detallado sugerimos ver Carr et al. (2010).

3.3.1. Evaporación

Como mencionamos anteriormente, los PBHs con masa $M_{\text{PBH}} \lesssim 10^{15}$ g se evaporaron completamente o se están evaporando en el presente. Este proceso inyecta partículas en el medio pudiendo modificar distintas características del mismo.

- **Entropía** Los fotones emitidos por PBHs con $M_{\text{PBH}} < 10^9$ g son rápidamente termalizados y contribuirán a la proporción de fotones por barión. Esta cantidad no puede exceder el valor observado ($\sim 10^9$), lo cual implica una restricción sobre $\beta(M_{\text{PBH}})$ (Zeldovich et al. 1977):

$$\beta(M_{\text{PBH}}) < 10^{-5} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^9 \text{ g}} \right), \quad \text{para } 10^6 \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^9 \text{ g}. \quad (3.9)$$

- **Partículas ‘reliquia’** La evaporación de PBHs podría dejar partículas ‘reliquia’ estables (MacGibbon 1987), las cuales contribuirían a la CDM. En tal caso, la densidad de reliquias no puede exceder el límite superior para la densidad de CDM. Esto implica la restricción

$$\beta(M_{\text{PBH}}) < \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{10^{15} \text{ g}} \right)^{3/2}, \quad \text{para } M_{\text{PBH}} < 10^{15} \text{ g}. \quad (3.10)$$

Cabe mencionar que este límite conlleva la única *potencial* restricción sobre PBHs de masa $M_{\text{PBH}} < 10^6$ g.

- **BBN** Los PBHs con masa en el rango $10^9 \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{10}$ g tienen tiempos de vida del orden de $\tau \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ s, y los mesones y antinucleones que emiten incrementarían el cociente neutrón/protón, y así la abundancia de ${}^4\text{He}$. Para masas en el rango $10^{10} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{12}$ g el tiempo de vida está entre $\tau \sim 10^{-2}$ s y 10^2 s, y los hadrones de alta energía que emiten pueden disociar los elementos más livianos,

reduciendo la abundancia de ^4He e incrementando la abundancia de otros elementos. No obstante, las restricciones más fuertes en este rango se deben al ^2H y al ^6Li . Por último, en el rango $10^{12} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{13} \text{ g}$ el tiempo de vida es de $\tau \sim 10^7 - 10^{12} \text{ s}$ y la fotodisociación se vuelve importante.

Todos estos procesos implican la siguiente restricción sobre la abundancia de PBHs (Carr et al. 2010):

$$\beta(M_{\text{PBH}}) \begin{cases} < 10^{-20}(M_{\text{PBH}}/10^{10} \text{ g}) & \text{para } 10^9 \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{10} \text{ g}, \\ < 10^{-23} & \text{para } 10^{10} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{13} \text{ g}. \end{cases} \quad (3.11)$$

- **Rayos γ** Los PBHs con masas en el rango $10^{13} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{15} \text{ g}$ se habrían evaporado entre un tiempo correspondiente a $z \sim 1000$ y el tiempo presente, y contribuirían al fondo difuso de rayos γ (Page & Hawking 1976). Su abundancia está limitada por las observaciones (e.g., EGRET, Fermi, Milagro, HAWC). Los PBHs con masas en el rango $10^{15} \text{ g} \lesssim M_{\text{PBH}} < 10^{17} \text{ g}$ emitirían también un flujo significativo de rayos γ , y su abundancia también está limitada por las observaciones. Estas restricciones son aproximadamente (Carr et al. 2010)

$$\beta(M_{\text{PBH}}) \begin{cases} < 10^{-27}(M_{\text{PBH}}/10^{15} \text{ g})^{-5/2} & \text{para } 10^{13} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{15} \text{ g}, \\ < 10^{-26}(M_{\text{PBH}}/10^{15} \text{ g})^{7/2} & \text{para } 10^{15} \text{ g} \leq M_{\text{PBH}} < 10^{17} \text{ g}. \end{cases} \quad (3.12)$$

3.3.2. *Lensing* gravitacional

La existencia de una cantidad cosmológicamente significativa de objetos compactos debería provocar efectos de *lensing* gravitacional sobre fuentes puntuales distantes (Press & Gunn 1973). Asumiendo que la densidad de otros objetos compactos es despreciable, definimos $f(M_{\text{PBH}}) := \Omega_{\text{PBH}}/\Omega_{\text{CDM}}$, donde Ω_{PBH} y Ω_{CDM} son las fracciones de la densidad crítica³ en forma de PBHs y CDM, respectivamente. Esta cantidad está relacionada con $\beta(M_{\text{PBH}})$, a través de la relación

$$f(M_{\text{PBH}}) \approx \left(\frac{\beta(M_{\text{PBH}})}{10^{-8}} \right) \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{M_{\odot}} \right)^{-1/2}. \quad (3.13)$$

Las restricciones por *lensing* y por efectos dinámicos están expresadas en términos de $f(M_{\text{PBH}})$. A continuación, mencionamos los principales mecanismos de *lensing* que imponen restricciones sobre esta cantidad.

³La densidad para la cual la geometría del universo es plana.

PBHs con masas en el rango $10^{17} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{20} \text{ g}$ podrían ser detectados por su interferencia en el espectro de energía de Erupciones de Rayos Gamma o *Gamma Ray Bursts (GRBs)*, en un proceso denominado *femtolensing* de **GRBs** (Gould 1992; Barnacka et al. 2012). **PBHs** con masas en el rango $10^{24} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{34} \text{ g}$ podrían cruzar la línea de visión de una estrella, produciendo un fenómeno denominado *microlensing* galáctico. **PBHs** con masas en el rango $10^{30} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{35} \text{ g}$ podrían producir el fenómeno de *microlensing* sobre cuasares, amplificando su emisión en el continuo (Canizares 1982). Por último, **PBHs** con masas en el rango $10^{39} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{41} \text{ g}$ podrían producir *microlensing* sobre fuentes de radio (Wilkinson et al. 2001).

Los procesos mencionados implican las siguientes restricciones:

$$f(M_{\text{PBH}}) \begin{cases} < 1 & \text{para } 10^{17} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{20} \text{ g} \\ & \text{y } 10^{24} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{35} \text{ g}, \\ < 0.05 & \text{para } 10^{39} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{41} \text{ g}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Utilizando la Ec. (3.13), podemos trasladar estas restricciones a $\beta(M_{\text{PBH}})$:

$$\beta(M_{\text{PBH}}) \begin{cases} < 10^{-8} \sqrt{M_{\text{PBH}}/M_{\odot}} & \text{para } 10^{17} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{20} \text{ g} \\ & \text{y } 10^{24} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{35} \text{ g}, \\ < 5 \times 10^{-10} \sqrt{M_{\text{PBH}}/M_{\odot}} & \text{para } 10^{39} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{41} \text{ g}. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3.3. Efectos dinámicos

La abundancia de **PBHs** masivos en el halo de la Vía Láctea está restringida por los efectos dinámicos que éstos producirían sobre los demás objetos (Carr & Sakellariadou 1999). Entre estos efectos mencionamos los más importantes: la ruptura de binarias de órbita amplia⁴ (Bahcall et al. 1985; Chaname & Gould 2004), la inyección de **PBHs** en el centro galáctico debido a la fricción dinámica (Carr & Sakellariadou 1999; Carr et al. 2010) y el calentamiento del disco galáctico por el cruce de **PBHs** (Carr & Sakellariadou 1999; Carr et al. 2010). Estos procesos implican las siguientes restricciones sobre $f(M_{\text{PBH}})$:

$$f(M_{\text{PBH}}) \begin{cases} < 0.4 & \text{para } 10^{34} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{37} \text{ g}, \\ < 5 \times 10^{-5} & \text{para } 10^{38} \text{ g} \lesssim M_{\text{PBH}} \lesssim 10^{42} \text{ g}, \\ < 10^{-3} & \text{para } 10^{43} \text{ g} \lesssim M_{\text{PBH}} \lesssim 10^{45} \text{ g}. \end{cases} \quad (3.16)$$

⁴En la literatura se les suele llamar *Wide Binaries*. Éstas son estrellas binarias cuya separación es mayor a un año luz.

Nuevamente, trasladamos estas restricciones a $\beta(M_{\text{PBH}})$, a través de la Ec. (3.13):

$$\beta(M_{\text{PBH}}) \begin{cases} < 4 \times 10^{-9} \sqrt{M_{\text{PBH}}/M_{\odot}} & \text{para } 10^{34} \text{ g} < M_{\text{PBH}} < 10^{37} \text{ g,} \\ < 5 \times 10^{-13} \sqrt{M_{\text{PBH}}/M_{\odot}} & \text{para } 10^{38} \text{ g} \lesssim M_{\text{PBH}} \lesssim 10^{42} \text{ g,} \\ < 10^{-11} \sqrt{M_{\text{PBH}}/M_{\odot}} & \text{para } 10^{43} \text{ g} \lesssim M_{\text{PBH}} \lesssim 10^{45} \text{ g.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Existen también restricciones sobre la abundancia de PBHs de masa $M_{\text{PBH}} > 10^{15} \text{ g}$ debido a su influencia sobre otros procesos astrofísicos, pero no serán discutidas aquí.

Finalmente, presentamos en la Fig. (3.1) un gráfico con todas las restricciones que hemos mencionado. Hemos diferenciado las restricciones por ‘partículas reliquia’ ya que éstas son especulativas. Podemos notar que las restricciones más fuertes están impuestas sobre los PBHs de masa $M_{\text{PBH}} \sim 10^{15} \text{ g}$.

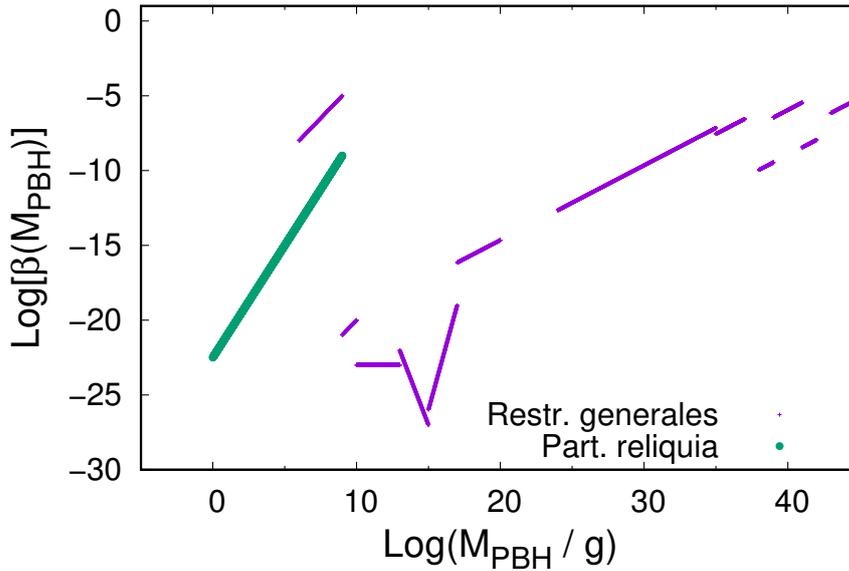


Figura 3.1: Restricciones más importantes sobre la abundancia de PBHs. Se distinguen las restricciones por ‘partículas reliquia’.

Capítulo 4

Cosmología con agujeros negros primordiales

En este capítulo desarrollamos un modelo cosmológico (ver el Apéndice B) que represente un universo temprano con presencia de PBHs. Consideramos que la geometría está dada por un modelo de espacio-tiempo de FLRW (Apéndice B.1) y que el fluido cósmico puede descomponerse en dos fluidos perfectos mutuamente interactuantes: un gas de PBHs y un plasma térmico relativista. Los PBHs acretan y emiten partículas, lo que implica una transferencia de energía entre ambos fluidos. Esta interacción mutua determina la evolución de ambos fluidos así como del factor de escala del espacio-tiempo.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la primera sección presentamos un marco teórico general para el estudio de la cosmología de dos fluidos mutuamente interactuantes, basándonos principalmente en los desarrollos de Zimdahl (1997). En la segunda sección, aplicamos este marco al sistema *radiación + gas de PBHs*; primero de manera general, y luego para dos distribuciones particulares de PBHs que serán casos representativos de distribuciones más realistas.

