



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciado en Astronomía

EVOLUCIÓN COSMOLÓGICA DE AGUJEROS NEGROS
Y SU RELACIÓN CON LA
SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Federico Gaston Lopez Armengol

Director: Gustavo E. Romero

Co-directora: Daniela Pérez

LA PLATA, ARGENTINA

- FEBRERO DE 2015 -

A mis padres,
Bernardo y María de la Paz.

Prefacio

De niño, nunca quise dedicarme a la ciencia. Siempre me sedujeron las disciplinas artísticas. Sin embargo aquí estoy, presentando *felizmente* mi tesis de licenciatura en Astronomía.

Las oraciones anteriores pueden parecer discordantes, pero no lo son. Es verdad que hacer ciencia incluye tareas sistémicas, lógicas y controladas pero, previamente, incluye tareas guiadas por la intuición, la imaginación y la creatividad. A lo largo de esta carrera, descubrí mi pasión por estas actividades y me entusiasma saber que voy a trabajar en ellas.

Dicho esto, presento esta tesis como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Licenciado en Astronomía de la Universidad Nacional de La Plata. La misma contiene los resultados de los estudios desarrollados bajo la dirección del Dr. Gustavo E. Romero y la co-dirección de la Lic. Daniela Pérez, junto con la colaboración de otros investigadores miembros del Grupo de Astrofísica Relativista y Radioastronomía.

Federico Gaston Lopez Armengol.
e-mail: fedela@carina.fcaglp.unlp.edu.ar

La Plata, febrero de 2015.

Resumen

A partir de enunciados de leyes invariantes ante inversión y traslación temporal, resultan procesos macroscópicos irreversibles. La fuente de irreversibilidad no se encuentra en las leyes mismas sino en las condiciones de borde o iniciales que exigimos a las ecuaciones que representan las leyes. En este trabajo, proponemos que el apantallamiento de corrientes electromagnéticas por el horizonte de eventos de un agujero negro en las soluciones a las ecuaciones de Maxwell determina, localmente, una dirección preferencial temporal para el flujo de energía electromagnética que sigue a la expansión del universo. Específicamente, calculamos el crecimiento del área del horizonte de eventos de un agujero negro debido a la expansión del universo y a la acreción de fotones del fondo cósmico de microondas (CMB), para distintos modelos cosmológicos. Encontramos que, para los modelos cosmológicos de Friedmann plano, abierto y cerrado, el cociente entre el área del horizonte de eventos de un agujero negro y el área de una hipersuperficie de tipo espacio comóvil a la expansión cósmica, es siempre mayor que uno. Esto implica que, para cualquier evento, el pasado y futuro causal no son simétricos, generando un flujo de energía electromagnética no nulo hacia el futuro global que sigue la expansión del universo; relacionamos este flujo electromagnético con la segunda ley de la Termodinámica.

Abstract

Macroscopic irreversible processes emerge from fundamental physical laws of reversible character. The source of the local irreversibility observed, seems not to be in the laws themselves but in the initial and boundary conditions of the equations that represent the laws. In this work we propose that the screening of electromagnetic currents by black hole event horizons in the solution of Maxwell's equations determines, locally, a preferred temporal direction for the flux of electromagnetic energy that follows the expansion of the universe. Specifically, we calculate the growth of black hole event horizons due to the cosmological expansion and accretion of cosmic microwave background radiation, for different cosmological models. We find that for the flat, open, and closed Friedmann cosmological models, the quotient of the area of the black hole event horizon and the area of a comoving space-like hypersurface is always larger than one. This implies that for any spacetime event, its causal past and future are not symmetric, causing a preferred direction for the electromagnetic energy flux in the global future direction; the latter is in turn related to the ever increasing thermodynamic entropy.

Agradecimientos

No podría haber terminado esta carrera sin la ayuda y apoyo de ciertas personas a las que quiero agradecer explícitamente.

Le agradezco a mi profesor consejero y director, Gustavo, por darme la posibilidad de contribuir en un tema que me apasiona como es el de la “flecha del tiempo”; me siento muy afortunado al respecto. También le agradezco las valiosas sugerencias y consejos de toda índole que me ha dado en estos últimos cuatro años. Ha sido una persona fundamental en mi formación universitaria y, afortunadamente, lo seguirá siendo en mi formación profesional. Le agradezco a mi co-directora, Daniela, por la excelente predisposición con la que ha sabido resolver todos mis problemas, preguntas y dudas respecto a esta tesis. Le agradezco también la paciencia con la que ha leído y corregido tantas veces cada capítulo. Mi experiencia de trabajo con ustedes ha sido muy amena y espero se repita muchas veces.

Le agradezco a todas las personas que trabajan en el Observatorio por generar un lugar propicio y agradable para una excelente formación académica y humana del estudiante. En particular, le agradezco al profesor Pablo Cincotta por atender mis crisis vocacionales en los primeros años de carrera. También, en esta facultad, he conocido personas y formado amistades que valoro profundamente y espero mantener el resto de mi vida. A ellas les agradezco todos los momentos inolvidables que compartimos y por hacer de esta etapa una de las mejores de mi vida. Entre estas personas que conocí, hay una sumamente especial e importante para mí, con la que hemos compartido *todo* en estos años, que siempre me escucha, me entiende y me ofrece un apoyo fundamental. Ella es Carolina, a quien le agradezco por quererme tanto tal cual soy, por su compañía fiel, sincera y divertida, por su admirable forma de ser y por permitirme ser parte de su vida.

Fuera del ámbito académico, quiero agradecer a quienes me formaron como persona. A mi familia, principalmente a mis padres, gracias por el apoyo en estos años de estudio y por el cariño de todos los días. A mis amigos, los de siempre, gracias por una amistad verdadera que se mantiene intacta a través del tiempo y me hace tanto bien.

Índice

Prefacio	v
Resumen	vii
Abstract	ix
Agradecimientos	xi
1. Introducción	3
2. Leyes fundamentales invariantes ante inversión y traslación temporal	9
2.1. Electrodinámica	10
2.2. La Teoría de la Relatividad General	12
3. Asimetrías temporales en física	15
3.1. El teorema-H	16
3.1.1. La función de Boltzmann	16
3.1.2. La segunda ley de la Termodinámica	17
3.1.3. Caos molecular	18
3.2. Modelos cosmológicos de Friedmann	19
3.2.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	19
3.2.2. El fluido cosmológico	22
3.2.3. Asimetrías temporales en los modelos de Friedmann	25
4. Agujeros negros cosmológicos acretantes	29
4.1. Agujero negro de Schwarzschild	29
4.2. Agujeros negros cosmológicos	35
4.3. Acreción del fondo cósmico de microondas	36

4.3.1. Acreción de radiación térmica	36
4.3.2. Aplicación al fondo cósmico de microondas	39
4.4. El factor de llenado	40
5. Resultados	43
5.1. Parámetros cosmológicos	43
5.2. Acreción de fotones del CMB por agujero negro supermasivo	46
5.3. Cálculo del factor de llenado	46
5.4. Agujeros negros y Electrodinámica	48
6. Conclusiones	53
A. La propuesta de Hawking-Hayward	55
Bibliografía	58

Capítulo 1

Introducción

El mundo se constituye por cosas concretas que tienen propiedades. La ciencia teórica, sin embargo, no trabaja con cosas sino con conceptos que las representan.

Representamos al *mundo* M con un conjunto cuyos elementos x designan *cosas*. Cada *propiedad* p_i de las cosas puede ser representada por una función proposicional de dominio M , tal que $x \mapsto p_i(x)$. Las *funciones de estado* $s(x)$ son funciones proposicionales de dominio M tales que $x \mapsto (p_1(x), \dots, p_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$.

Definimos el *espacio de estados* $S(x)$ como el conjunto de todos los estados posibles $(p_1(x), \dots, p_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, de una cosa x . Llamamos *leyes* a las restricciones sobre los estados posibles de una cosa y definimos el *espacio de estados legales* $S_L(x)$ como el conjunto de estados permitidos de una cosa. Las leyes no implican lo que va a ocurrir sino lo que es posible (Bunge, 1967, p. 44).

En las ciencias naturales exactas, algunas propiedades pueden ser representadas con funciones matemáticas (i. e. masa, carga eléctrica). Consecuentemente, ciertas leyes físicas pueden ser representadas por relaciones matemáticas. Las cosas concretas no tienen propiedades matemáticas intrínsecas, sólo nuestros modelos conceptuales de ellas pueden tenerlas. El mundo no es matemático, nuestra idea de él puede serlo (Bunge, 1977, p. 118).

Los enunciados de leyes físicas pertenecen (idealmente) a un sistema hipotético-deductivo semánticamente interpretado. Podemos diferenciar dos tipos de leyes: *fundamentales* y *derivables*. Mientras que una teoría física contiene un número finito de enunciados de leyes fundamentales incluidas en sus axiomas, también contiene todos los enunciados derivables que de ellos se deduzcan (Ver Bunge, 1977, p. 151).

Todas las representaciones matemáticas de las leyes fundamentales de la física son invariantes ante inversión y traslación temporal. Los procesos macroscópicos, sin embargo,

no reflejan estas invarianzas. Por ejemplo: envejecemos pero no rejuvenecemos; la temperatura media del universo disminuye; el desorden siempre aumenta.