4.1. Cosmología de dos fluidos interactuantes

Sea un fluido cósmico inmerso en un espacio-tiempo de FLRW, $M_{\mathcal{E}\mathcal{T}} = (\Sigma \times \mathbb{R}, g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}})$, y consideremos que el mismo está compuesto por dos fluidos perfectos, A y B . Su tensor de energía-impulso será

$$T^{\mu\nu} = T_{(A)}^{\mu\nu} + T_{(B)}^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

donde

$$T_{(i)}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} [\rho_{(i)} + p_{(i)}] u^\mu u^\nu - p_{(i)} g^{\mu\nu}, \quad (i = A, B). \quad (4.2)$$

Aquí, $\rho_{(i)}$ y $p_{(i)}$ denotan la densidad de energía y la presión del fluido i , y hemos supuesto que ambas componentes tienen la misma cuadrivelocidad u^μ . Las ecuaciones de estado de cada fluido pueden ser distintas:

$$p_{(i)} = w_{(i)} \rho_{(i)}, \quad (i = A, B), \quad (4.3)$$

con $w_{(i)}$ constante.

Debido a que los fluidos intercambian energía e impulso entre sí, sólo habrá conservación del tensor de energía-impulso total:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_\mu T_{(A)}^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T_{(B)}^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Si representamos este intercambio mediante un término de interacción Q , podemos desarrollar la componente no trivial de la Ec. (4.4) y obtener dos ecuaciones:

$$\dot{\rho}_{(A)} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) [1 + w_{(A)}] \rho_{(A)} = Q, \quad (4.5)$$

$$\dot{\rho}_{(B)} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) [1 + w_{(B)}] \rho_{(B)} = -Q, \quad (4.6)$$

donde a es el factor de escala de la métrica de **FLRW** (Ec. B.1). Notamos que si $Q > 0$ (< 0) hay una transferencia de energía desde el fluido B (A) hacia el fluido A (B). Si $Q = 0$ no hay interacción y se conserva el tensor de energía-impulso de cada componente; las densidades de energía estarán dadas por la Ec. (B.14). En general, el término Q dependerá de las características particulares de la interacción entre ambos fluidos.

Para describir completamente la dinámica del sistema, necesitamos tres ecuaciones para las tres incógnitas $\rho_{(A)}(t)$, $\rho_{(B)}(t)$ y $a(t)$. Luego, a las Ecs. (4.5) y (4.6) agregamos la ecuación de Friedmann (B.5), y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{(A)} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) [1 + w_{(A)}] \rho_{(A)} &= Q, \\ \dot{\rho}_{(B)} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) [1 + w_{(B)}] \rho_{(B)} &= -Q, \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} [\rho_{(A)} + \rho_{(B)}] + \frac{c^2 k}{[R(t_0)a]^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La evolución de las demás cantidades termodinámicas de los fluidos está directamente ligada —a través de las ecuaciones de estado— a la evolución de las densidades de energía.

4.2. Universo temprano con formación de PBHs

A continuación, aplicamos el formalismo desarrollado en la sección anterior a un modelo cosmológico de universo temprano con formación de PBHs. Suponemos que además de PBHs sólo hay una componente de materia relevante: un plasma térmico relativista (que de ahora en más llamaremos simplemente radiación). En resumen, estudiamos un sistema compuesto por un gas de PBHs y por radiación, inmerso en un espacio-tiempo de FLRW. Este modelo puede ser adecuado para describir la evolución cosmológica del universo temprano si las condiciones fueron tales que permitieron la formación de una cantidad significativa de PBHs (ver Sec. 3.2).

La componente de radiación es caracterizada por su temperatura de equilibrio T_R . Las demás cantidades termodinámicas (densidad de energía ρ_R , presión p_R y densidad de entropía s_R) se relacionan con la temperatura a través de las Ecs. (2.19) y (2.21). A su vez, la ecuación de estado de la radiación es

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R. \quad (4.8)$$

Por su parte, la componente de PBHs es representada por un fluido perfecto tipo *polvo* (i.e., con ecuación de estado $p_{\text{PBH}} = 0$), donde los constituyentes son agujeros negros de Schwarzschild. La distribución de masas inicial $N_0(m)$, que depende del mecanismo de formación de PBHs considerado, evoluciona en el tiempo debido a la interacción de los PBHs con la radiación y a la expansión del universo. Denotamos $N(t; m)$ a la distribución de masas al tiempo t . Luego, como cada PBH tiene una energía proporcional a su masa, la densidad de energía del gas de PBHs al tiempo t es

$$\rho_{\text{PBH}}(t) = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} N(t; m) mc^2 dm, \quad (4.9)$$

donde M_{\min} y M_{\max} denotan la masa mínima y máxima de los PBHs formados. Cabe remarcar que si bien cada PBH tiene una temperatura $T_{\text{PBH}} \propto M_{\text{PBH}}^{-1}$, el fluido de PBHs no tiene, en sí mismo, una temperatura asociada.¹ En cambio, al ser una variable extensiva, la entropía del fluido puede calcularse sumando sobre las contribuciones de todos los PBHs. Luego, la densidad de entropía es

$$s_{\text{PBH}} = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} N(t; m) S(m) dm, \quad (4.10)$$

¹Zimdahl & Pavon (1998) mostraron que en el caso de que la distribución de PBHs sea monoenergética (i.e. que todos los PBHs tengan la misma masa), es posible considerar la temperatura individual de cada PBH como si fuera la temperatura del fluido mismo y obtener una descripción termodinámica coherente. En nuestro caso, no tendremos en cuenta esta simplificación.

donde $S(m)$ es la entropía de un agujero negro de Schwarzschild de masa m (Ec. 2.13).

Para estudiar la evolución del sistema compuesto debemos calcular el término de interacción Q . Cada PBH intercambia energía con la radiación circundante y por ende su masa varía en el tiempo. Si un PBH tiene masa m al tiempo t , y ésta evoluciona a un valor $m + dm$ al tiempo $t + dt$, entonces

$$N(t; m) = N(t + dt; m + dm). \quad (4.11)$$

De aquí se deduce

$$\left. \frac{\partial N(t; m)}{\partial t} \right|_{\text{int}} = \frac{\partial N(t; m)}{\partial m} \frac{dm}{dt}, \quad (4.12)$$

donde la tasa de variación de masa está dada por la Ec. (2.31). Luego, el término de interacción resulta

$$\begin{aligned} Q &= \left. \frac{\partial \rho_{\text{PBH}}}{\partial t} \right|_{\text{int}} = \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \left. \frac{\partial N(t; m)}{\partial t} \right|_{\text{int}} mc^2 dm \\ &= \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial N(t; m)}{\partial m} \frac{dm}{dt} mc^2 dm. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La última hipótesis que hacemos es que el espacio-tiempo es plano, lo cual es razonable de asumir en el universo temprano. Para ver esto, consideramos los parámetros cosmológicos adimensionales del sistema (Ec. B.15),

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{R}} &= \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \rho_{\text{R}} \propto R^{-4}, & \Omega_{\text{PBH}} &= \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \rho_{\text{PBH}} \propto R^{-3}, \text{ y} \\ \Omega_k &= -\frac{c^2 k}{H^2 R^2} \propto R^{-2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

y notamos que si $R \ll 1$, el parámetro de curvatura es mucho menor que los de radiación y PBHs. Por lo tanto, podemos desprestigiar la influencia de la curvatura y asumir $k = 0$.

Finalmente, el sistema de ecuaciones que rige la dinámica del sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{R}} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{R}} &= - \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial N(t; m)}{\partial m} \frac{dm}{dt} mc^2 dm, \\ \dot{\rho}_{\text{PBH}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{PBH}} &= \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial N(t; m)}{\partial m} \frac{dm}{dt} mc^2 dm, \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho_{\text{R}} + \rho_{\text{PBH}}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Éste es un sistema de ecuaciones integro-diferenciales acopladas para las funciones $\rho_{\text{PBH}}(t)$, $\rho_{\text{R}}(t)$ y $a(t)$. Para resolverlo, debemos hacer alguna suposición acerca de la distribución inicial de masas. En lo que sigue, estudiamos dos casos particulares: una distribución estrecha y centrada en un valor M_{PBH} , y una distribución extendida sobre un rango de masas significativo. Estos casos abarcan una amplia gama de escenarios de formación de PBHs.

4.2.1. Distribución de masas estrecha

Si la formación de **PBHs** ocurre debido a una transición de fase (e.g. al final de una etapa de inflación), o si la amplitud de las fluctuaciones primordiales depende fuertemente de la escala, la distribución inicial de masas resultará estrecha y centrada en un valor $M_{\text{PBH}} \lesssim M_{\text{H}}(t_{\text{form}})$, donde t_{form} es el tiempo de formación. Representamos este escenario mediante una distribución inicial de masas monoenergética (tipo delta de Dirac²):

$$N_0(m) \equiv A\delta(m - M_{\text{PBH}}), \quad \text{con } M_{\text{PBH}} = \frac{1}{\eta}M_{\text{H}}(t_{\text{form}}), \quad (4.16)$$

donde $\eta > 1$ y la constante de normalización A depende de la cantidad de **PBHs** formados. Luego, la densidad de energía inicial del gas de **PBHs** es simplemente

$$\rho_{\text{PBH}}(t = t_{\text{form}}) = AM_{\text{PBH}}c^2, \quad (4.17)$$

y la densidad de entropía inicial es

$$s_{\text{PBH}} = AS(M_{\text{PBH}}). \quad (4.18)$$

Por su parte, la densidad de energía inicial de la radiación es (Ec. 2.19)

$$\rho_{\text{R}}(t = t_{\text{form}}) = G^* [T_{\text{R}}(t_{\text{form}})]^4, \quad (4.19)$$

con G^* constante. Luego, si la proporción de esta densidad de energía que va a formar **PBHs** es

$$\beta = \frac{\rho_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{R}}}, \quad (4.20)$$

la constante de normalización A resulta

$$A = \frac{\eta\beta G^*}{M_{\text{PBH}}c^2} [T_{\text{R}}(t_{\text{form}})]^4. \quad (4.21)$$

En este escenario, todos los **PBHs** se comportan de la misma manera (pues tienen la misma masa). Por ende, podemos estudiar la evolución de un **PBH** de masa M_{PBH} representativo de la población, y luego extender el resultado a todo el gas. Bajo estas condiciones, el sistema de Ecs. (4.15) se simplifica y resulta

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{R}} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{R}} &= -A\frac{dM_{\text{PBH}}}{dt}c^2, \\ \dot{\rho}_{\text{PBH}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{PBH}} &= A\frac{dM_{\text{PBH}}}{dt}c^2, \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_{\text{R}} + \rho_{\text{PBH}}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Resolvemos numéricamente el sistema y analizamos los resultados en el Cap. 5.

²Paul A. M. Dirac (1902-1984).

4.2.2. Distribución de masas extendida

Distintos escenarios de formación de PBHs pueden resultar en una distribución de masas extendida (ver Sec. 3.2). Por ejemplo, si la amplitud de las fluctuaciones primordiales es invariante de escala, el espectro resultante es una ley de potencia:

$$N_0(m) \equiv Am^{-\alpha}, \quad (4.23)$$

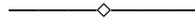
donde A es la constante de normalización y $\alpha \sim 2 - 3$. No obstante, un PBH de masa m no puede formarse hasta que la masa del horizonte de partículas del universo no supere un valor umbral, igual a un múltiplo de m : $M_H(t) > \eta m$, con $\eta > 1$. En base a esto, suponemos que la formación comienza a un tiempo t_{ini} con los PBHs más livianos y finaliza a un tiempo t_{fin} con los más masivos. En el transcurso de ese intervalo de tiempo, los PBHs más livianos pueden evolucionar (y eventualmente evaporarse) modificando la distribución. Por lo tanto, decimos que la distribución de masas inicial *estaría* dada por la Ec. (4.23) si los PBHs comenzaran a evolucionar recién a un tiempo $t > t_{\text{fin}}$.

La constante A se puede calcular de manera similar al caso de la distribución tipo delta. Si β es la proporción de la densidad de energía de radiación que va a formar PBHs³, entonces

$$\beta = \frac{\int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} N_0(m) mc^2 dm}{G^* [T_R(t_{\text{ini}})]^4} \simeq \frac{AM_{\text{max}}^{\alpha-2}}{(\alpha-2)G^* [T_R(t_{\text{ini}})]^4}. \quad (4.24)$$

De aquí, podemos despejar A en función de la masa máxima, la temperatura inicial de la radiación y el índice α .

En principio, no conocemos una expresión para la distribución de masas al tiempo t , $N(t; m)$. Por lo tanto, deberíamos reescribir las Ecs. (4.15) para considerar a $N(t; m)$, en lugar de ρ_{PBH} , como función a determinar. En lugar de realizar esto, desarrollamos un método numérico para resolver el sistema de ecuaciones de manera directa (ver el Apéndice C).



En este capítulo, hemos desarrollado un modelo cosmológico que nos permita estudiar la cosmología de un universo temprano con presencia de PBHs. La geometría del mismo

³Notar que, como asumimos que la amplitud de fluctuaciones primordiales es invariante de escala, de la Ec. (3.5) resulta que β es constante.

está dada por un espacio-tiempo de **FLRW**, y la materia está compuesta de radiación y **PBHs**. En primer lugar, desarrollamos un formalismo general para el estudio cosmológico de dos fluidos mutuamente interactuantes, y luego lo aplicamos a nuestro modelo. Como en el universo temprano la curvatura del espacio-tiempo es despreciable, consideramos $k = 0$. Planteamos un escenario en el cual la distribución de **PBHs** es arbitraria, y encontramos el sistema de ecuaciones que determina la evolución cosmológica. Para resolver este sistema es necesario imponer condiciones iniciales, en particular asumir la distribución inicial de **PBHs**. En general, dependiendo del mecanismo de formación, la distribución inicial resultará o bien extendida o bien estrecha. A modo representativo de estos escenarios, estudiamos dos distribuciones particulares: una extendida tipo ley de potencia y una monoenergética tipo delta de Dirac. En cada caso, discutimos sus particularidades y dejamos sentadas las ecuaciones que rigen la evolución cosmológica. En el siguiente capítulo presentamos los resultados numéricos de estas ecuaciones considerando distintos escenarios. Al momento de caracterizar estos escenarios, tendremos en cuenta las restricciones sobre el espectro inicial de **PBHs** (ver Sec. 3.3).

Capítulo 5

Resultados

Con el objetivo de estudiar la evolución cosmológica de distintos escenarios de universo temprano con radiación y PBHs, resolvimos numéricamente el sistema de ecuaciones correspondiente (ver Cap. 4) imponiendo distintas condiciones iniciales. De aquí obtuvimos la evolución temporal del factor de escala y de las densidades de energía de la radiación y del gas de PBHs. Luego, a partir de estas cantidades determinamos la evolución de la entropía de cada componente así como de la entropía total. En este capítulo presentamos y analizamos los resultados de dichos cálculos.

En la primera sección discutimos algunas consideraciones generales sobre la resolución del sistema de ecuaciones; en particular, las condiciones iniciales que deben imponerse. En la segunda sección presentamos y analizamos los resultados que obtuvimos para distribuciones monoenergéticas. Éstas representan escenarios en donde los PBHs se forman con un rango de masas acotado, tal como sucedería si la formación ocurrió durante un período de tiempo corto (e.g. por transiciones de fase). En la tercera sección presentamos y analizamos los resultados para distribuciones tipo ley de potencia. Éstas representan escenarios en donde los PBHs se forman con un rango de masas extendido, lo que sucedería si la formación ocurrió durante un período de tiempo considerable (e.g. por fluctuaciones primordiales invariantes de escala).

5.1. Parámetros y condiciones iniciales

Según el modelo de universo temprano desarrollado en el capítulo anterior, la evolución cosmológica está determinada por el sistema de Ecs. (4.15); i.e., de su resolución se obtiene la evolución temporal del factor de escala del espacio-tiempo y de las densidades

de energía de la radiación y del gas de PBHs. No obstante, para resolverlo es necesario imponer condiciones iniciales. Para ello, consideramos que la evolución comienza en un tiempo inicial t_{ini} en el cual fijamos los valores de las densidades de energía de ambos fluidos. Además, normalizamos el factor de escala de manera que $a(t_{\text{ini}}) = 1$.

En principio, el modelo es aplicable sobre una escala de tiempo que comprende desde la época inmediatamente posterior al período de inflación ($t \sim 10^{-33}$ s) hasta, a lo sumo, una época previa a aquella en que la componente de materia no-relativista (que no tenemos en cuenta en el modelo) se vuelve comparable a la radiación y comienza a dominar la evolución del universo ($t \sim 10^4$ yr). No obstante, si $t_{\text{ini}} \lesssim 10^{-10}$ s debemos especular en cierta medida el valor de las propiedades iniciales de la radiación, pues en estos tiempos la materia se encontraba en un estado cuya descripción excede el Modelo Estándar de Partículas. Dicho esto, para la temperatura inicial de la radiación utilizamos una expresión válida para tiempos posteriores (e.g. Weinberg 1972),

$$T_{\text{R}}(t) \sim 10^{10} (t/\text{s})^{-1/2} \text{ K}, \quad (5.1)$$

y la extendemos hasta t_{ini} . El valor preciso de esta cantidad, sin embargo, no es relevante pues sólo influye en la tasa de acreción inicial de los PBHs y, como veremos más adelante, la acreción no es un proceso determinante en la evolución cosmológica. Los valores iniciales de las demás cantidades termodinámicas de la radiación, en particular de sus densidades de energía y de entropía, quedan definidos a partir del valor inicial de la temperatura.

Por su parte, tomamos la densidad de energía inicial del gas de PBHs como una fracción de la densidad de energía inicial de radiación:

$$\rho_{\text{PBH}}(t_{\text{ini}}) := \beta \rho_{\text{R}}(t_{\text{ini}}), \quad (5.2)$$

donde la constante β es un parámetro libre del modelo, aunque sobre éste valen las restricciones discutidas en la Sec. 3.3. Además, para la tasa de emisión por radiación de Hawking (Ec. 2.14) utilizamos una parametrización que considera, a primera aproximación, la dependencia con la masa que resulta de la emisión de diferentes clases de partículas para distintas masas (MacGibbon & Carr 1991):

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{\text{rad}} = -\frac{A(M)}{M^2}, \quad \text{con } A(M) = \begin{cases} 10^{27} \text{ g s}^{-1} & \text{para } M < 10^{15} \text{ g,} \\ 5 \times 10^{25} \text{ g s}^{-1} & \text{para } M > 10^{17} \text{ g.} \end{cases} \quad (5.3)$$

A continuación, presentamos los resultados obtenidos considerando distribuciones de masa monoenergéticas y extendidas para los PBHs.

5.2. Distribución de masas monoenergética

Para estudiar los efectos que produce sobre la evolución cosmológica una población de PBHs con masas en un rango acotado, consideramos una distribución monoenergética como la discutida en la Sec. 4.2.1. Además, motivados por la posible formación de PBHs debido a transiciones de fase post-inflacionarias, elegimos el tiempo inicial como $t_{\text{ini}} = 10^{-33}$ s. Luego, evaluando la expresión (5.1) en este tiempo, obtenemos la temperatura inicial de la radiación: $T_{\text{R}}(t_{\text{ini}}) \simeq 3 \times 10^{26}$ K. A partir de ésta, quedan determinados los valores iniciales de la densidad de energía (Ec. 2.19) y de la densidad de entropía (Ec. 2.21)¹.

La masa de los PBHs formados al tiempo t_{ini} no puede superar la masa del horizonte de partículas correspondiente a esta época, $M_{\text{H}}(t_{\text{ini}}) \sim 10^5$ g. Elegimos precisamente $M_{\text{PBH}}(t_{\text{ini}}) = 10^5$ g como caso representativo a estudiar. En la Fig. (5.1) se muestra la evolución temporal de la masa de uno cualquiera de estos PBHs. El comportamiento es similar al discutido en la Sec. 2.3.2. En este caso, el agujero negro comienza acretando radiación hasta alcanzar una masa 1.4 veces mayor que su masa inicial. Luego, experimenta un período de estabilidad aparente en el cual tanto la acreción como la emisión son despreciables. Cuando la temperatura de la radiación cae por debajo de la temperatura del agujero negro, éste comienza a evaporarse lentamente. A un tiempo $t \sim 10^{-11}$ s, la tasa de emisión del agujero negro aumenta drásticamente y éste se evapora. Al tener todos los agujeros negros la misma masa, evolucionan de la misma manera y, por ende, se evaporan simultáneamente. Luego, el gas de PBHs puede cederle a la radiación una cantidad de energía significativa en una escala de tiempo muy corta y modificar considerablemente la evolución cosmológica.

Fijadas las condiciones anteriores, i.e. la densidad de energía inicial de la radiación y la masa de los PBHs, el único parámetro libre del modelo es la relación entre las densidades de energía de ambos fluidos ($\beta = \rho_{\text{PBH}}/\rho_{\text{R}}$). Dicha cantidad está acotada por las restricciones discutidas en la Sec. 3.3, que para $M_{\text{PBH}} = 10^5$ g implican $\beta < 10^{-15}$ (Ec. 3.10). No obstante, recordamos que esta restricción es especulativa: proviene de suponer que al evaporarse los PBHs dejan partículas ‘reliquia’. De no ser así, no habría, a priori,

¹Recordamos que el valor g^* (~ 1) en las expresiones para la densidad de energía y la densidad de entropía da cuenta de las distintas clases de partículas que componen a la radiación, y depende, a priori, de la temperatura. Sin embargo, al ser esta dependencia discreta podemos suponer que g^* es constante (en particular tomamos estrictamente $g^* = 1$) sin que el resultado presente diferencias relevantes.

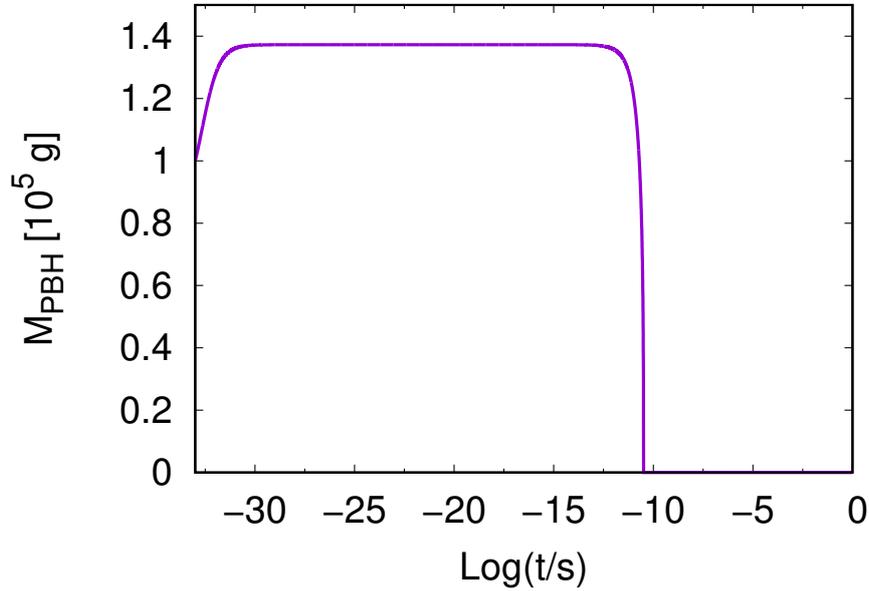


Figura 5.1: Evolución de un PBH formado a un tiempo $t_{\text{ini}} = 10^{-33}$ s con una masa igual a la masa del horizonte de partículas a ese tiempo, i.e., $M_{\text{PBH}}(t_{\text{ini}}) = 10^5$ g.

cota superior a la densidad de energía inicial del gas de PBHs. Basados en esto, estudiamos dos casos representativos: uno en el cual no consideramos tal restricción y elegimos $\beta = 10^{-3}$, y otro en el cual sí la consideramos y tomamos $\beta = 10^{-15}$.