Los procesos asimétricos en el tiempo mencionados pueden explicarse en términos de otros más fundamentales. Basados en el trabajo de Roger Penrose (1979), proponemos los siguientes procesos asimétricos fundamentales, o “flechas del tiempo”¹ (ver Savitt, 1995, p. 4):

1. *La segunda ley de la Termodinámica*: la entropía de sistemas físicos aislados crece hasta alcanzar un valor máximo.
2. *La flecha de radiación*: consideramos potenciales retardados, nunca avanzados, a pesar de estar ambos permitidos por las ecuaciones de Maxwell.
3. *La expansión del universo*: incluye procesos asimétricos como la disminución de la temperatura media universal o la recesión de galaxias lejanas.
4. *La formación de agujeros negros*: los agujeros negros y blancos son soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein de la Teoría de la Relatividad General. No obstante, sólo los primeros parecen existir.

Siendo las leyes fundamentales invariantes ante inversión y traslación temporal, ¿cuál es el origen de la irreversibilidad en las llamadas “flechas del tiempo”? ¿Existen relaciones entre ellas?

Debido a su indiscutible validez y a la vastedad de fenómenos que explica, nos interesamos particularmente en la “flecha termodinámica”. En palabras de Sir Arthur S. Eddington (1928, p. 74):

“[...] si encuentras que tu teoría va en contra de la segunda ley de la Termodinámica no puedo darte esperanza; no le queda más que colapsar en la más profunda humillación”.

En 1872, Ludwig Boltzmann demostró que el movimiento aleatorio de las moléculas en un gas (caos molecular) ocasiona que la entropía del mismo aumente hasta su valor máximo (Boltzmann, 1872, 1877). Ciertamente, al suponer caos molecular los microestados

¹La expresión “flecha del tiempo” es formalmente incorrecta ya que el tiempo no es un vector, sino un parámetro. El tiempo no es asimétrico, los procesos que parametriza pueden serlo (Horwich, 1987).

compatibles con un dado macroestado son equiprobables. El número de microestados y la entropía del sistema satisfacen la ecuación de Boltzmann:

$$S = k_B \ln W, \quad (1.1)$$

donde $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann y W es el volumen del espacio de estados que se corresponde con el macroestado de entropía S . Boltzmann demostró que los macroestados de baja entropía se corresponden con relativamente pocos microestados y, consecuentemente, son poco probables. El sistema evolucionará al macroestado compatible con la mayor cantidad de microestados, es decir, al macroestado de mayor entropía. Este es el famoso *Teorema-H*.

En 1894, Samuel Burbury señaló que la irreversibilidad del Teorema-H se origina en la hipótesis de *caos molecular* (Burbury, 1894, 1895). En efecto, Boltzmann supone que las velocidades de las moléculas son independientes antes de cada colisión pero no posteriormente. Las colisiones entre partículas, en verdad, generan correlaciones futuras que Boltzmann ignora; los microestados posibles no son equiprobables (ver Price, 1996, p. 18). El argumento de Burbury es notable pues muestra que el incremento de la entropía es una consecuencia de las *condiciones iniciales* impuestas al estado del sistema. Boltzmann, más tarde, reconocería este hecho (Boltzmann, 1895).

En el presente trabajo, suponemos que la irreversibilidad en las “flechas del tiempo” tiene su origen en *condiciones iniciales cosmológicas*. Si aceptamos esta hipótesis, dos problemas se presentan: 1) ¿cuáles fueron exactamente estas condiciones? y 2) ¿es posible que condiciones iniciales globales puedan ocasionar la irreversibilidad local observada en todo tiempo y lugar?

Respecto al primer problema, suponemos que las condiciones iniciales cosmológicas deben corresponderse con estados de baja entropía. En palabras de Price (2004, p. 219): “La baja entropía en nuestra región parece estar asociada completamente con condiciones de baja entropía en el pasado”; esta es la Hipótesis del Pasado. Sin embargo, en el pasado, la materia y la radiación se encontraban en equilibrio térmico, maximizando la entropía termodinámica. Para explicar la baja entropía inicial, Penrose sugirió (Penrose, 1979) asignarle entropía al campo gravitatorio. Ciertamente, aunque la radiación y la materia se encontraban localmente en equilibrio térmico, el campo gravitacional se encontraba globalmente fuera de equilibrio pues la gravedad es una fuerza atractiva y el universo carecía de estructura. Es decir, la baja entropía inicial estaba dominada por la entropía del campo gravitatorio. Desde el trabajo de Penrose (1979), distintos autores han intentado

definir estimadores de la entropía gravitacional pero el tema se mantiene en discusión (ver Rudjord, et al., 2008; Clifton, et al., 2013; Romero, et al., 2012; Perez & Romero, 2014).

En ausencia de una teoría cuántica de la gravedad, no podemos dar detalles de las condiciones iniciales inferidas. De todas formas, suponemos que estas condiciones globales son responsables de la irreversibilidad en las “flechas del tiempo” de naturaleza gravitatoria, como la expansión del universo y la existencia de agujeros negros. Aceptando esta hipótesis, afrontamos el segundo problema.

Sugerimos que existe una relación global-local entre las “flechas del tiempo” globales de naturaleza gravitatoria y los procesos irreversibles locales que percibimos. Estos últimos se deben principalmente a interacciones electromagnéticas. Luego, debería existir un acople entre el campo gravitatorio y el campo electromagnético que determina el sentido de los procesos locales. El objetivo de este trabajo es mostrar esta relación. Para ello, estudiaremos los llamados *agujeros negros cosmológicos* que son sistemas físicos sensibles a la expansión del universo.

En esta tesis, calculamos el crecimiento del área del horizonte de eventos de un agujero negro debido a la expansión del universo y debido a la inevitable acreción de fotones del fondo cósmico de microondas (CMB). Para los modelos cosmológicos de Friedmann, encontramos que este crecimiento supera al de una hipersuperficie esférica de tipo espacio en expansión cosmológica. El incremento del área del horizonte de eventos en los modelos de Friedmann conlleva a la acreción de partículas cargadas y corriente electromagnética. El apantallamiento de corrientes electromagnéticas en el tiempo cósmico por el horizonte de eventos de un agujero negro determina, localmente, una dirección preferencial de flujo electromagnético que sigue a la expansión del universo. Asociamos este flujo electromagnético hacia el futuro global con la “flecha de radiación” y lo relacionamos con la “flecha termodinámica” por medio de la ley de Stefan-Boltzmann. Este trabajo es una extensión del ya realizado por Romero y Pérez (2011) para universos en expansión acelerada.

El trabajo se presenta con la siguiente estructura: en el Capítulo 2 mostraremos que las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica y de la Teoría de la Relatividad General son invariantes ante inversión y traslación temporal. En el Capítulo 3 mostraremos cómo pueden obtenerse resultados asimétricos en el tiempo desde teorías reversibles. Demostraremos el Teorema-H en el marco de la Mecánica Estadística Clásica y obtendremos las soluciones llamadas modelos cosmológicos de Friedmann desde la Teoría de la Relatividad General. En el Capítulo 4 analizaremos los procesos a los que está sometido un agujero negro de Schwarzschild en un contexto de evolución cosmológica. Este sistema físico nos

permitirá vincular las distintas “flechas del tiempo”. En el Capítulo 5 aplicaremos los resultados obtenidos a los modelos cosmológicos de Friedmann. Finalmente, en el Capítulo 6, presentaremos las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Leyes fundamentales invariantes ante inversión y traslación temporal

Una ecuación de movimiento es *invariante ante inversión temporal* si la forma de la ecuación no cambia ante la transformación $t \rightarrow -t$. Como consecuencia, dada una solución $f(t)$, $f(-t)$ también es solución. Análogamente, una ecuación de movimiento es *invariante ante traslación temporal* si su forma no cambia ante la transformación $t \rightarrow t + t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Esto implica que, dada una solución $f(t)$, $f(t + t_0)$ también es solución. En este capítulo mostraremos que, en efecto, las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica y de la Teoría de la Relatividad General son invariantes ante inversión y traslación temporal.

Es importante distinguir claramente los siguientes conceptos (ver Bunge, 1967):

1. **Covarianza general:** Un enunciado de conceptos primitivos de una teoría física ¹ es *covariante general* si se mantiene verdadero ante una transformación de coordenadas arbitraria con Jacobiano no nulo.
2. **Invarianza general:** Un enunciado de conceptos primitivos de una teoría física es *invariante general* si no cambia ante una transformación de coordenadas arbitraria

¹Llamamos *conceptos primitivos* a los conceptos fundamentales de una teoría. Son los conceptos en los cuales se basan sus definiciones y postulados. Ninguna teoría incluye definiciones de sus conceptos primitivos, aunque otras teorías complementarias pueden hacerlo. Algunos ejemplos de conceptos primitivos de la Teoría de la Relatividad General son: una variedad cuadridimensional diferenciable o el conjunto de sistemas de referencia.

con Jacobiano no nulo.

Trabajaremos con las formulaciones *covariantes general* de la Electrodinámica y de la Teoría de la Relatividad General para estudiar sus *invarianzas*.

En la primer sección expresaremos las ecuaciones de Maxwell en forma covariante general, en el espacio-tiempo de Minkowski. Definiremos el difeomorfismo o transformación de coordenadas *inversión temporal* T , lo aplicaremos a las ecuaciones y mostraremos que estas se mantienen invariantes. Finalmente, mostraremos que las ecuaciones también se mantienen invariantes ante el difeomorfismo traslación temporal.

En la segunda sección presentaremos las ecuaciones de campo de Einstein de la Teoría de la Relatividad General en forma covariante general y mostraremos que son *invariantes general*; es decir, las ecuaciones fundamentales de la teoría de la Relatividad General son invariantes ante difeomorfismos generales. En particular, las ecuaciones son invariantes ante el difeomorfismo de inversión y traslación temporal.