En la Fig. (5.2) se muestran los resultados de la evolución cosmológica para el primer escenario ($\beta = 10^{-3}$). En un comienzo, el universo está dominado por la radiación y el factor de escala evoluciona según $a(t) \propto t^{1/2}$. Sin embargo, debido a que el gas de PBHs se diluye más lento que la radiación ($\rho_{\text{PBH}} \sim a^{-3}$ y $\rho_{\text{R}} \sim a^{-4}$), a un tiempo $t \simeq 10^{-25}$ s éste comienza a dominar la evolución. Durante una etapa, el universo se expande como uno dominado por materia no-relativista, $a(t) \propto t^{2/3}$. Luego, como ya mencionamos, a un tiempo $t \sim 10^{-11}$ s los PBHs se evaporan y le ceden toda su energía a la radiación, por lo cual ésta experimenta un fuerte freno en su tasa de disminución. Luego de la evaporación, tanto el factor de escala como la densidad de energía de la radiación regresan a su comportamiento inicial. Sin embargo, el valor final del factor de escala es aproximadamente 10^3 veces más grande que el que resultaría sin la presencia de la población de PBHs. Además, como podemos apreciar en el panel inferior de la figura, la entropía total en un volumen comóvil, $s(t)a(t)^3$, aumenta durante toda la evolución, ya sea que los PBHs estén acretando radiación o que se estén evaporando. En particular, la evaporación de los PBHs produjo un incremento abrupto en esta cantidad en un factor 10^6 . En resumen,

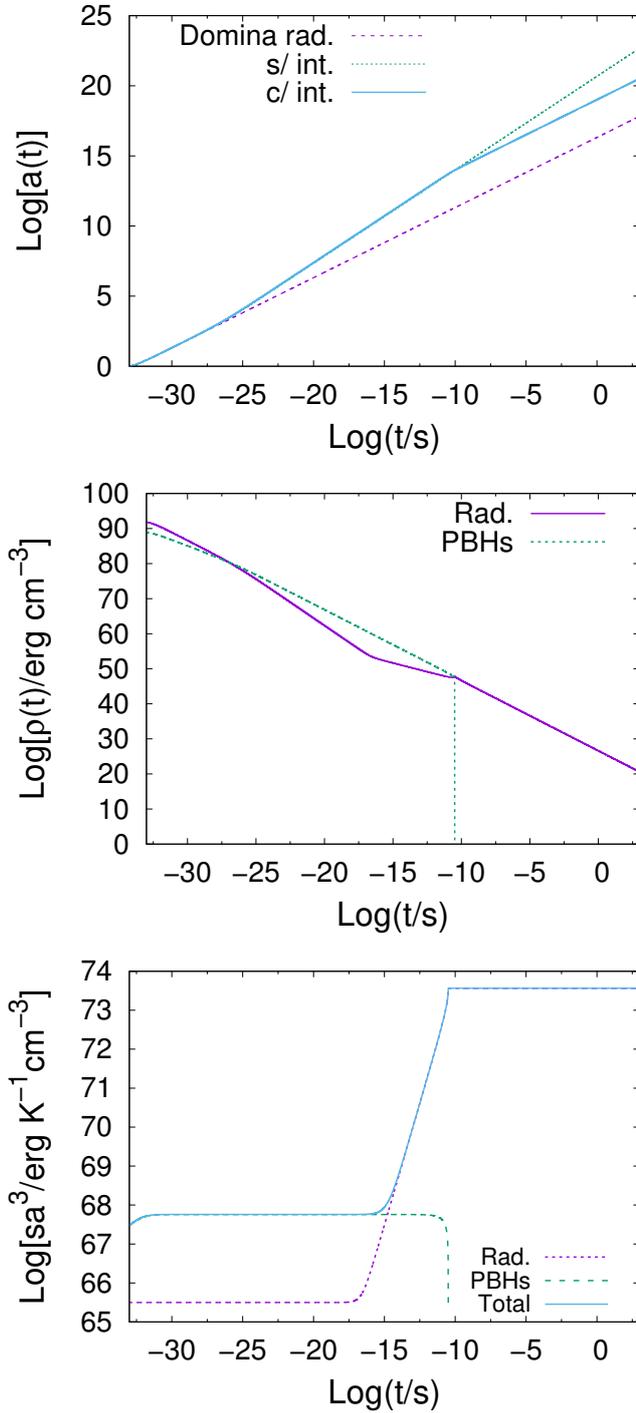


Figura 5.2: Evolución cosmológica de un universo con radiación y con una población de PBHs de masa $M_{\text{PBH}} = 10^{15}$ g, para un valor de $\beta = 10^{-3}$. En la figura superior se muestra el factor de escala del espacio-tiempo (con interacción), junto con el que resulta para un universo sólo con radiación (domina radiación) y para uno en el cual no hay interacción y los PBHs se comportan simplemente como materia no-relativista (sin interacción). En la figura central se muestran las densidades de energía de la radiación y del gas de PBHs. En la figura inferior se muestra la entropía por unidad de volumen comóvil de ambas componentes, así como la total.

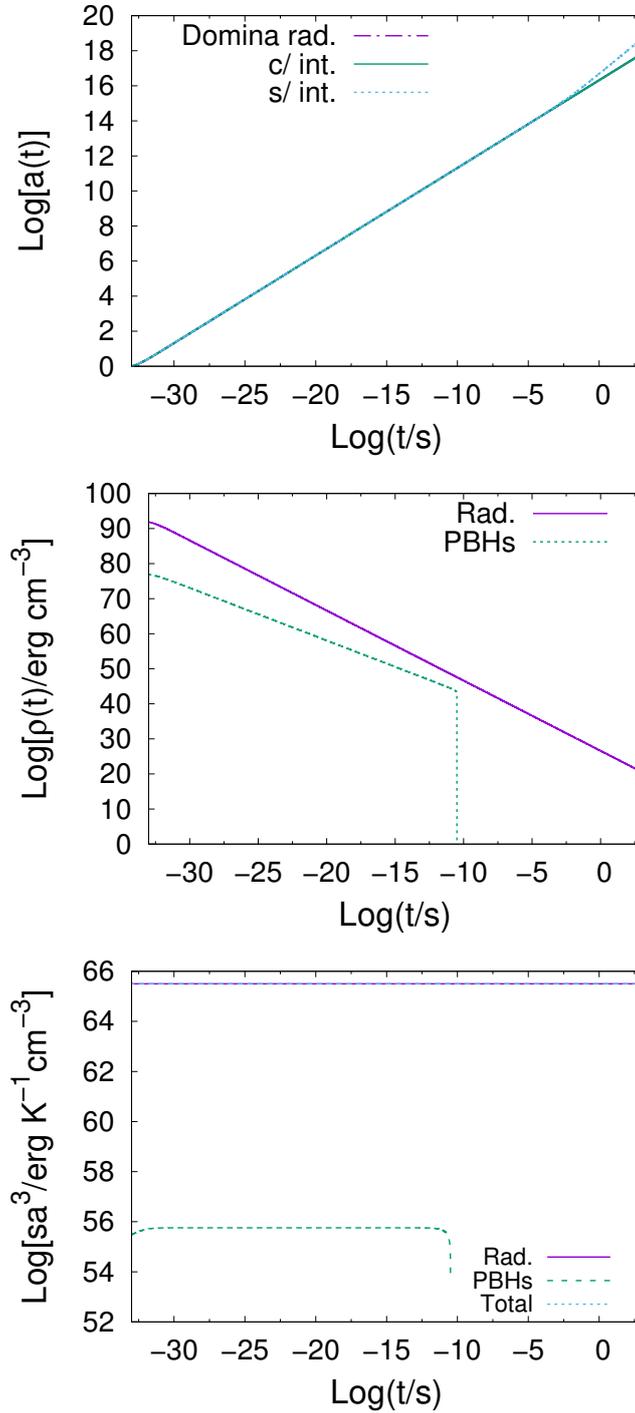


Figura 5.3: Evolución cosmológica de un universo con radiación y con una población de PBHs de masa $M_{\text{PBH}} = 10^{15}$ g, para un valor de $\beta = 10^{-15}$. En la figura superior se muestra el factor de escala del espacio-tiempo (con interacción), junto con el que resulta para un universo dominado por radiación (domina radiación) y para uno en el cual no hay interacción y los PBHs se comportan simplemente como materia no-relativista (sin interacción). En la figura central se muestran las densidades de energía de la radiación y del gas de PBHs. En la figura inferior se muestra la entropía por unidad de volumen comóvil de ambas componentes, así como la total.

esta población de PBHs modificó la evolución del universo, principalmente a través del proceso de evaporación, y generó, además, un aumento significativo de la entropía. Por otro lado, notamos que durante el período en que dominaba la acreción no se produjeron efectos apreciables en la evolución del factor de escala ni aumentó considerablemente la entropía.

En la Fig. (5.3) se muestran los resultados para el escenario en que valen las restricciones sobre la densidad de energía inicial del gas de PBHs ($\beta = 10^{-15}$). Notamos que en este caso la radiación domina la evolución para todo tiempo. Esto se debe a que los PBHs se evaporan antes que su densidad de energía se vuelva comparable a la de la radiación, y por ende su presencia no modifica la evolución del factor de escala. Además, si bien la entropía crece cuando los PBHs se evaporan, este incremento es despreciable. En resumen, si la densidad de energía inicial del gas de PBHs es menor o igual que 10^{-15} veces la densidad de energía inicial de la radiación, entonces su presencia no modifica la evolución del factor de escala ni genera un aumento significativo de la entropía.

Concluimos que para un escenario en el cual se forman PBHs en una etapa post-inflacionaria con masas en un rango acotado alrededor de 10^5 g, la evolución cosmológica puede verse modificada sólo si la densidad de energía inicial de los PBHs no cumple con las restricciones establecidas por ‘partículas reliquias’.

5.3. Distribución de masas tipo ley de potencia

A continuación presentamos los resultados del estudio de la evolución cosmológica en escenarios donde la población de PBHs presenta una distribución de masas extendida; específicamente, una ley de potencias decreciente de índice espectral α (Ec. 4.23). Barrow et al. (1991) estudiaron escenarios de este tipo, pero a diferencia de nosotros despreciaron la acreción sobre los PBHs y, además, consideraron que éstos se forman simultáneamente.

Suponemos nuevamente que la evolución comienza en la época inmediatamente posterior a la inflación, i.e. $t_{\text{ini}} = 10^{-33}$ s, aunque en este caso la formación de PBHs ocurre durante un período extendido de tiempo. Las masas de los agujeros negros abarcan un rango de valores entre M_{min} y M_{max} . Luego, a diferencia de lo que sucedía para una distribución monoenergética, el intercambio de energía entre ambos fluidos puede ser significativo durante toda la evolución, ya que a diferentes tiempos habrá PBHs de diferente masa evaporándose o acretando radiación.

Además de la relación entre las densidades de energía iniciales de ambos fluidos, β ,

en este escenario se tienen, a priori, otros tres parámetros libres: las masas mínima y máxima de los PBHs y el índice espectral α . Suponemos que este último está en el rango $2 - 3$, como sería el caso si los PBHs se produjesen por fluctuaciones aproximadamente invariantes de escala (ver Sec. 3.2). Para valores de α cercanos a 3 es mayor la proporción de PBHs de baja masa que se evaporan en una escala de tiempo corta, mientras que para valores cercanos a 2 hay una fracción más significativa de PBHs de gran masa que acretan radiación y permanecen en el sistema. La masa mínima la elegimos de manera tal que los PBHs más livianos se evaporen inmediatamente (i.e. en una escala de tiempo de $\sim 10^{-33}$ s). Esto es aproximadamente $M_{\min} = 6.5 \times 10^2 m_{\text{P}}$, donde $m_{\text{P}} \simeq 2.18 \times 10^{-5}$ g es la masa de Planck.

De manera similar al caso anterior, estudiamos dos escenarios. En el primero, el objetivo es analizar de forma general los efectos que este tipo de distribuciones produce sobre la evolución cosmológica, por ende no imponemos ninguna restricción sobre los parámetros. En el segundo escenario, proponemos un ejemplo de distribución tipo ley de potencias que satisfaga las restricciones discutidas en la Sec. 3.3. En ambos casos realizamos los cálculos tanto considerando el proceso de acreción de radiación sobre los PBHs como sin considerarlo.

5.3.1. Escenario sin restricciones

Para abarcar un rango amplio de masas elegimos $M_{\max} = 10^6 M_{\odot}$, lo que corresponde a agujeros negros supermasivos². Estudiamos la evolución cosmológica para distintos valores de α entre 2.1 y 2.9, y para distintos valores del cociente entre las densidades iniciales de ambos fluidos, β . En cada caso ajustamos leyes de potencia de la forma $a \propto t^r$ para la evolución del factor de escala. Además, estudiamos la existencia de soluciones de equilibrio entre los fluidos, esto es, soluciones para las cuales el cociente entre las densidades de energía se mantenga constante a partir de un determinado tiempo.

De manera general, encontramos que las modificaciones más significativas en la evolución cosmológica (respecto a la correspondiente a un universo con radiación únicamente) ocurren para los valores de α más cercanos a 2 (espectros más duros) y para los valores más elevados del parámetro β (mayor densidad inicial de PBHs). En particular, en estos casos encontramos soluciones en las que la expansión del universo es intermedia entre la correspondiente a un universo dominado por radiación y a uno dominado por materia tipo

²Remarcamos que estos agujeros negros supermasivos son primordiales y se forman a un tiempo $t \sim 1$ s.

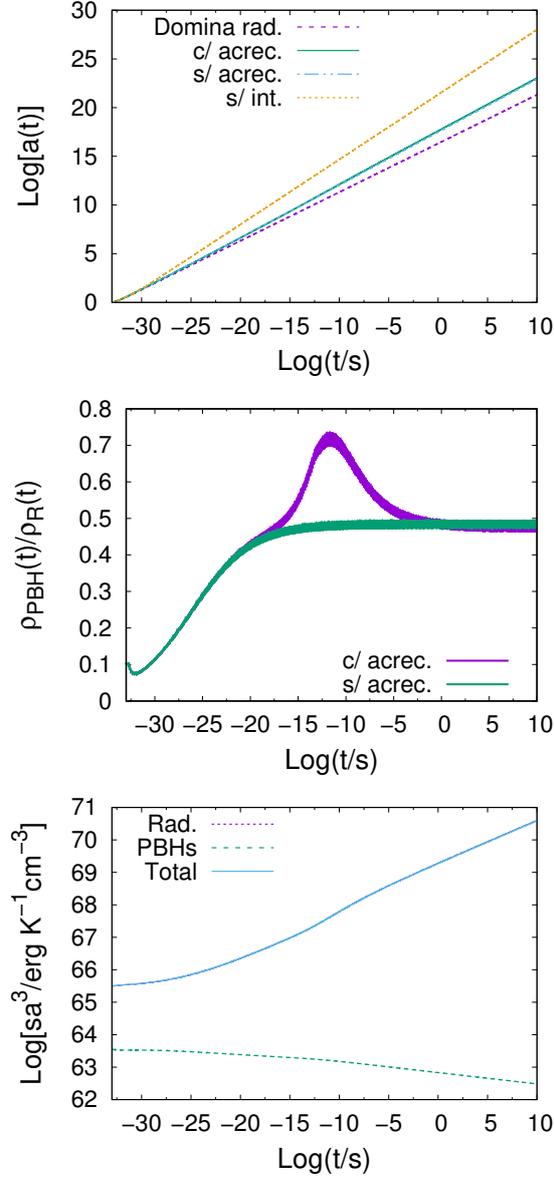


Figura 5.4: Evolución cosmológica para una distribución de masas tipo ley de potencia decreciente de índice $\alpha = 2.1$ entre masas $M_{\min} = 650m_{\text{P}}$ y $M_{\max} = 10^6 M_{\odot}$, para un valor de $\beta = 10^{-1}$. En la figura superior se muestra el factor de escala del espacio-tiempo tanto considerando la acreción (con acreción) como sin hacerlo (sin acreción), junto con el factor de escala que resultaría para un universo dominado por radiación (domina radiación) y para uno en el cual no hay interacción y los PBHs se comportan simplemente como materia no-relativista (sin interacción). En la figura central se muestra el cociente entre las densidades de energía del gas de PBHs y de la radiación. En la figura inferior se muestra la entropía en un volumen comóvil de ambas componentes, así como la total.

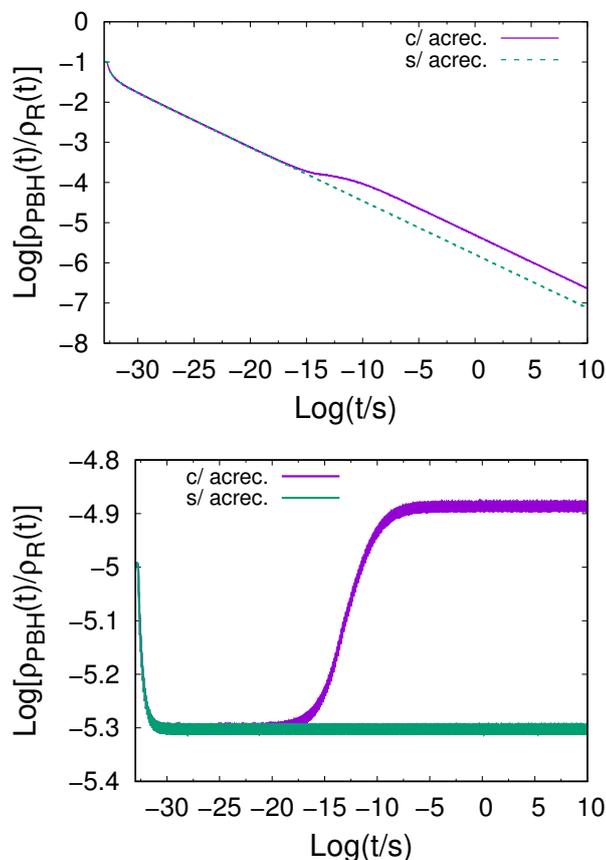


Figura 5.5: Cociente entre las densidades de energía del gas de PBHs y de la radiación para dos escenarios. En la figura superior se muestra el caso ($\alpha = 2.9$, $\beta = 10^{-1}$). En la figura inferior se muestra el caso ($\alpha = 2.5$, $\beta = 10^{-5}$).

polvo, i.e. $1/2 < r < 2/3$. Este tipo de evolución se debe a que, al ser la distribución de masas extendida, a todo tiempo hay PBHs en el estadio final de su evaporación cediéndole energía a la radiación a una tasa elevada. Tal proceso, por un lado acelera la tasa con la que disminuye la densidad de energía del gas de PBHs, y por otro ralentiza la tasa con la que disminuye la radiación. El efecto global en la evolución resulta equivalente al que produciría un fluido cuya tasa de disminución sea intermedia entre la correspondiente a materia no-relativista tipo polvo y a radiación. Por otra parte, encontramos soluciones de equilibrio con y sin acreción. En general, el valor del cociente de las densidades de energía en el equilibrio coincide en ambos casos. Sin embargo, para $\alpha = 2.5$ encontramos soluciones de equilibrio en las cuales este valor resulta mayor si se considera la acreción. A continuación discutimos algunos gráficos de casos representativos.

En la Fig. (5.4)³ se muestran los resultados del caso $\alpha = 2.1$ y $\beta = 10^{-1}$, para el cual se obtuvieron las modificaciones más notorias sobre la evolución cosmológica. Al realizar el ajuste del exponente con el que evoluciona temporalmente el factor de escala obtuvimos un valor $r = 0.544$. Éste resultó independiente de que se considere o no la acreción. Además, los fluidos alcanzaron un estado de equilibrio en el cual $\rho_{\text{PBH}}/\rho_{\text{R}} \simeq 0.47$. Notamos que, si bien la acreción modifica la evolución de este cociente durante un intervalo de tiempo, el valor de equilibrio en el estado final coincide en ambos casos. El pico que se observa alrededor de $t \sim 10^{-10}$ s en el caso ‘con acreción’ se produce cuando se forman PBHs para los cuales inicialmente la tasa de acreción es grande. Estos agujeros negros producen un incremento en la densidad de energía de esta componente. Sin embargo, debido a que la radiación disminuye con el factor de escala, la acreción rápidamente se vuelve despreciable y, transcurrido un cierto tiempo, el aumento producido en la densidad de energía se vuelve despreciable respecto a la disminución de la misma por la expansión. Por último, notamos que la entropía en un volumen comóvil, en lugar de presentar un crecimiento abrupto como sucedía para una distribución tipo delta, aumenta de manera continua durante toda la evolución. Esto es producto de la evaporación de PBHs de distintas masas a distintos tiempos.

En la Fig. (5.5) se muestra el cociente de las densidades de energía para dos casos: ($\alpha = 2.9$, $\beta = 10^{-1}$) y ($\alpha = 2.5$, $\beta = 10^{-5}$). El primer caso es un ejemplo de una solución en que no se alcanza un estado de equilibrio en el tiempo considerado para la evolución. El segundo caso tiene la particularidad de que se alcanza un equilibrio y, además, el valor del cociente difiere entre los casos ‘con’ y ‘sin’ acreción. En ninguno de estos dos escenarios se vio afectada la evolución del factor de escala ni se produjo un aumento significativo de la entropía.

5.3.2. Escenario con restricciones

En esta sección proponemos una distribución tipo ley de potencia que satisfaga las restricciones discutidas en la Sec. 3.3, con excepción de la que proviene de suponer que los PBHs dejan ‘partículas reliquia’ al evaporarse. Para ello, elegimos una masa máxima $M_{\text{max}} = 10^{15}$ g, un índice $\alpha = 2.7$ y un valor de $\beta = 1.12 \times 10^{-3}$. En la Fig. (5.6) se

³En el gráfico de la evolución del cociente de las densidades de energía, el aparente grosor en las curvas es producto del paso numérico que se utilizó para la integración temporal. Los valores oscilan alrededor del centro de la curva, y, al graficar con un trazo continuo, las curvas aparentan ser gruesas. Esta característica también es apreciable en las Figs. (5.5) y (5.7).

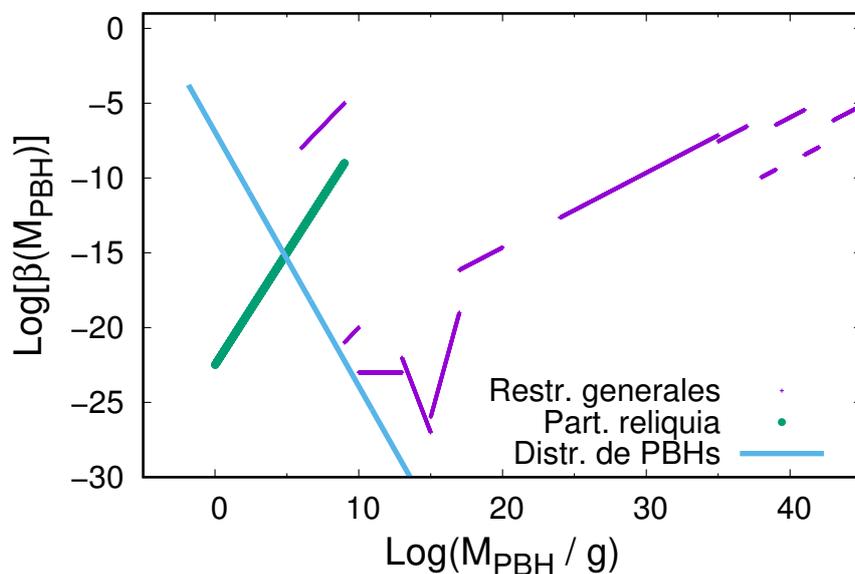
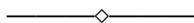


Figura 5.6: Restricciones más importantes sobre la abundancia de PBHs, junto con el valor $\beta(M_{\text{PBH}})$ que resulta para una distribución con índice $\alpha = 2.7$ y tal que $\rho_{\text{PBH}}/\rho_{\text{R}} = 1.12 \times 10^{-3}$.

muestran las restricciones junto con el valor de $\beta(M_{\text{PBH}})$ que resulta para la distribución considerada. Podemos verificar que la distribución satisface las restricciones y por ende es, a priori, físicamente posible.

En la Fig. (5.7) mostramos los resultados correspondientes a esta distribución. Notamos que no se presenta ninguno de los efectos observados en los casos que discutimos en la sección anterior. En particular, el factor de escala evoluciona igual que el correspondiente a un universo dominado por radiación, no se alcanza una solución de equilibrio entre las densidades de energía, y el aumento en la entropía es insignificante. Concluimos que una distribución de este tipo no produciría modificaciones apreciables en la evolución cosmológica.



En este capítulo, hemos analizado los resultados del sistema de Ecs. (4.15) en distintos escenarios. En particular, hemos considerado distribuciones de masa monoenergéticas y tipo ley de potencia para los PBHs, como casos representativos de distribuciones estrechas y extendidas, respectivamente.