2.1. Electrodinámica

Las ecuaciones de Maxwell en el espacio-tiempo de Minkowski (\mathbb{M}^4), expresadas en forma covariante general son (ver Hobson, 2006, p. 143):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} &= -\frac{4\pi}{c} j^{\nu}, \\ \nabla_{\sigma} F^{\mu\nu} + \nabla_{\nu} F^{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} F^{\nu\sigma} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde ∇_{μ} denota derivada covariante, $F_{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico de campo electromagnético, c la velocidad de la luz en el vacío, y j^{ν} la cuadridensidad de corriente electromagnética. Utilizamos la convención de signos para la métrica en coordenadas cartesianas: $\eta_{\mu\nu}^{\text{cart}} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Para demostrar que las ecuaciones 2.1 son invariantes ante inversión y traslación temporal es necesario definir una coordenada temporal t . Siendo *estático* el espacio-tiempo de Minkowski, existen sistemas de coordenadas (t, \vec{x}) donde la métrica $\eta_{\mu\nu}$ toma la forma (ver D'Inverno, 1992, p. 183):

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j, \tag{2.2}$$

con $i, j = 1, 2, 3$. Decimos que la coordenada t es temporal pues su eje coordenado coincide con un vector de Killing global tipo tiempo.

Adoptando el sistema de coordenadas (t, \vec{x}) , definimos el difeomorfismo de *inversión temporal*:

$$T : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^4, \quad x^\mu = (t, \vec{x}) \rightarrow x^{\mu'} = (-t, \vec{x}). \quad (2.3)$$

Ante esta transformación de coordenadas, las componentes de tensores contravariantes transforman como $p^{\mu'} = T^{\mu'}{}_\nu p^\nu$, donde:

$$T^{\mu'}{}_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Los tensores covariantes, en cambio, transforman como $p_{\mu'} = T_{\mu'}{}^\nu p_\nu$, donde:

$$T_{\mu'}{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Desarrollando las derivadas covariantes, la ecuaciones de Maxwell 2.1 en coordenadas arbitrarias resultan:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu} &= -\frac{4\pi}{c} j^\nu, \\ \partial_\sigma F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\sigma} F^{\mu\alpha} + \\ \partial_\nu F^{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} F^{\alpha\mu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} F^{\sigma\alpha} + \\ \partial_\mu F^{\nu\sigma} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} F^{\alpha\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} F^{\nu\alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ son los símbolos de Christoffel, simétricos en los dos últimos índices.

Aplicamos la transformación de coordenadas inversión temporal T a las ecuaciones de Maxwell 2.6. La forma tensorial de las ecuaciones se mantiene pues están expresadas en forma covariante general:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'} F^{\mu'\nu'} + \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\mu'} F^{\alpha'\nu'} &= -\frac{4\pi}{c} j^{\nu'}, \\ \partial_{\sigma'} F^{\mu'\nu'} + \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\sigma'} F^{\alpha'\nu'} + \Gamma^{\nu'}{}_{\alpha'\sigma'} F^{\mu'\alpha'} + \\ \partial_{\nu'} F^{\sigma'\mu'} + \Gamma^{\sigma'}{}_{\alpha'\nu'} F^{\alpha'\mu'} + \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'} F^{\sigma'\alpha'} + \\ \partial_{\mu'} F^{\nu'\sigma'} + \Gamma^{\nu'}{}_{\alpha'\mu'} F^{\alpha'\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}{}_{\alpha'\mu'} F^{\nu'\alpha'} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $F^{\mu'\nu'} = T^{\mu'}{}_\mu T^{\nu'}{}_\nu F^{\mu\nu}$, y $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\sigma'}$ son los símbolos de Christoffel en las nuevas coordenadas.

Comparando las ecuaciones 2.6 y 2.7 notamos que las ecuaciones de Maxwell se mantienen invariantes si y sólo si, los *símbolos de Christoffel* se mantienen invariantes ante el difeomorfismo T .

Los símbolos de Christoffel se transforman ante el difeomorfismo T según:

$$\Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\nu} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} = T_{\alpha'}^{\alpha} T_{\nu'}^{\nu} T^{\mu'}_{\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\nu}, \quad (2.8)$$

donde las componentes de $T^{\mu'}_{\mu}$ y $T_{\nu'}^{\nu}$ se muestran en 2.4 y 2.5, respectivamente. Puede comprobarse fácilmente de la última ecuación que los símbolos de Christoffel son invariantes ante el difeomorfismo de inversión temporal T , i.e. $\Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu}$.

Hemos expresado las ecuaciones de Maxwell en forma covariante general. Ante el difeomorfismo inversión temporal T las ecuaciones mantienen su forma tensorial y los símbolos de Christoffel en las ecuaciones se mantienen invariantes. Ambos hechos implican que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante inversión temporal.

Finalmente, definimos el difeomorfismo de *traslación temporal* para las coordenadas estáticas como $R : (t, \vec{x}) \rightarrow (t + t_0, \vec{x})$. Las matrices $R^{\mu'}_{\nu}$ y $R_{\mu'}^{\nu}$ asociadas coinciden con la identidad. Siendo las ecuaciones covariantes general, se mantendrán invariantes ante la transformación R . Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell también son invariantes ante traslación temporal.

2.2. La Teoría de la Relatividad General

Las ecuaciones de campo de la Teoría de la Relatividad General, expresadas en forma covariante general son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R el escalar de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica de la variedad cuatridimensional \mathcal{M} , G la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz en el vacío y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-impulso.

Si desarrollamos las ecuaciones de campo 2.9 para cierto sistema de coordenadas x^μ obtenemos (Westman, 2009):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} g^{\rho\kappa} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} \right) \left(\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) - \\ & - \frac{1}{2} g^{\rho\kappa} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \left(\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $g^{\mu\nu}(x)$ son las componentes de la matriz inversa a $g_{\mu\nu}(x)$.

Consideremos un difeomorfismo genérico:

$$\Sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad x^\mu \rightarrow x^{\mu'}. \quad (2.11)$$

Las ecuaciones de campo 2.10 en el nuevo sistema de coordenadas $x^{\mu'}$ son:

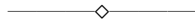
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \left[g^{\lambda'\kappa'} \left(\frac{\partial g_{\kappa'\lambda'}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial g_{\kappa'\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} - \frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\kappa'}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} \left[g^{\lambda'\kappa'} \left(\frac{\partial g_{\kappa'\nu'}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial g_{\kappa'\mu'}}{\partial x^{\nu'}} - \frac{\partial g_{\mu'\nu'}}{\partial x^{\kappa'}} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} g^{\rho'\kappa'} g^{\lambda'\sigma'} \left(\frac{\partial g_{\kappa'\lambda'}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial g_{\kappa'\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} - \frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\kappa'}} \right) \left(\frac{\partial g_{\sigma'\rho'}}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial g_{\sigma'\nu'}}{\partial x^{\rho'}} - \frac{\partial g_{\nu'\rho'}}{\partial x^{\sigma'}} \right) - \\ & - \frac{1}{2} g^{\rho'\kappa'} g^{\lambda'\sigma'} \left(\frac{\partial g_{\kappa'\nu'}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial g_{\kappa'\mu'}}{\partial x^{\nu'}} - \frac{\partial g_{\mu'\nu'}}{\partial x^{\kappa'}} \right) \left(\frac{\partial g_{\sigma'\rho'}}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial g_{\sigma'\lambda'}}{\partial x^{\rho'}} - \frac{\partial g_{\lambda'\rho'}}{\partial x^{\sigma'}} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu'\nu'}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'}(x') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}(x) = \Sigma_{\mu'}{}^\nu \Sigma_{\nu'}{}^\mu g_{\mu\nu}(x), \\ T_{\mu'\nu'}(x') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T_{\mu\nu}(x) = \Sigma_{\mu'}{}^\nu \Sigma_{\nu'}{}^\mu T_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Comparando las ecuaciones 2.10 y 2.12 notamos que las ecuaciones de campo de Einstein son invariantes ante un difeomorfismo genérico Σ , es decir son *invariantes general*.

No definiremos el difeomorfismo de inversión temporal como en la sección anterior pues el espacio-tiempo podría no ser estático. En cualquier caso, la inversión temporal es un difeomorfismo y mostramos que las ecuaciones de campo se mantienen invariantes ante un difeomorfismo genérico. Por lo tanto, las ecuaciones de campo de Einstein son invariantes ante inversión temporal. De la misma forma, podemos justificar que las ecuaciones de campo son invariantes ante el difeomorfismo de traslación temporal, o ante cualquier otro difeomorfismo que podamos definir.



En síntesis, hemos demostrado que las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de campo de Einstein son invariantes ante los difeomorfismos de inversión y traslación temporal. En este sentido decimos que la Electrodinámica y la Teoría de la Relatividad General son teorías invariantes ante inversión y traslación temporal. Curiosamente, esto no garantiza

14 *CAPÍTULO 2. INVARIANZA ANTE INVERSIÓN Y TRASLACIÓN TEMPORAL*

que los resultados que de ellas se deduzcan mantengan estas invarianzas. Este problema será abordado en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Asimetrías temporales en física

Como mencionamos en la Introducción, todas las representaciones formales de las leyes fundamentales de la física son invariantes ante inversión y traslación temporal. Sin embargo, de ellas pueden derivarse ecuaciones que no posean estas invarianzas. También pueden resultar soluciones que no sean temporalmente simétricas¹. En cualquiera de estos casos, habremos realizado *hipótesis* o exigido *condiciones iniciales temporalmente asimétricas*².

En este capítulo mostraremos cómo esto es posible con dos ejemplos. Primero deduciremos el teorema-H original, formulado por Ludwig Boltzmann en 1872 en el marco de la Mecánica Estadística Clásica, una teoría invariante ante inversión y traslación temporal. La originalidad del trabajo de Boltzmann radica en obtener una función $H_B(t)$ que no posea esas invarianzas. Haremos hincapié en la hipótesis que incluye esta asimetría temporal, a saber el *caos molecular*.