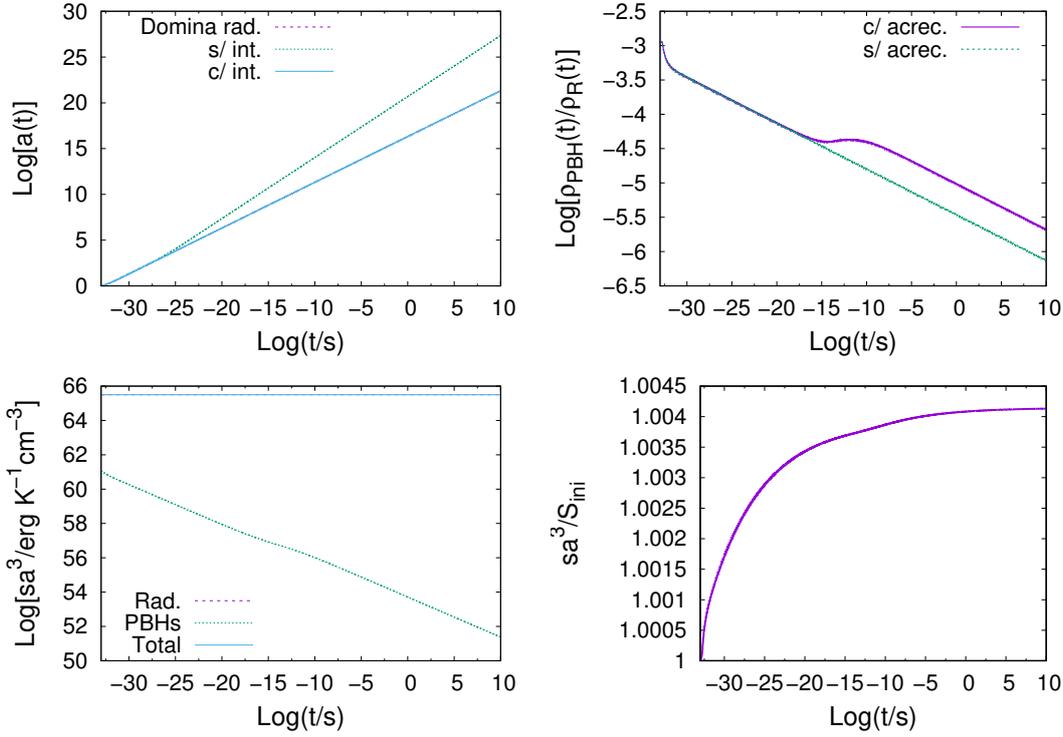


Figura 5.7: Evolución cosmológica para una distribución de masas tipo ley de potencia decreciente de índice $\alpha = 2.7$ entre masas $M_{\min} = 650m_P$ y $M_{\max} = 10^{15}$ g, que satisface las restricciones. En la figura superior izquierda se muestra el factor de escala del espacio-tiempo (con interacción), junto con el que resultaría para un universo dominado por radiación (domina radiación) y para uno en el cual no hay interacción y los PBHs se comportan simplemente como materia no-relativista (sin interacción). En la figura superior derecha se muestra el cociente entre las densidades de energía del gas de PBHs y de la radiación. En la figura inferior izquierda se muestra la entropía en un volumen comóvil para ambas componentes, así como la total. En la figura inferior derecha se muestra el cociente entre la entropía total al tiempo t y la entropía total inicial.

Para las distribuciones monoenergéticas, estudiamos escenarios con y sin la restricción de ‘partículas reliquia’. En el caso sin restricciones, el comportamiento equivalente de todos los PBHs de la población (en particular, su evaporación simultánea) produjo cambios abruptos en las variables. A saber, modificó la evolución del factor de escala e incrementó significativamente la entropía total. En el caso con restricciones, los PBHs nunca dominaron la evolución y no se observó ninguno de los efectos anteriores.

Para las distribuciones tipo ley de potencia, estudiamos escenarios generales en los cuales no tuvimos en cuenta ninguna restricción, además de un escenario más realista en el cual valían todas las restricciones con la excepción de la correspondiente a ‘partículas

reliquia'. Para escenarios generales, encontramos soluciones en las que la evolución del factor de escala resultó intermedia entre la correspondiente a un universo dominado por radiación y a uno dominado por materia no-relativista. Además, obtuvimos soluciones de equilibrio entre los PBHs y la radiación independientemente de si consideramos o no la acreción. Por otro lado, se produjo un aumento continuo en la entropía, aunque menor que el obtenido para distribuciones monoenergéticas. En el escenario más realista no se observó ninguna modificación relevante en la evolución cosmológica.

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo general de este trabajo ha sido investigar los efectos de una población de PBHs acretantes en la evolución cosmológica del universo temprano. Para ello, hemos desarrollado un modelo cosmológico con dos fluidos interactuantes: radiación (componente dominante en el universo temprano) y un gas de PBHs, y encontrado las ecuaciones que rigen su evolución. Según el mecanismo por el cual se forman los PBHs, su distribución inicial de masas resulta o bien extendida, o bien estrecha. Basados en esto, hemos aplicado el modelo a casos representativos de estas poblaciones; a saber, distribuciones tipo ley de potencia y distribuciones monoenergéticas. En cada caso, hemos resuelto las ecuaciones correspondientes considerando distintas condiciones iniciales.

En primer lugar, estudiamos poblaciones de PBHs arbitrarias (i.e. que no necesariamente satisfagan restricciones) para analizar de manera general los efectos que producirían los PBHs sobre la evolución cosmológica. Encontramos diferencias significativas entre las distribuciones monoenergéticas y las tipo ley de potencia. Para las primeras todos los agujeros negros se comportan de la misma manera y, por ende, se evaporan simultáneamente. Luego, en una escala de tiempo muy corta transfieren una gran cantidad de energía a la radiación produciendo cambios abruptos en la evolución del factor de escala y de la entropía total. Por el contrario, para las distribuciones tipo ley de potencia la transferencia de energía es continua y suave, por lo que también lo son los efectos que produce en la evolución. En particular, en este caso existen soluciones de equilibrio entre el gas de PBHs y la radiación. Por su parte, el proceso de acreción puede modificar temporalmente la relación entre las densidades de energía de los fluidos, pero no produce cambios relevantes en la evolución del factor de escala.

En segundo lugar, estudiamos poblaciones particulares de PBHs que satisfagan las

restricciones existentes. No obstante, distinguimos las restricciones correspondientes a ‘partículas reliquia’ de las demás. Al ser las primeras especulativas, una población de PBHs que no las satisfaga no estaría completamente descartada. Encontramos que, si la distribución de masas de esta población es monoenergética y no aplica tal restricción, los PBHs pueden provocar modificaciones significativas en la evolución cosmológica. En cambio, si su distribución de masas es tipo ley de potencia, éstos no producen ningún efecto apreciable.

Concluimos que la presencia de una población de PBHs en el universo temprano habría producido modificaciones en la evolución cosmológica sólo bajo ciertas condiciones. En particular, si la evaporación de un agujero negro no deja partículas reliquia, una población de PBHs con masas en un rango acotado podría haber producido cambios significativos en la evolución del factor de escala y haber generado un fuerte incremento de la entropía. Además, la acreción de radiación sobre los PBHs no parece ser un proceso relevante en ninguno de estos escenarios.

Este trabajo ha motivado algunas cuestiones sobre las que investigar en el futuro:

- Evolución cosmológica para tiempos posteriores a los considerados. Para ello, sería necesario agregar otras componentes de materia al modelo; principalmente, materia no-relativista.
- Evolución cosmológica con distribuciones de masa más realistas para los PBHs; por ejemplo, distribuciones obtenidas a partir de simulaciones numéricas de formación de PBHs (e.g. Shibata & Sasaki 1999; Musco & Miller 2013).
- Estudio de las modificaciones que produciría una población de PBHs sobre la historia térmica del universo y de las implicancias que ésto tendría.
- Comportamiento termodinámico de una población de agujeros negros en un universo cerrado en su etapa final de contracción. Este escenario es interesante ya que podría coincidir con la etapa final del colapso de un pre-universo en un modelo de rebote (ver Novello & Bergliaffa 2008). Aquí, serían necesarias dos modificaciones fundamentales a nuestro modelo: por un lado considerar una solución de agujero negro cosmológico en lugar de la solución de Schwarzschild, y por otro agregar el proceso de fusión de agujeros negros, que sería relevante en los últimos instantes de la contracción.

Apéndice A

Complementos de agujeros negros

A.1. Una definición formal de agujero negro

En esta sección presentamos una definición formal de agujero negro, independiente del sistema de coordenadas elegido. Es necesario introducir previamente algunas definiciones (e.g. Hawking & Ellis 1973; Wald 1984):

D.1 Una *curva causal* en un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ es una curva que no es de tipo espacio, es decir, es de tipo tiempo o nula.

D.2 Un modelo de espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ es *temporalmente orientable* si puede definirse sobre la variedad \mathcal{M} un campo vectorial suave, no nulo, de tipo tiempo.

D.3 Si $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ es un modelo de espacio-tiempo temporalmente orientable, entonces definimos el *futuro (pasado) causal* de $p \in \mathcal{M}$, denotado $J^{+(-)}(p)$, como:

$$J^{+(-)}(p) := \{q \in \mathcal{M} \mid \exists \text{ una curva causal futura (pasada) desde } p \text{ hasta } q\}. \quad (\text{A.1})$$

D.4 El futuro (pasado) causal de una región $S \subset \mathcal{M}$ es:

$$J^{+(-)}(S) := \bigcup_{p \in S} J^{+(-)}(p). \quad (\text{A.2})$$

D.5 Una superficie S de tipo espacio es una *superficie de Cauchy* si toda curva causal en \mathcal{M} cruza a S una y sólo una vez.

D.6 Un modelo de espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se dice *globalmente hiperbólico* si y sólo si \mathcal{M} incluye una superficie de Cauchy.

Consideremos ahora un espacio-tiempo donde todas las geodésicas tipo luz que comienzan en una región \mathcal{J}^- terminan en una región \mathcal{J}^+ . Decimos que dicho espacio-tiempo, $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, contiene un *agujero negro* si \mathcal{M} no está contenida en $J^-(\mathcal{J}^+)$. En otras palabras, si existe una región desde donde las geodésicas nulas no pueden alcanzar el futuro asintótico plano¹. Llamamos *agujero negro* a la región $\mathcal{BH} := [\mathcal{M} - J^-(\mathcal{J}^+)]$. La frontera de \mathcal{BH} en \mathcal{M} , $\mathcal{H} := J^-(\mathcal{J}^+) \cap \mathcal{M}$, es el *horizonte de eventos* del agujero negro.

Lo peculiar de esta región espacio-temporal es que está causalmente desconectada del resto del espacio-tiempo: un evento en esta región no puede tener ninguna influencia en eventos fuera de ella. De aquí que a su frontera se le llame horizonte de eventos.

Para un análisis más detallado ver, por ejemplo, Frolov & Zelnikov 2011.

A.2. Otras soluciones de agujeros negros

En la década de 1960, el físico estadounidense John Archibald Wheeler enunció la llamada *conjetura del no-pelo* (del inglés *no-hair conjecture*), que afirma que todas las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de Einstein-Maxwell² pueden ser caracterizadas por sólo tres parámetros clásicos: masa, carga eléctrica y momento angular. Un agujero negro de masa M , carga eléctrica Q y momento angular J es representado por la solución de *agujero negro de Kerr-Newmann*³, que en coordenadas de Boyer-Lindquist toma la forma

$$ds_{\text{KN}}^2 = - \left(1 - \frac{rsr - q^2}{\Sigma} \right) c^2 dt^2 - \frac{2(rsr - q^2)}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma &:= r^2 + (a/c)^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &:= r^2 - rsr + (a/c)^2 + q^2, \text{ y} \\ A &:= [r^2 + (a/c)^2]^2 - (a/c)^2 \Delta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Aquí, $a := J/c$ es el momento angular específico, $q^2 := Q^2 G / 4\pi\epsilon_0 c^4$, r_S es el radio de Schwarzschild y c es la velocidad de la luz en el vacío.

¹Un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ es asintóticamente plano si, en coordenadas apropiadas, los coeficientes de la métrica tienden a los de la métrica plana (Minkowskiana) en el infinito.

²Se llaman ecuaciones de Einstein-Maxwell a aquellas que resultan de combinar las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía-impulso del campo electromagnético en el vacío (tensor de Maxwell).

³Roy Patrick Kerr (1934-); Ezra Ted Newman (1929-).

Si el agujero negro rota pero no posee carga eléctrica, la expresión anterior se reduce a la solución conocida como *agujero negro de Kerr*:

$$ds_K^2 = - \left(1 - \frac{r_S r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2r_S r}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2. \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado, un agujero negro que no rota pero posee carga eléctrica es representado por la solución de *agujero negro de Reissner-Nordström*⁴, que en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) toma la forma

$$ds_{\text{RN}}^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.6})$$

Cada una de estas soluciones se reduce a la solución de Schwarzschild en los límites apropiados. Se piensa que en la naturaleza no existen agujeros negros cargados, ya que éstos se descargarían rápidamente por acreción de partículas de carga opuesta. En cambio, como en general la materia que colapsa para formar un agujero negro posee momento angular, el mismo será rotante. Por ende, la solución que mejor representa a los agujeros negros astrofísicos es la solución de Kerr.

⁴Hans Jacob Reissner (1874-1967); Gunnar Nordström (1881-1923)

Apéndice B

Modelos cosmológicos

En el marco de la Teoría General de la Relatividad, un *modelo cosmológico* consta de (Ellis et al. 2012)

- un modelo de espacio-tiempo $M_{\mathcal{E}\mathcal{T}} = (\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, donde \mathcal{M} es una variedad real diferenciable 4-dimensional y $g_{\mu\nu}$ es una métrica pseudo-Riemanniana;
- un modelo del contenido de materia del universo, representado por un tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$;
- una familia de *sistemas de referencia fundamentales*, definidos de manera unívoca, que representen el movimiento promedio de la materia en el universo.