Como segundo ejemplo obtendremos las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein de la Teoría de la Relatividad General llamadas universos de Friedmann. Estas soluciones son casos particulares de los modelos de universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), una de las aplicaciones más importantes de la Teoría de la Relatividad General. Presentaremos el formalismo necesario para encontrar y analizar estas soluciones. Los modelos de Friedmann son soluciones temporalmente asimétricas (con una excepción) aunque las ecuaciones de campo de Einstein sean invariantes ante inversión y traslación temporal. Argumentaremos que la asimetría del resultado se debe al *tensor de energía-impulso* impuesto.

¹Una solución $f(t)$ es temporalmente simétrica si existe un tiempo t_S tal que $f(t_S + t) = f(t_S - t)$, para todo tiempo t .

²Ver paradoja de Loschmidt (Loschmidt, 1876).

3.1. El teorema-H

3.1.1. La función de Boltzmann

Consideramos un gas de baja densidad compuesto por N moléculas monoatómicas similares y no interactuantes. Es imposible conocer con exactitud las posiciones \vec{r}_i y velocidades \vec{v}_i de las N moléculas pues, en general, $N \gg 10^{23}$. Recurrimos entonces a un estudio estadístico.

Llamamos $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ a la función densidad de probabilidad de una partícula en el espacio de las fases³. La cantidad de partículas, en promedio, con posición $\vec{r}_i \in [\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}]$ y velocidad $\vec{v}_i \in [\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$ es igual a:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}. \quad (3.1)$$

Suponiendo homogeneidad espacial, la función densidad de probabilidad no depende de las coordenadas espaciales: $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(\vec{v}, t)$.

Dividimos el espacio de las fases en células finitas, numeradas $1, 2, 3, \dots$, con volúmenes iguales $w_1 = w_2 = w_3 = \dots$. Denotamos $N_j(t) = f(\vec{v}_j, t)w_j$ al número de moléculas cuyas coordenadas en el espacio de las fases se encuentran dentro del volumen w_j . Para todo tiempo t debe cumplirse:

$$N = \sum_j N_j, \quad (3.2)$$

$$E = \sum_j N_j \epsilon_j, \quad (3.3)$$

donde N es el número de moléculas; ϵ_j la energía promedio de los estados en la célula w_j ; E la energía total del gas.

Debido a las colisiones entre moléculas, las cantidades $N_j(t)$ cambian con el tiempo. Suponemos que las velocidades de dos partículas previas a una colisión son independientes, es decir, introducimos la hipótesis de *caos molecular*. El número de colisiones entre dos moléculas por unidad de tiempo con estados pertenecientes a las células w_i y w_j que terminan en estados pertenecientes a las células w_k y w_l es $B_{ij}^{kl} N_i N_j$, donde los coeficientes B_{ij}^{kl} cuantifican la probabilidad de dicha colisión. Debido a la simetría de estas colisiones, estos coeficientes deben cumplir: $B_{ij}^{kl} = B_{ji}^{kl} = B_{ij}^{lk}$. Suponemos también el principio

³El espacio de las fases de un sistema físico dinámico es un espacio de geometría simpléctica tal que cada uno de sus puntos representa un estado posible del sistema. Para el sistema mecánico en estudio, los estados están determinados por las posiciones \vec{q}_i y velocidades \vec{v}_i de cada molécula. Luego, es un espacio de $6N$ dimensiones.

de reversibilidad microscópica que iguala las probabilidades de colisiones temporalmente inversas: $B_{ij}^{kl} = B_{kl}^{ij}$. Con estas hipótesis, la tasa de cambio de la cantidad $N_i(t)$ es:

$$\begin{aligned}\dot{N}_i(t) &= \sum_j \sum_k \sum_l (B_{ij}^{kl} N_k N_l - B_{kl}^{ij} N_i N_j) = \\ &= \sum_j \sum_k \sum_l B_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Definimos la función de Boltzmann:

$$H_B(t) \equiv \sum_i N_i \ln N_i.\tag{3.5}$$

La derivada de $H_B(t)$ respecto del tiempo es:

$$\begin{aligned}\dot{H}_B(t) &= \sum_i \dot{N}_i \ln N_i + \sum_i N_i \dot{\ln N_i} = \sum_i \dot{N}_i \ln N_i \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l B_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j) \ln N_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l B_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j) (\ln N_i + \ln N_j) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l B_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j) (\ln N_i N_j - \ln N_k N_l) \leq 0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

pues $(x - y)(\ln y - \ln x) \leq 0$, $\forall x, y > 1$. Por lo tanto, la función $H_B(t)$ decrece monótonamente con el tiempo, manteniéndose constante sólo si $N_i N_j = N_k N_l$ ⁴. Este es el famoso teorema-H formulado por Ludwig Boltzmann en 1872.

La asimetría temporal del resultado 3.6 se relaciona directamente con la segunda ley de la Termodinámica, como mostraremos a continuación.

3.1.2. La segunda ley de la Termodinámica

Según la ecuación de Boltzmann, la entropía S de un macroestado termodinámico es:

$$S = k_B \ln W,\tag{3.7}$$

donde $k_B \approx 5.6704 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ es la constante de Boltzmann, y W es el volumen de la región del espacio de las fases compatible con el macroestado termodinámico. Para el gas en estudio, suponiendo que los microestados permitidos son equiprobables, W es

⁴Puede demostrarse que la condición $N_i N_j = N_k N_l$ se corresponde con la distribución de velocidades estacionaria de Maxwell-Boltzmann (ver Yourgrau, 1982).

la cantidad de maneras en que las N moléculas similares pueden agruparse en grupos N_1, N_2, \dots :

$$W(N_1, N_2, \dots) = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots}. \quad (3.8)$$

Según las ecuaciones 3.7 y 3.8, la entropía del gas es:

$$\begin{aligned} S(t) &= k_B \ln W \approx k_B N \ln N - k_B \sum_j N_j \ln N_j = \\ &= k_B N \ln N - k_B H_B(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde hemos utilizado la aproximación de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$, $N \gg 1$.

Derivando la Ecuación 3.9 respecto del tiempo y haciendo uso del resultado 3.6 obtenemos:

$$\dot{S}(t) = -k_B \dot{H}(t) \geq 0, \quad (3.10)$$

que se interpreta como la segunda ley de la Termodinámica para el gas: la entropía de un sistema físico cerrado crece con el tiempo hasta alcanzar el valor máximo.

Hemos deducido la segunda ley de la Termodinámica para el gas diluido desde la Mecánica Estadística Clásica. Esta teoría es invariante ante inversión temporal pero la ley deducida no hereda esta propiedad. En la siguiente subsección explicamos esta paradoja aparente.

3.1.3. Caos molecular

La segunda ley de la Termodinámica no es invariante ante inversión temporal pues su representación matemática no mantiene la forma ante el cambio de coordenadas $T : t \rightarrow -t$. Sin embargo, la hemos deducido para un gas diluido desde la Mecánica Estadística Clásica, una teoría invariante ante inversión temporal. La aparente paradoja se resuelve pues, en la deducción, hemos realizado una *hipótesis temporalmente asimétrica*.

En 1894, Samuel Burbury señaló que la hipótesis de caos molecular es temporalmente asimétrica. En efecto, las velocidades de las moléculas se correlacionan luego de cada colisión y es necesario conocer estas correlaciones para que las colisiones sean procesos reversibles. Ignorar estas correlaciones y suponer que las velocidades antes de cada colisión son independientes es una aproximación que facilita el cálculo pero impide que estos procesos sean reversibles. Entonces, debido a la hipótesis de caos molecular, estamos estudiando procesos irreversibles que no reflejan la invarianza temporal de la teoría. No debe sorprendernos obtener un resultado que tampoco refleje esta invarianza.

El teorema-H no explica la asimetría temporal que expresa la segunda ley de la Termodinámica pero desplaza esta asimetría a la hipótesis de caos molecular. Esta reducción a manifestaciones más fundamentales de la asimetría temporal nos acerca al origen de la irreversibilidad en las “flechas del tiempo” y mejora nuestro entendimiento de la dinámica detrás de cada una de ellas (ver Price, 1996, p. 27).

En el presente trabajo proponemos explicar la irreversibilidad de las “flechas del tiempo” mencionadas en la Introducción con condiciones iniciales cosmológicas. En la siguiente sección mostraremos cómo esto es posible, obteniendo soluciones cosmológicas temporalmente asimétricas desde la Teoría de la Relatividad General, una teoría invariante ante inversión y traslación temporal.

3.2. Modelos cosmológicos de Friedmann

3.2.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

En el marco de la Teoría de la Relatividad General, representamos al espacio-tiempo \mathcal{ET} con una variedad real \mathcal{M} de dimensión 4, pseudo-Riemanniana y \mathcal{C}^∞ diferenciable. La métrica $g_{\mu\nu}$ de esta variedad queda determinada por el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$ según las ecuaciones de campo de Einstein 2.9.

Las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker $g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}}$, junto con las fuentes correspondientes $T_{\mu\nu}^{\text{FLRW}}$, conforman una clase de modelos de espacio-tiempo del universo:

$$M_{\mathcal{ET}}^{\text{FLRW}} = \langle \mathcal{M}, g_{\mu\nu}^{\text{FLRW}}, T_{\mu\nu}^{\text{FLRW}} \rangle. \quad (3.11)$$

Estos modelos están basados en suposiciones fuertes como homogeneidad e isotropía espacial en la distribución de materia. En esta sección justificaremos estas hipótesis y obtendremos soluciones particulares de las métricas de FLRW, llamadas *modelos de Friedmann*. Para un desarrollo matemático detallado se recomienda el libro de M. P. Hobson, et al. (2006).

Existe evidencia observacional para aceptar *isotropía* en la distribución de materia espacial del universo. Por ejemplo, se observan distribuciones aproximadamente isotrópicas de galaxias lejanas, fuentes de radio, el fondo de radiación en rayos-X y rayos- γ . La evidencia más contundente, sin embargo, es el fondo cósmico de radiación de microondas (CMB) cuya distribución espacial es isotrópica con una precisión extraordinaria.

Aceptamos también el *principio cosmológico* que propone que no nos encontramos en una posición especial en el universo. La isotropía observada junto con el principio

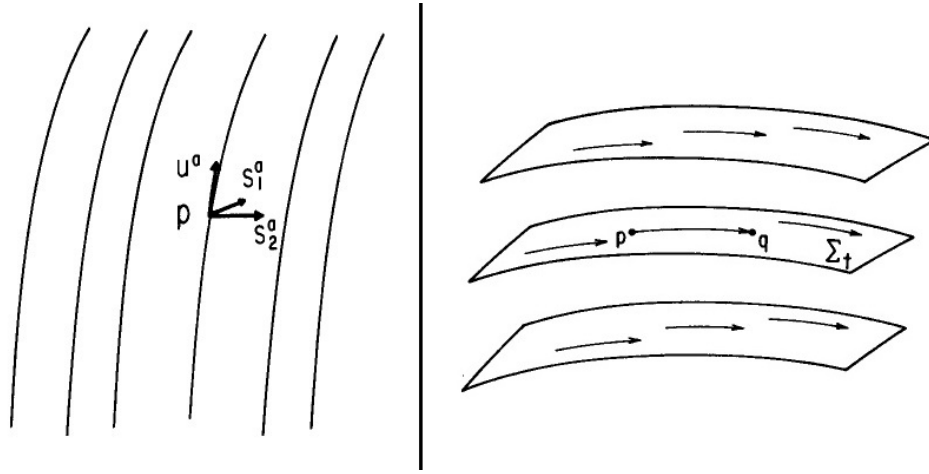


Figura 3.1: A la izquierda vemos un esquema de las líneas de mundo de observadores con cuadri-velocidades u^a . Debido a la isotropía, para cualquier par de vectores s_1^a, s_2^a tangentes a p y ortogonales a u^a , existe una isometría que mantiene p y u^a fijos pero rota s_1^a hacia s_2^a . A la derecha vemos un esquema de hipersuperficies tipo espacio homogéneas. Para cualquier par de puntos $p, q \in \Sigma_t$, existe una isometría que traslada p a q .

cosmológico implican que la distribución de materia en el universo debe ser *homogénea* a gran escala. Esta homogeneidad sería visible a distancias del orden de 10^{21} m.

Matemáticamente, la isotropía y la homogeneidad espacial de un modelo de espacio-tiempo se definen como (ver Wald, 1984, p. 92):

- Un modelo de espacio-tiempo es espacialmente *isotrópico* respecto al punto p si existe una congruencia de curvas tipo tiempo en p (observadores) con cuadri-velocidades tangentes u^a , que cubren todo el espacio-tiempo. Además, si s_1^a, s_2^a son dos vectores tipo espacio tangentes al punto p (ortogonales a u^a), entonces existe una isometría que mantiene fijos a p y a u^a pero rota s_1^a hacia s_2^a . En la Figura 3.1 mostramos un esquema de estos constructos.
- Un modelo de espacio-tiempo es espacialmente *homogéneo* si puede foliarse por un conjunto de hipersuperficies tipo espacio Σ_t , cada una definida por un valor del parámetro t . Además, dada una hipersuperficie Σ_t y dos puntos $p, q \in \Sigma_t$, existe una isometría que traslada p a q . Ver la Figura 3.1 para un esquema de estos constructos.

Debido las hipótesis de homogeneidad e isotropía, las hipersuperficies homogéneas tipo espacio Σ_t son ortogonales a las líneas de mundo de los observadores comóviles⁵ con

⁵Llamamos observadores o sistemas comóviles a aquellos cuyo movimiento está determinado solamente

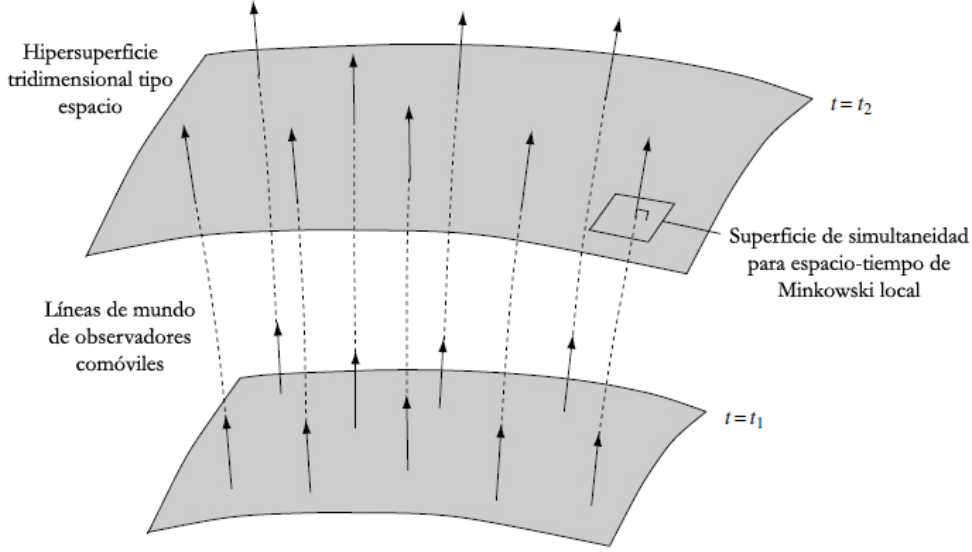


Figura 3.2: Esquema de la topología $M = \Sigma \times \mathbb{R}$. Cada hipersuperficie tridimensional tipo espacio Σ_t define una coordenada temporal $t \in \mathbb{R}$. Los sistemas de referencia fijos a las galaxias son comóviles pues su movimiento está determinado sólo por la acción gravitatoria. Sus líneas de mundo son geodésicas tipo tiempo, ortogonales a las hipersuperficies tipo espacio.

vectores tangentes u^a . Si no lo fuesen, la proyección de u^a sobre Σ_t determinaría una dirección espacial preferencial, violando la hipótesis de isotropía. Matemáticamente, esto significa que la topología de la variedad \mathcal{M} es $\Sigma \times \mathbb{R}$, donde Σ denota el conjunto de hipersuperficies tipo espacio Σ_t y \mathbb{R} el conjunto de valores para el parámetro t . En la Figura 3.2 mostramos un esquema de esta topología.

Las galaxias recorren las geodésicas de tipo tiempo ortogonales a las hipersuperficies tipo espacio pues su movimiento está determinado sólo por la acción gravitatoria (postulado de Weyl). En un sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) comóvil al movimiento geodésico, las coordenadas espaciales de las galaxias se mantendrán constantes. Utilizamos el tiempo propio t de estos sistemas para definir un sistema de coordenadas global comóvil (t, r, θ, ϕ) . En estas coordenadas, el elemento de línea del espacio-tiempo homogéneo e isotrópico espacialmente toma la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.12)$$

por la acción gravitatoria.

donde $k = -1, 0, 1$, es una constante que define la curvatura de las hipersuperficies espaciales, y $R(t)$ es una función a determinar que llamamos *factor de escala*. El elemento de línea 3.12 es propio de las *métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* en coordenadas comóviles.

Hasta aquí, sólo hemos hecho hipótesis sobre la estructura del espacio-tiempo cosmológico. Esto nos condujo al resultado 3.12 pero no fue suficiente para caracterizar a la función $R(t)$. La forma de esta función determina la simetría o asimetría temporal de las distintas soluciones 3.12.

3.2.2. El fluido cosmológico

Para determinar el factor de escala $R(t)$ en la métrica 3.12 recurrimos a las ecuaciones de campo de Einstein, sin constante cosmológica, que estudiamos en la sección 2.2:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Con la métrica 3.12 calculamos los términos de naturaleza geométrica en el miembro izquierdo de las ecuaciones. El miembro derecho hace referencia a la distribución de energía-impulso a escalas cosmológicas. En este sentido, tenemos en cuenta la materia bariónica ordinaria concentrada en galaxias y los fotones del CMB. En cada hipersuperficie Σ_t , modelamos a las galaxias como partículas de polvo sin velocidades peculiares y a los fotones del CMB como un gas de fotones en equilibrio térmico. El tensor de energía-impulso de ambos sistemas puede aproximarse con el de un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = [\rho(t) + p(t)]u_\mu u_\nu + p(t)g_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

donde $\rho(t)$ y $p(t)$ son la densidad y presión del fluido, respectivamente; u^μ es la cuadrivelocidad de las partículas que lo componen, en coordenadas comóviles $u^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$; y $g_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica 3.12. Habiendo despreciado las velocidades peculiares de las galaxias, la ecuación de estado del polvo es $p = 0$. Para los fotones, en cambio, la ecuación de estado es $3p = c^2\rho$.

Reemplazando las cantidades geométricas propias de la métrica 3.12 y el tensor de energía-impulso de un fluido ideal 3.14 en las ecuaciones de campo 3.13 obtenemos, en principio, diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Sin embargo, debido a las simetrías del espacio-tiempo, sólo dos de ellas son independientes:

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = 0, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{c^2 k}{3} = 0, \quad (3.16)$$

denominadas *ecuaciones de Friedmann*.