B.1. Modelos de FLRW

Existe evidencia observacional para aceptar que el universo es *espacialmente isotrópico* a gran escala (ver, e.g., Rich 2010). Si además se acepta el *principio cosmológico*¹, resulta que el universo debe ser también *espacialmente homogéneo* a gran escala. Los modelos de **FLRW** son modelos cosmológicos basados en las hipótesis de homogeneidad e isotropía espacial. Matemáticamente, estas propiedades se definen de la siguiente manera (Wald 1984):

- Un modelo de espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se dice (espacialmente) isotrópico respecto a todo punto, si existe una congruencia de curvas tipo tiempo (i.e., sistemas de

¹El principio cosmológico afirma, básicamente, que no ocupamos ninguna ubicación especial en el universo (ver, e.g. Weinberg 1972).

referencia) con vectores tangentes u^a , que cubren todo el espacio-tiempo. Además, si s_1^a y s_2^b son dos vectores tipo espacio del espacio tangente de un punto P , entonces existe una isometría² que mantiene fijos a P y a u^a , pero rota s_1^a hacia s_2^a .

- Un modelo de espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se dice (espacialmente) homogéneo si puede foliarse completamente por una familia monoparamétrica de hipersuperficies tipo espacio Σ_t , de manera que para cada t y para cualquier par de puntos $P, Q \in \Sigma_t$, existe una isometría que traslada P a Q .

Se puede demostrar que un modelo de espacio-tiempo espacialmente isotrópico respecto a todo punto resulta también espacialmente homogéneo (la inversa no es válida). En este caso, las hipersuperficies homogéneas tipo espacio Σ_t resultan ortogonales a los vectores tangentes u^a de las líneas de mundo de los sistemas de referencia isotrópicos. Esto implica que en estos modelos la topología de la variedad \mathcal{M} es $\Sigma \times \mathbb{R}$, donde Σ denota el conjunto de hipersuperficies tipo espacio Σ_t y \mathbb{R} el conjunto de valores del parámetro t . En la Fig. (B.1) mostramos un esquema de esta topología (Wald 1984).

Los sistemas de referencia fundamentales de los modelos de FLRW son los sistemas de referencia llamados isotrópicos. Es posible definir un sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) comóvil a estos sistemas, para el cual el elemento de línea de la métrica $g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}}$ toma la

²Una isometría es una simetría de la métrica, i.e. un difeomorfismo que deja invariante al tensor métrico.

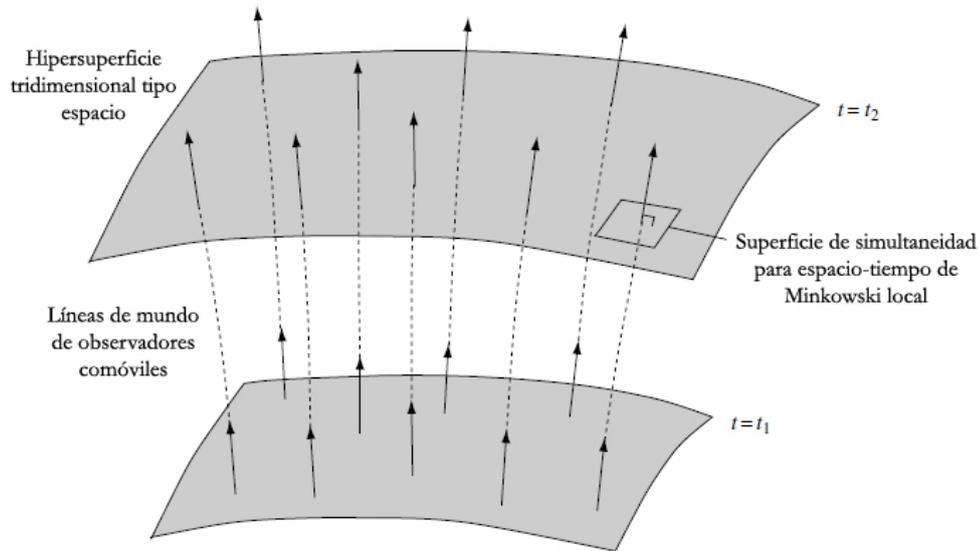


Figura B.1: Esquema de la topología $\Sigma \times \mathbb{R}$. Cada hipersuperficie tridimensional tipo espacio Σ_t define una coordenada temporal $t \in \mathbb{R}$.

forma siguiente:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (\text{B.1})$$

donde $k = -1, 0, 1$ es una constante que define la curvatura (constante) de las hipersuperficies tipo espacio Σ_t y $R(t)$ es una función indeterminada del tiempo cósmico t llamada *factor de escala*. La curvatura del universo puede implicar que éste sea abierto ($k = -1$), plano ($k = 0$), o cerrado ($k = 1$).

Es conveniente definir el factor de escala normalizado $a(t)$ como

$$a(t) := \frac{R(t)}{R(t_0)}, \quad (\text{B.2})$$

donde t_0 es algún tiempo de referencia (por ejemplo el tiempo actual); de esta manera, $a(t_0) = 1$.

La caracterización de un modelo cosmológico requiere además una representación física del contenido de materia en el universo. En los modelos de **FLRW**, el contenido total de materia debe comportarse como un fluido perfecto, y por ende estar representado por un tensor de energía-impulso de la forma

$$T_{\mu\nu}^{\text{FLRW}} = \frac{1}{c^2} [\rho(t) + p(t)] u_\mu u_\nu + p(t) g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.3})$$

donde $\rho(t)$ es la densidad de energía, $p(t)$ la presión y u^μ la cuadrivelocidad del fluido.

Para estudiar la dinámica de los universos de **FLRW** —la cual está determinada completamente por el factor de escala $a(t)$ — recurrimos a las *ecuaciones de Einstein*. Reemplazando en éstas las cantidades (B.3) y (B.1) se obtienen, en principio, diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Sin embargo, debido a las simetrías de estos espacio-tiempos, sólo dos de ellas son independientes:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho + \frac{c^2 k}{[R(t_0)a]^2} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Éstas son las llamadas *ecuaciones de Friedmann*.

Por otro lado, de la conservación del tensor de energía-impulso de la materia, $\nabla_\mu T_{\text{FLRW}}^{\mu\nu} = 0$, resulta

$$\dot{\rho} + \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Esta ecuación no es independiente; puede obtenerse eliminando \ddot{a} en las ecuaciones de Friedmann. Luego, es posible utilizar dos cualesquiera de las Ecs. (B.4), (B.5) y (B.6) para determinar completamente el factor de escala $a(t)$.

Finalmente, notemos que la densidad de energía y la presión de un fluido están relacionadas por su ecuación de estado. En cosmología, es usual asumir que cada componente del fluido cósmico tiene una ecuación de estado de la forma

$$p = w\rho, \quad (\text{B.7})$$

donde w es una constante³. Luego, la Ec. (B.6) puede ser reescrita como

$$\frac{d(\rho a^3)}{da} = -3w\rho a^2. \quad (\text{B.8})$$

La solución a esta ecuación es

$$\rho = \rho(t_0)a^{-3(1+w)}. \quad (\text{B.9})$$

En un caso general, el fluido cósmico está compuesto por varias componentes. Si suponemos que éstas no interactúan entre sí, el tensor de energía-impulso del fluido es simplemente

$$T^{\mu\nu} = \sum_i (T_i)^{\mu\nu}, \quad (\text{B.10})$$

donde i indica las distintas componentes. Si cada componente es modelada como un fluido perfecto, entonces

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{1}{c^2} (\rho_i + p_i) u^\mu u^\nu - p_i g^{\mu\nu} \right] = \sum_i \frac{1}{c^2} (\rho_i + p_i) u^\mu u^\nu - \left(\sum_i p_i \right) g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.11})$$

Luego, el fluido compuesto puede, en sí mismo, ser modelado como un fluido perfecto con

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad \text{y} \quad p = \sum_i p_i. \quad (\text{B.12})$$

Más aún, como asumimos que las componentes del fluido son no-interactuantes, la conservación del tensor de energía-impulso se cumple separadamente para cada componente:

$$\nabla_\mu (T_i)^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, si cada fluido obedece una ecuación de estado de la forma $p_i = w_i \rho_i$, su densidad de energía evoluciona según

$$\rho_i \propto a^{-3(1+w_i)}. \quad (\text{B.14})$$

³En modelos cosmológicos más exóticos w puede ser función del tiempo cósmico t .

B.1.1. Algunas soluciones analíticas

Es usual en cosmología definir los parámetros adimensionales

$$\Omega_i(t) := \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \rho_i(t), \quad \Omega_k(t) := -\frac{c^2 k}{H^2(t) R^2(t)}, \quad (\text{B.15})$$

donde i indica las distintas componentes de materia, y hemos definido $H(t) := \dot{R}(t)/R(t)$. Luego, definiendo $\Omega := \sum_i \Omega_i$, podemos reescribir la Ec. (B.5) como

$$1 = \Omega(t) + \Omega_k(t). \quad (\text{B.16})$$

Notamos que el valor de Ω determina la curvatura del espacio-tiempo. En efecto,

$$\begin{aligned} \Omega < 1 &\iff \Omega_k > 0 \iff k = -1 \text{ (universo abierto),} \\ \Omega = 1 &\iff \Omega_k = 0 \iff k = 0 \text{ (universo plano),} \\ \Omega > 1 &\iff \Omega_k < 0 \iff k = +1 \text{ (universo cerrado).} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Más aún, el signo de Ω_k no puede cambiar en el tiempo, es decir que el universo no puede cambiar la curvatura durante su evolución.

Para finalizar, resolvemos las ecuaciones de Friedmann para un universo plano ($\Omega_k = 0$) en dos casos: dominado por materia tipo polvo ($p_M = 0$) y dominado por radiación ($p_R = \rho_R/3$).

- Universo plano dominado por materia tipo polvo ($\Omega = \Omega_M = 1$)

De la Ec. (B.9) resulta

$$\rho_M(t) = \frac{\rho_M(t_0)}{[a(t)]^3}. \quad (\text{B.18})$$

Reemplazando la expresión anterior en la Ec. (B.16) y resolviendo, obtenemos

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}, \quad (\text{B.19})$$

donde $H_0 = H(t_0)$.

- Universo plano dominado por radiación ($\Omega = \Omega_R = 1$)

De la Ec. (B.9) resulta

$$\rho_R(t) = \frac{\rho_R(t_0)}{[a(t)]^4}. \quad (\text{B.20})$$

Reemplazando la expresión anterior en la Ec. (B.16) y resolviendo, obtenemos

$$a(t) = (2H_0 t)^{1/2}. \quad (\text{B.21})$$

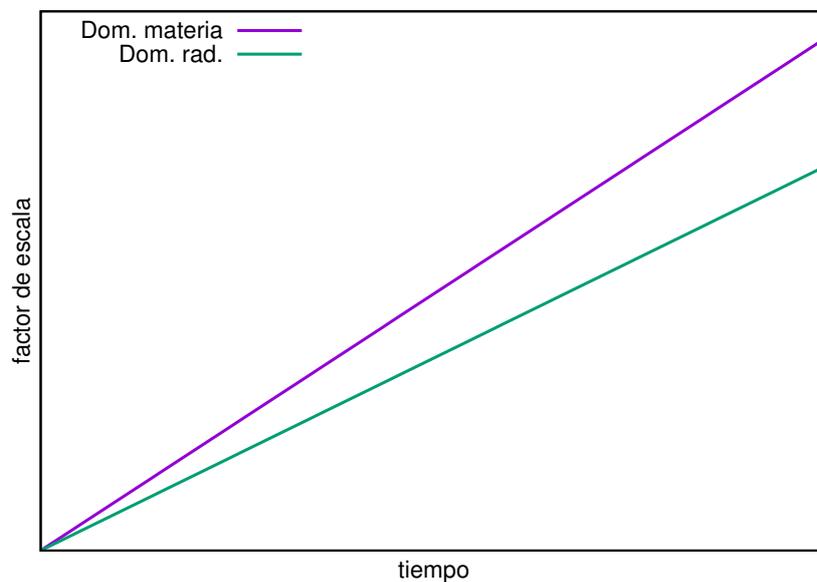
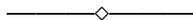


Figura B.2: Evolución del factor de escala para universos planos dominados por materia y por radiación (en escala logarítmica).

En la Fig. (B.2) mostramos la evolución del factor de escala en estos dos casos.



Los modelos de **FLRW** no son modelos completamente realistas del universo ya que, debido a sus simetrías, no pueden representar las inhomogeneidades asociadas con las estructuras astronómicas que observamos. Sin embargo, sirven como modelos de fondo sobre los cuales pueden construirse modelos cosmológicos más realistas.