Utilizamos también la ecuación de conservación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, de la cual obtenemos:

$$\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{3\dot{R}}{R} = 0. \quad (3.17)$$

Por conveniencia, definimos el factor de escala normalizado $a(t)$ y la función $H(t)$ como:

$$a(t) \equiv \frac{R(t)}{R(t_0)}, \quad H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}. \quad (3.18)$$

Si $\rho > 0$ y $p \geq 0$ entonces, de la Ecuación 3.15, resulta $\ddot{R} < 0$. Equivalentemente, resulta $\ddot{a} < 0$. Esto implica que $\dot{a} \neq 0$ y el universo debe expandirse o contraerse. En la época actual t_0 , midiendo los corrimientos al rojo de galaxias lejanas se obtiene el valor (Planck collaboration, 2014):

$$\dot{a}(t_0) = H_0 \approx 67.3 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad (3.19)$$

que llamamos *constante de Hubble*.

Además, siendo $\ddot{a} < 0$, el factor de escala normalizado es cóncavo hacia abajo y debe anularse para ciertos eventos con coordenada temporal $t = 0$, que constituyen el llamado *big bang*. Cuando $t \rightarrow 0$ el volumen de las hipersuperficies tipo espacio tiende a cero y tanto la densidad como la curvatura divergen. Evidentemente, la solución tiene un comportamiento patológico $t = 0$. El espacio-tiempo es singular en el sentido de que es incompleto (ver Romero, 2013). Bajo condiciones muy generales, los teoremas de singularidad de Hawking y Penrose (1970) predicen la incompletitud de ciertos espacios-tiempo, mostrando las limitaciones de la Teoría de la Relatividad General en representar estos sistemas.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de estado correspondientes, resolvemos la ecuación de conservación 3.17 y resultan las densidades:

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_m(t_0)}{a(t)^3}, \text{ para el polvo,} \quad (3.20)$$

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_r(t_0)}{a(t)^4}, \text{ para la radiación.} \quad (3.21)$$

Estas expresiones muestran que la densidad de radiación domina cuando $a \ll 1$ pero puede despreciarse, respecto a la de polvo, en la época actual.

Los *modelos cosmológicos de Friedmann* representan universos de FLRW sin constante cosmológica y sólo con contenido de materia tipo polvo. Reemplazando la expresión 3.20 en la segunda ecuación de Friedmann 3.16 obtenemos:

$$1 = \Omega_m + \Omega_k, \quad (3.22)$$

donde hemos definido las densidades adimensionales de materia y curvatura:

$$\Omega_m(t) \equiv \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho_m(t), \quad \Omega_k(t) \equiv -\frac{c^2}{H^2(t)R^2(t)}k. \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que $\Omega_{k,0} + \Omega_{m,0} = 1$, la ecuación de Friedmann 3.22 puede reescribirse como:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a} + 1 - \Omega_{m,0}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \left[\frac{x}{\Omega_{m,0} + (1 - \Omega_{m,0})x}\right]^{1/2} dx. \quad (3.24)$$

Esta integral puede resolverse fácilmente para los distintos valores de $\Omega_{m,0}$. Distinguimos tres clases de soluciones, diferenciadas por el signo de las densidades de curvatura espacial:

- Si $\Omega_{m,0} = 1$ ($k = 0$), se obtiene rápidamente:

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0t\right)^{2/3}}. \quad (3.25)$$

Este modelo recibe el nombre de universo de Einstein-de Sitter o universo de Friedmann plano.

- Si $\Omega_{m,0} > 1$ ($k = 1$), la integral se resuelve por medio del cambio de variables $x = [\Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0} - 1)]\sin^2(\varphi/2)$, donde φ se llama *ángulo de desarrollo* y toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$. La solución es:

$$\boxed{a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)}(1 - \cos \varphi), \quad t = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}}(\varphi - \sin \varphi)}, \quad (3.26)$$

y la llamamos modelo de Friedmann cerrado.

- Si $\Omega_{m,0} < 1$ ($k = -1$) la integral se resuelve por medio del cambio de variables $x = [\Omega_{m,0}/(1 - \Omega_{m,0})] \sinh^2(\varphi/2)$ y se obtiene:

$$a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})} (\cosh \varphi - 1), \quad t = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} (\sinh \varphi - \varphi). \quad (3.27)$$

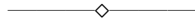
Llamamos a esta solución modelo de Friedmann abierto.

Como mencionamos, estas soluciones se denominan *modelos de Friedmann*, representan universos de FLRW, sin constante cosmológica y con contenido de materia tipo polvo. En la Figura 3.3 graficamos los distintos factores de escala en función del tiempo cósmico t .

3.2.3. Asimetrías temporales en los modelos de Friedmann

En la Figura 3.3 notamos que el universo de Friedmann cerrado es una solución temporalmente simétrica pues existe un tiempo $t_S = t_{BC}/2$ tal que $a(t_S - t) = a(t_S + t)$, para todo t . Sin embargo, los universos abierto y plano no poseen esta propiedad. Decimos que estas últimas son soluciones temporalmente asimétricas. Se podría argumentar que las tres soluciones son simétricas respecto al tiempo $t = 0$ pues $a(t) = a(-t)$ pero, formalmente, la singularidad $t = 0$ no es parte del espacio-tiempo.

Para el universo cerrado, con densidad de curvatura negativa, el tensor de energía-impulso impuesto implica condiciones idénticas para los instantes inicial y final. De allí la simetría de la solución. En cambio, para los universos abierto y plano, el tensor de energía-impulso impuesto implica condiciones muy distintas para los instantes inicial y final. Imponiendo estas condiciones, hemos incluido la asimetría temporal del resultado.



En este capítulo hemos mostrado cómo desde teorías invariantes ante inversión y traslación temporal pueden deducirse resultados que no poseen estas invarianzas, como el teorema-H desde la Mecánica Estadística Clásica. Hemos señalado que este resultado no es invariante ante inversión temporal debido a la hipótesis de caos molecular realizada. Mostramos también cómo pueden resultar soluciones temporalmente asimétricas desde

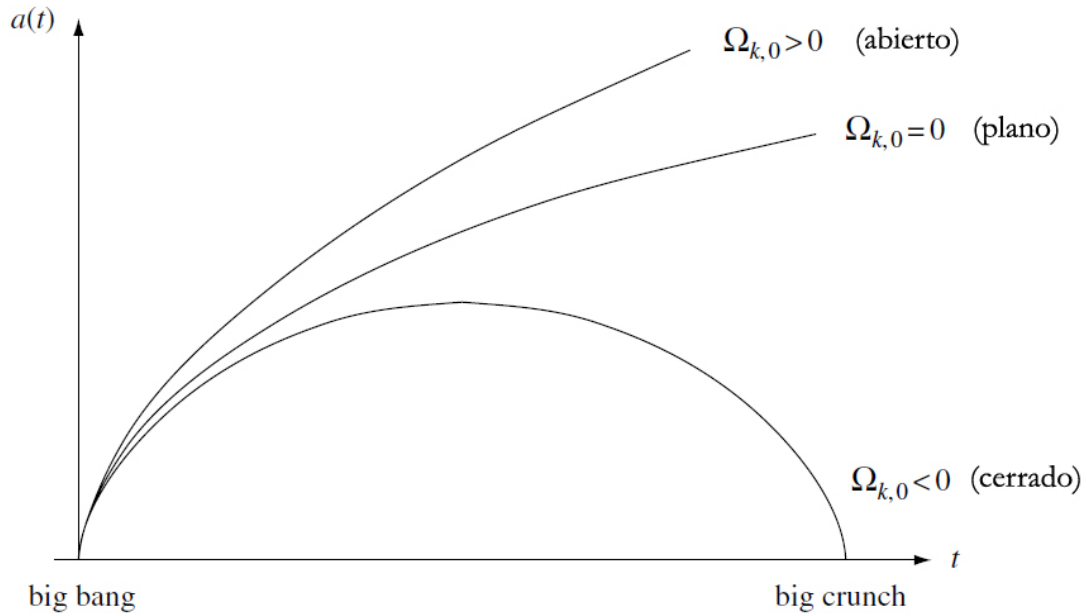


Figura 3.3: Gráfico de la evolución de los factores de escala de los modelos de Friedmann abierto, plano y cerrado, en función del tiempo cósmico t . Puede demostrarse (ver Hobson, et al., 2006, p. 401) que los comportamientos de estos factores de escala son similares cerca del big bang. Sin embargo, su evolución depende crucialmente de los parámetros $\Omega_{k,0}$ y $\Omega_{m,0}$. Mientras que los factores de escala de los modelos abierto y cerrado tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$, el factor de escala del modelo cerrado se anula en un tiempo finito $t_{BC} \neq 0$ en un evento denominado *big crunch*. Por otro lado, el valor de la velocidad de expansión $\dot{a}(t)$ del modelo abierto tiende a una constante positiva cuando $t \rightarrow \infty$. Para el modelo plano, en cambio, el valor de la velocidad de expansión tiende a cero en ese mismo límite. La velocidad de expansión para el modelo cerrado tiene la particularidad de anularse en un tiempo finito $t_{BC}/2$.

teorías invariantes ante inversión y traslación temporal, como los universos de Friedmann desde la Teoría General de la Relatividad. En estas soluciones, la asimetría temporal fue incluida por medio del tensor de energía-impulso que impone condiciones físicas muy distintas en el inicio y final del universo (excepto para el universo de Friedmann cerrado).

Destacamos que reducir la asimetría temporal a sus manifestaciones más fundamentales implica un mayor entendimiento en la dinámica detrás de los procesos irreversibles y nos permite inferir sobre el origen de dicha irreversibilidad. En el siguiente capítulo estudiaremos un sistema físico que nos permitirá relacionar condiciones cosmológicas globales con procesos irreversibles locales de naturaleza electromagnética. El sistema físico a estudiar son los *agujeros negros cosmológicos acretantes*.