Apéndice C

Método de resolución numérica

En el Cap. 4 deducimos el sistema de ecuaciones que rige la evolución cosmológica del universo temprano en nuestro modelo. En general, estas ecuaciones dependerán de la forma específica que se adopte para la distribución inicial de masas de los PBHs. Para una distribución tipo ley de potencia en las masas,

$$N_0(m) = Am^{-\alpha}, \quad (\text{C.1})$$

elegimos “discretizar” la población de PBHs, esto es considerar que la misma está compuesta de N “bloques” monoenergéticos (i.e., subpoblaciones de agujeros negros de la misma masa) que satisfacen separadamente la Ec. (C.1). Luego, la densidad inicial de PBHs en el bloque i es

$$N_i(t_0) = N_0(M_i) = AM_i^{-\alpha}, \quad (\text{C.2})$$

donde t_0 es el tiempo inicial y M_i es la masa de los PBHs en el bloque i . Cada bloque evoluciona, de manera independiente, igual que una población de PBHs monoenergética como la discutida en la Sec. 4.2.1. En particular, todos los PBHs de un mismo bloque se evaporan simultáneamente. De esta manera, si la densidad inicial de PBHs de masa $M_i(t_0)$ es $N_i(t_0)$, a un tiempo t_k posterior ésta será

$$N_i(t_k) = \begin{cases} N_i(t_0)a(t_k)^{-3}, & \text{si } M_i(t_k) > 0, \\ 0, & \text{si } M_i(t_k) = 0, \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

donde $M_i(t_k)$ y $a(t_k)$ son, respectivamente, la masa y el factor de escala del espacio-tiempo al tiempo t_k . Luego, la densidad de energía del gas de PBHs al tiempo t_k es

$$\rho_{\text{PBH}}(t_k) = \sum_{i=1}^N N_i(t_k)M_i(t_k)c^2. \quad (\text{C.4})$$

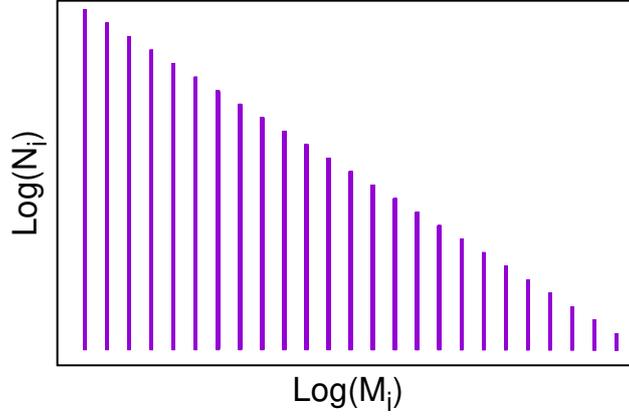


Figura C.1: Distribución tipo ley de potencias para las masas de PBHs, discretizada de manera que esté compuesta por N bloques de masas M_i , con $i = 1, \dots, N$.

De esta manera, a partir de la evolución de la masa de cada “bloque” obtenemos la evolución de la densidad de energía del gas de PBHs. En un intervalo de tiempo (t_{k-1}, t_k) esta cantidad varía a causa de la expansión del universo y de la interacción de los PBHs con la radiación. Podemos calcular la variación debida sólo al segundo de estos mecanismos como

$$\Delta\rho_{\text{PBH}}(t_k) = \rho_{\text{PBH}}(t_k) - \rho_{\text{PBH}}(t_{k-1}) \left[\frac{a(t_{k-1})}{a(t_k)} \right]^3. \quad (\text{C.5})$$

Por otro lado, la energía perdida (ganada) por el gas de PBHs debido a la interacción es, a su vez, ganada (perdida) por la radiación. Luego, teniendo en cuenta que la densidad de energía de la radiación disminuye más rápido que la del gas de PBHs debido a la expansión, resulta

$$\rho_{\text{R}}(t_k) = [\rho_{\text{R}}(t_{k-1}) - \Delta\rho_{\text{PBH}}(t_k)] \left[\frac{a(t_{k-1})}{a(t_k)} \right]^4. \quad (\text{C.6})$$

Finalmente, el factor de escala lo calculamos como

$$a(t_k) = a(t_{k-1}) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t_{k-1}} \Delta t_k + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t_{k-1}} \Delta t_k^2, \quad (\text{C.7})$$

donde $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ y las derivadas primera y segunda del factor de escala se obtienen evaluando las ecuaciones de Friedmann (B.4) y (B.5) al tiempo t_{k-1} .

Bibliografía

- Ade, P. A. R. et al. 2016, *Astron. Astrophys.*, 594, A20
- Afshordi, N., McDonald, P., & Spergel, D. N. 2003, *Astrophys. J.*, 594, L71
- Alexander, S. & Meszaros, P. 2007
- Bahcall, J. N., Hut, P., & Tremaine, S. 1985, *Astrophys. J.*, 290, 15
- Bardeen, J. M., Carter, B., & Hawking, S. W. 1973, *Commun. Math. Phys.*, 31, 161
- Barnacka, A., Glicenstein, J. F., & Moderski, R. 2012, *Phys. Rev.*, D86, 043001
- Barrow, J. D., Copeland, E. J., & Liddle, A. R. 1991, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 253, 675
- Barrow, J. D., Copeland, E. J., & Liddle, A. R. 1992, *Phys. Rev.*, D46, 645
- Bekenstein, J. D. 1973, *Phys. Rev.*, D7, 2333
- Bird, S., Peiris, H. V., Viel, M., & Verde, L. 2011, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 413, 1717
- Borunda, M. & Masip, M. 2010, *JCAP*, 1001, 027
- Brevik, I. H. & Halnes, G. 2003, *Phys. Rev.*, D67, 023508
- Bugaev, E. V., Elbakidze, M. G., & Konishchev, K. V. 2003, *Phys. Atom. Nucl.*, 66, 476, [*Yad. Fiz.*66,504(2003)]
- Bugaev, E. V. & Konishchev, K. V. 2002, *Phys. Rev.*, D66, 084004
- Bunge, M. 1979, *Treatise on Basic Philosophy: Ontology II: A World of Systems*, *Treatise on Basic Philosophy* (Springer Netherlands)
- Calmet, X., Carr, B., & Winstanley, E. 2013, *Quantum Black Holes*, *SpringerBriefs in Physics* (Springer Berlin Heidelberg)

- Camenzind, M. 2007, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*, Astronomy and Astrophysics Library (Springer Berlin Heidelberg)
- Canizares, C. R. 1982, *Astrophys. J.*, 263, 508
- Carr, B., Kuhnel, F., & Sandstad, M. 2016a, *Phys. Rev.*, D94, 083504
- Carr, B. J. 1975, *Astrophys. J.*, 201, 1
- Carr, B. J. 1977, *Astron. Astrophys.*, 56, 377
- Carr, B. J. & Hawking, S. W. 1974, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 168, 399
- Carr, B. J., Kohri, K., Sendouda, Y., & Yokoyama, J. 2010, *Phys. Rev.*, D81, 104019
- Carr, B. J., Kohri, K., Sendouda, Y., & Yokoyama, J. 2016b, *Phys. Rev.*, D94, 044029
- Carr, B. J. & Lidsey, J. E. 1993, *Phys. Rev.*, D48, 543
- Carr, B. J. & Rees, M. J. 1984, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 206, 801
- Carr, B. J. & Sakellariadou, M. 1999, *Astrophys. J.*, 516, 195
- Casares, J. 2007, *IAU Symp.*, 238, 3
- Chaname, J. & Gould, A. 2004, *Astrophys. J.*, 601, 289
- Chapline, G. F. 1975, *Nature*, 253, 251
- Choptuik, M. W. 1993, *Phys. Rev. Lett.*, 70, 9
- Crawford, M. & Schramm, D. N. 1982, *Nature*, 298, 538
- Dolgov, A. D., Naselsky, P. D., & Novikov, I. D. 2000, Submitted to: *Phys. Rev. D*
- Düchting, N. 2004, *Phys. Rev. D*, 70, 064015
- Ellis, G., Maartens, R., & MacCallum, M. 2012, *Relativistic Cosmology*, Relativistic Cosmology (Cambridge University Press)
- Eroshenko, Y. N. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.04932
- Frolov, V. & Novikov, I. 1997, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Fundamental Theories of Physics (Springer Netherlands)

- Frolov, V. P. & Zelnikov, A. 2011, Introduction to black hole physics (Oxford: Oxford Univ. Press)
- Gould, A. 1992, *Astrophys. J.*, 386, L5
- Green, A. M. 2015, *Fundam. Theor. Phys.*, 178, 129
- Green, A. M. & Liddle, A. R. 1999, *Phys. Rev.*, D60, 063509
- Halzen, F., Zas, E., MacGibbon, J. H., & Weekes, T. C. 1991, *Nature*, 353, 807
- Hawking, S. 1971, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 152, 75
- Hawking, S. & Ellis, G. 1973, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press)
- Hawking, S. W. 1974, *Nature*, 248, 30
- Hawking, S. W. 1987, *Phys. Lett.*, B231, 237
- Hawking, S. W., Moss, I. G., & Stewart, J. M. 1982, *Phys. Rev.*, D26, 2681
- He, P. & Fang, L.-Z. 2002, *Astrophys. J.*, 568, L1
- Henry, R. C. 2000, *Astrophys. J.*, 535, 350
- Hlozek, R. et al. 2012, *Astrophys. J.*, 749, 90
- Israel, W. 1986, *Phys. Rev. Lett.*, 57, 397
- Jedamzik, K. & Niemeyer, J. C. 1999, *Phys. Rev.*, D59, 124014
- Josan, A. S. & Green, A. M. 2010, *Phys. Rev.*, D82, 047303
- Khlopov, M., Malomed, B. A., & Zeldovich, I. B. 1985, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 215, 575
- Kiraly, P., Szabelski, J., Wdowczyk, J., & Wolfendale, A. W. 1981, *Nature*, 293, 120
- Kribs, G. D., Leibovich, A. K., & Rothstein, I. Z. 1999, *Phys. Rev.*, D60, 103510
- Lemoine, M. 2000, *Physics Letters B*, 481, 333
- MacGibbon, J. H. 1987, *Nature*, 329, 308

- MacGibbon, J. H. & Carr, B. J. 1991, *Astrophys. J.*, 371, 447
- McVittie, G. C. 1933, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 93, 325
- Meszaros, P. 1975, *Astron. Astrophys.*, 38, 5
- Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J. 1973, *Gravitation*, Gravitation No. pt. 3 (W. H. Freeman)
- Musco, I. & Miller, J. C. 2013, *Class. Quant. Grav.*, 30, 145009
- Niemeyer, J. C. & Jedamzik, K. 1998, *Phys. Rev. Lett.*, 80, 5481
- Novello, M. & Bergliaffa, S. E. P. 2008, *Phys. Rept.*, 463, 127
- Page, D. N. & Hawking, S. W. 1976, *Astrophys. J.*, 206, 1
- Peiris, H. V. & Easther, R. 2008, *JCAP*, 0807, 024
- Polnarev, A. & Zembowicz, R. 1991, *Phys. Rev.*, D43, 1106
- Press, W. H. & Gunn, J. E. 1973, *Astrophys. J.*, 185, 397
- Rich, J. 2010, *Fundamentals of Cosmology* (Springer Berlin Heidelberg)
- Romero, G. & Vila, G. 2014, *Introduction to Black Hole Astrophysics*, *Lecture Notes in Physics* (Springer Berlin Heidelberg)
- Sasaki, M., Suyama, T., Tanaka, T., & Yokoyama, S. 2016, *Phys. Rev. Lett.*, 117, 061101
- Shibata, M. & Sasaki, M. 1999, *Phys. Rev.*, D60, 084002
- Vainer, B. V., Dryzhakova, O. V., & Naselskii, P. D. 1978, *Soviet Astronomy Letters*, 4, 185
- Wald, R. 1984, *General Relativity* (University of Chicago Press)
- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity* (Wiley)
- Weinberg, S. 2008, *Cosmology* (OUP Oxford)
- Wilkinson, P. N., Henstock, D. R., Browne, I. W. A., et al. 2001, *Phys. Rev. Lett.*, 86, 584
- Wright, E. L. 1996, *Astrophys. J.*, 459, 487

Zeldovich, I. B. & Starobinskii, A. A. 1976, *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 24, 616

Zeldovich, I. B., Starobinskii, A. A., Khlopov, M. I., & Chechetkin, V. M. 1977, *Soviet Astronomy Letters*, 3, 110

Zel'dovich, Y. B. & Novikov, I. 1966, *Astronomicheskii Zhurnal*, 43, 758

Zimdahl, W. 1997, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 288, 665

Zimdahl, W. & Pavon, D. 1998, *Phys. Rev.*, D58, 103506