Capítulo 4

Agujeros negros cosmológicos acretantes

En este capítulo estudiaremos las propiedades de los *agujeros negros cosmológicos acretantes*. En particular, calcularemos una cota mínima para el crecimiento del área de sus horizontes de eventos. Como veremos en el próximo capítulo, el crecimiento de estos objetos permite un acoplamiento entre procesos globales de naturaleza gravitatoria con procesos electromagnéticos locales.

En la primera sección daremos una definición formal y estudiaremos las propiedades de un *agujero negro de Schwarzschild*. Luego, en la segunda sección, discutiremos los efectos producidos sobre el área del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild al ser embebido en un espacio-tiempo de FLRW. Llamamos a estos objetos *agujeros negros cosmológicos*. En la tercera sección calcularemos el incremento de la masa de un agujero negro de Schwarzschild por la inevitable acreción de los fotones del CMB. Finalmente, en la cuarta sección, definiremos el *factor de llenado* como el cociente entre el área del horizonte de eventos de un agujero negro cosmológico acretante y el área de una hipersuperficie cosmológica esférica de tipo espacio. Este factor caracteriza el crecimiento mínimo del área del horizonte de eventos con respecto a la expansión del universo.

4.1. Agujero negro de Schwarzschild

En 1783, el geólogo inglés John Michell modeló un cuerpo con densidad tan grande que ni siquiera la luz podía escapar de su atracción gravitatoria. Este modelo fue desarrollado en el marco de la teoría gravitacional de Newton y se descartó al descubrir la naturaleza

ondulatoria de la luz.

En 1915, Albert Einstein completó la Teoría de la Relatividad General y, desde entonces, sus predicciones han sido comprobadas exitosamente. Entre estas predicciones se encuentra que la luz es influenciada por interacciones gravitatorias. A lo largo del siglo XX, importantes físicos como K. Schwarzschild, S. Chandrasekhar, R. Oppenheimer, R. Kerr y R. Penrose, estudiaron soluciones a las ecuaciones de Einstein y las propiedades de la materia ante el colapso gravitatorio. La implosión de una estrella con masa $M > 10M_{\odot}$ es un mecanismo posible para la formación de objetos completamente colapsados gravitacionalmente. Los físicos soviéticos, entre quienes destacamos a Yákov B. Zeldóvich, utilizaban el término *estrella congelada* para designarlos. En 1967, el físico estadounidense John Wheeler decidió resaltar la existencia del horizonte de eventos e implementó el término *agujero negro* que fue aceptado rápidamente por la comunidad científica.

Actualmente, existen evidencias astronómicas considerables que apoyan la existencia de agujeros negros en el universo (ver Casares, 2006; Camenzind, 2007; Paredes, 2009; Romero & Vila, 2013). En esta sección definimos formalmente el modelo más sencillo de estos objetos, llamado *agujero negro de Schwarzschild*. Trabajamos en el contexto de la Teoría de la Relatividad General pues, como mencionamos, los agujeros negros son objetos puramente relativistas.

La métrica de Schwarzschild es la solución a las ecuaciones de campo de Einstein que representa al espacio-tiempo en el exterior de un cuerpo esféricamente simétrico de masa M . Esta solución, aplicada al exterior del Sol, se ha utilizado para entender y corroborar las principales predicciones de la Teoría de la Relatividad General en régimen de campo débil. La métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas y estáticas (t, r, θ, ϕ) es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde G es la constante de gravitación de Newton y c la velocidad de la luz en el vacío. La solución de Schwarzschild 4.1 es una solución de vacío pues el tensor el Ricci es nulo, y suele unirse a una solución de interior estelar para completar la representación del espacio-tiempo.

Además del Sistema Solar, la solución 4.1 posee otras aplicaciones importantes. No se conoce fuerza alguna que detenga el colapso gravitatorio una estrella con masa $M > 10M_{\odot}$. El espacio-tiempo que resulta de este colapso está representado completamente por la métrica 4.1. Luego, la solución de Schwarzschild también describe al espacio-tiempo en un régimen de campo fuerte.

La métrica 4.1 parece tener patologías en $r = 0$ y en $r = 2GM/c^2$, este último llamado *radio de Schwarzschild* r_S . Para determinar si estas patologías son propias de regiones singulares o se deben a la elección de coordenadas, analizamos algún escalar independiente de las coordenadas. El escalar de Kretschmann para la métrica de Schwarzschild es (e. g. Henry, 2000):

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}, \quad (4.2)$$

donde $R^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de curvatura de Riemann. De la expresión 4.2 notamos que el espacio-tiempo de Schwarzschild es singular en $r = 0$. Por otro lado, la singularidad en $r = r_S$ es aparente y se debe a la elección de coordenadas¹. Deben existir sistemas de coordenadas en los cuales la métrica de Schwarzschild es regular en $r = r_S$.

En las coordenadas de Eddington–Finkelstein:

$$\begin{cases} r_* = r + \frac{2GM}{c^2} \log \left| \frac{r-2GM/c^2}{2GM/c^2} \right|, \\ v = ct + r_*, \end{cases} \quad (4.3)$$

la solución de Schwarzschild 4.1 toma la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) dv^2 + 2drdv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.4)$$

que es regular en $r = r_S$.

En la Figura 4.1 mostramos un diagrama del espacio-tiempo de Schwarzschild y sus conos de luz, en coordenadas de Eddington–Finkelstein. De esta figura notamos que la superficie $r = r_S$ es de tipo luz y que, al cruzarla, no existen curvas causales de tipo tiempo que permitan regresar al espacio exterior. En otras palabras, los eventos que ocurren en $r < r_S$ están desconectados del resto del espacio-tiempo. En este sentido decimos que la superficie $r = r_S$ es un *horizonte de eventos* y llamamos *agujero negro* a la región del espacio tiempo con $r \leq r_S$.

Pueden utilizarse distintos sistemas de coordenadas para describir un agujero negro de Schwarzschild. Por este motivo, buscamos una definición del mismo que sea independiente del sistema de coordenadas elegido. Para ello, es necesario introducir algunos conceptos preliminares (ver Hawking & Ellis, 1973; Wald, 1984):

- Una *curva causal* en un espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ es una curva, o sección de curva, que no es de tipo espacio.

¹El primero en notar que el horizonte de eventos era una singularidad aparente fue monseñor G. Lemaître (1933).

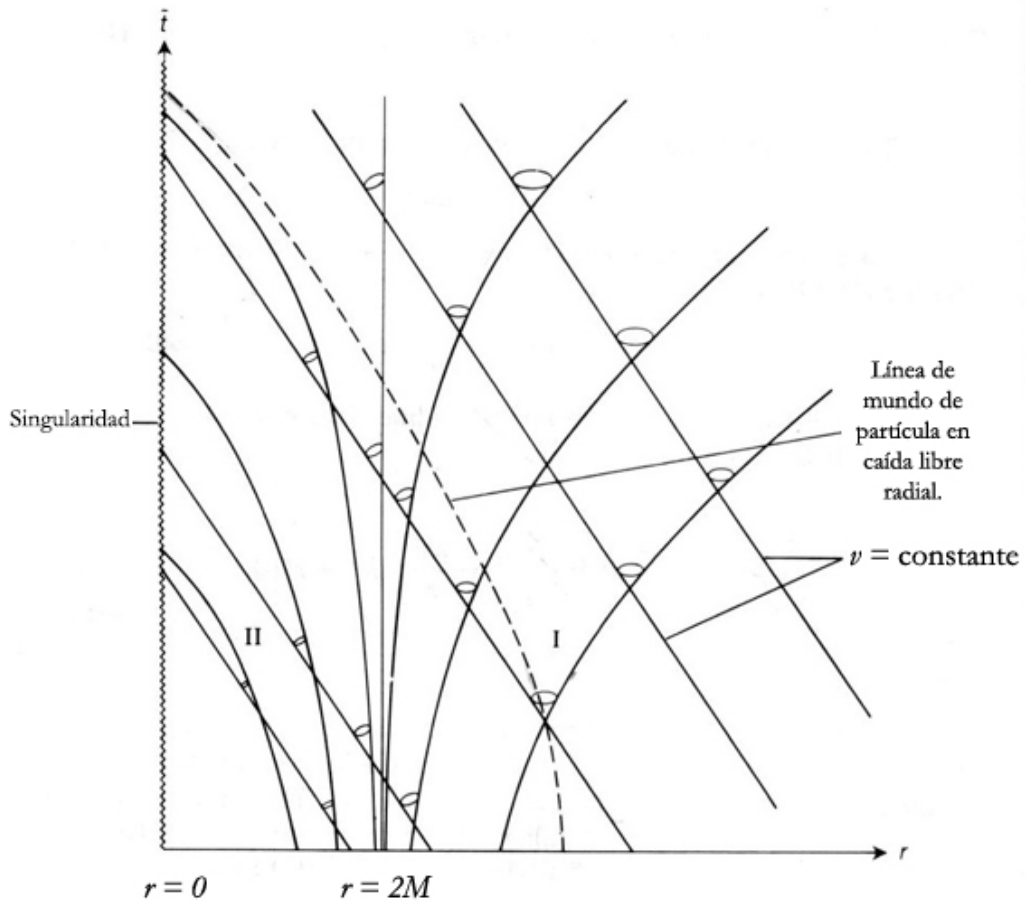


Figura 4.1: Diagrama de espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Se muestra el comportamiento de los conos de luz y de una geodésica tipo tiempo en las proximidades del horizonte de eventos $r_S = 2M$ (unidades de Planck: $c = G = 1$). La región II representa al *agujero negro de Schwarzschild* y la región I al resto del universo.

- Un modelo de espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ es *temporalmente orientable* si puede definirse sobre la variedad M un campo vectorial suave, de tipo tiempo.
- Si $(M, g_{\mu\nu})$ es un modelo de espacio-tiempo temporalmente orientable, entonces definimos el *futuro (pasado) causal* de $p \in M$, denotado $J^{+(-)}(p)$, como:

$$J^{+(-)}(p) \equiv \{q \in M \mid \exists \text{ una curva causal futura (pasada) desde } p \text{ hasta } q\}. \quad (4.5)$$

- El futuro (pasado) causal de una región $S \subset M$ es:

$$J^{+(-)}(S) \equiv \bigcup_{p \in S} J^{+(-)}(p). \quad (4.6)$$

- Una superficie S de tipo espacio es una *superficie de Cauchy* si toda curva causal en M cruza a S una y sólo una vez.
- Un modelo de espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ se dice *globalmente hiperbólico* si, y sólo si, M incluye una superficie de Cauchy.

Consideremos un espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ dónde todas las geodésicas tipo luz que comienzan en la región \mathcal{J}^- terminan en la región \mathcal{J}^+ , y existe una región abierta $V \in M$, tal que $M \cap J^-(\mathcal{J}^+) \in V$ y $(V, g_{\mu\nu})$ es globalmente hiperbólico². Este espacio-tiempo contiene un *agujero negro* si M no está contenida en $J^-(\mathcal{J}^+)$. En otras palabras, existe una región donde las geodésicas nulas no pueden alcanzar al futuro asintótico plano³. Dicha región está causalmente desconectada del futuro global y es igual a $BH = [M - J^-(\mathcal{J}^+)]$. Llamamos *agujero negro* a la región BH y *horizonte de eventos* a su frontera $H = J^-(\mathcal{J}^+) \cap M$ (ver Romero, 2014).

En la Figura 4.1 presentamos el diagrama conforme de Penrose-Carter de un agujero negro de Schwarzschild. Estos diagramas se obtienen de ciertos cambios de coordenadas conformes sobre la métrica 4.4 y son muy útiles ya que permiten visualizar la estructura causal del espacio-tiempo infinito en regiones acotadas.

La definición de agujero negro que presentamos no hace referencia a ninguna propiedad local, como la intensidad del campo gravitatorio. Por el contrario, hace referencia a propiedades de la estructura causal global del espacio-tiempo. Según esta definición, es imposible identificar un agujero negro sin conocimientos globales del espacio-tiempo. Puede

²Los espacios-tiempo con esta propiedad se denominan *predecibles fuerte y asintóticamente*.

³Un espacio tiempo es asintóticamente plano si, en coordenadas apropiadas, los límites de los coeficientes de la métrica en infinito tienden a los coeficientes de la métrica plana de Minkowski.

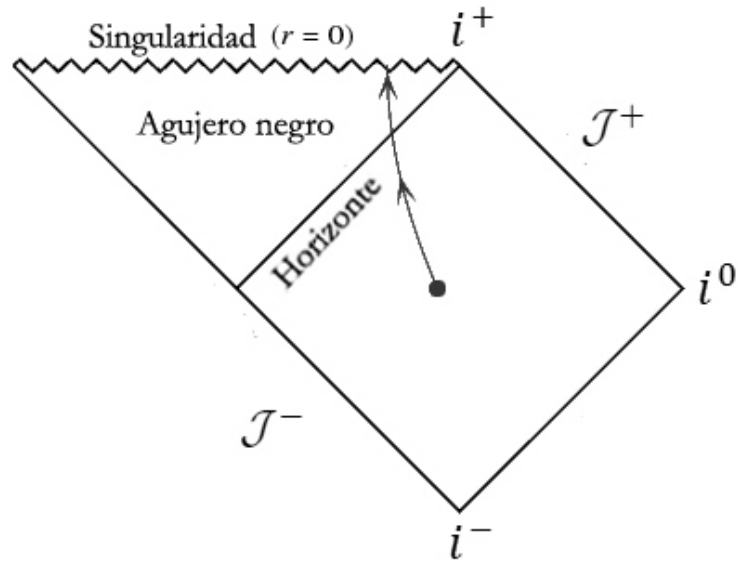


Figura 4.2: Diagrama conforme de Penrose-Carter de un agujero negro de Schwarzschild. Las geodésicas tipo luz se representan con semirectas de pendientes ± 1 . Ninguna curva causal puede alcanzar el futuro infinito tipo luz desde el agujero negro. Como es usual en estos diagramas, denotamos $\mathcal{J}^{+(-)}$ al *futuro (pasado) infinito tipo luz* que es la región del espacio-tiempo donde se dirigen (originan) las geodésicas tipo luz cuando el tiempo tiende a $+\infty$ ($-\infty$). Análogamente, denotamos $i^{+(-)}$ al *futuro (pasado) infinito tipo tiempo*. Por último, denotamos i^0 al *infinito tipo espacio* que es la región del espacio-tiempo donde divergen las coordenadas espaciales radiales (ver Booth, 2005).

argumentarse que la existencia de un objeto no puede depender de la ocurrencia de eventos en el futuro infinito global. En este sentido, existen otras definiciones de agujero negro en términos de propiedades locales como la intensidad del campo gravitatorio o superficies de captura (ver Booth, 2005).

4.2. Agujeros negros cosmológicos

La definición de agujero negro que presentamos en la sección anterior es conceptualmente importante pero no sirve para representar sistemas astrofísicos reales como los resultados del colapso de una estrella, la fusión de dos agujeros negros, la acreción de partículas, etc. Tampoco sirve para representar a un agujero negro embebido en un espacio-tiempo distinto al de Minkowski. En todas estas situaciones dinámicas, el concepto de agujero negro debe ser generalizado. En esta sección estudiamos el efecto sobre la masa de un agujero negro al ser embebido en un universo de FLRW.

Llamamos *agujero negro cosmológico* al sistema físico representado por una solución de agujero negro de las ecuaciones de campo de Einstein que asintóticamente representa algún modelo cosmológico. Definir formalmente a estos objetos o estudiar en detalle las propiedades de sus horizontes es una tarea que excede los objetivos de este trabajo. Para un análisis completo ver los trabajos de Booth (2005) y Faraoni (2013).

Suponemos que los agujeros negros cosmológicos son sensibles a la expansión del universo. Al ser regiones del espacio-tiempo, inferimos que aumentan o reducen su tamaño en forma comóvil al mismo. En este sentido, aceptamos la propuesta de masa cuasi-local de Hawking-Hayward para un agujero negro cosmológico en función del tiempo cósmico (Hawking, 1968; Hayward, 1994):

$$\boxed{M_{\text{BH}}^{\text{HH}}(t) = M_0 a(t)}, \quad (4.7)$$

donde M_0 es la masa del agujero negro en la época actual t_0 y $a(t)$ es el factor de escala normalizado en el modelo de universo FLRW asintótico.

Utilizando la propuesta de Hawking-Hayward 4.7, Sultana y Dyer (2005) encontraron soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein que representan a un agujero negro embebido en un universo de FLRW plano con $a(t) \propto t^{2/3}$ (ver también Gao, et al., 2008). Con la misma propuesta, Faraoni y Jacques (2007) obtuvieron soluciones que representan a un agujero negro en un universo de FLRW plano con factor de escala $a(t)$ genérico. Por otro lado, hemos estudiado la validez de la propuesta de Hawking-Hayward

en modelos de universos con curvatura no nula. Detallamos nuestros cálculos y resultados en el Apéndice A de esta tesis.

4.3. Acreción del fondo cósmico de microondas

Las partículas más abundantes del universo son los fotones del fondo cósmico de microondas (CMB). La densidad actual de estos fotones es: $n_0^{\text{CMB}} = 411 \text{ cm}^{-3}$, mucho mayor que la densidad de fotones emitidos por objetos estelares. Se distribuyen homogéneamente en el espacio y presentan un espectro térmico muy preciso, con temperatura $T_0^{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K}$ (ver Figura 4.3). A pesar de la alta densidad, su temperatura es muy baja y la densidad de energía despreciable: $\Omega_0^{\text{CMB}} \propto 10^{-5}$ (ver Rich, 2001, p. 12).

Debido a la universalidad de estas partículas, todos los objetos del universo necesariamente interactúan con ellas. En esta sección estudiaremos cómo aumenta la masa de un agujero negro de Schwarzschild debido a la acreción de fotones del CMB. Calcularemos la tasa de acreción de fotones por un agujero negro de Schwarzschild inmerso en un baño térmico y luego aplicaremos este resultado para los fotones del CMB.

4.3.1. Acreción de radiación térmica

Sea un agujero negro de Schwarzschild de masa M inmerso en un baño térmico de fotones en equilibrio termodinámico. Algunos de estos fotones cruzarán el horizonte de eventos, incrementando la masa M del agujero negro. Decimos que habrá *acreción de radiación térmica*.

Las condiciones termodinámicas de equilibrio son distintas para distintos espacios-tiempo. La temperatura de un baño térmico es una medida de la distribución de frecuencias \bar{n}_ν . La frecuencia asociada a un fotón en el espacio-tiempo de Schwarzschild depende de la coordenada r por medio del factor de corrimiento $\alpha(r) = \sqrt{-g_{00}(r)}$. Esto sugiere que la temperatura del gas en equilibrio dependerá del mismo factor. Para demostrarlo, utilizamos la conservación del tensor de energía impulso $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ y una ecuación de estado para el gas de fotones:

$$-\frac{dp}{dr} = (u + p) \frac{d \ln \alpha}{dr}, \quad (4.8)$$

$$p = \frac{1}{3}u, \quad (4.9)$$

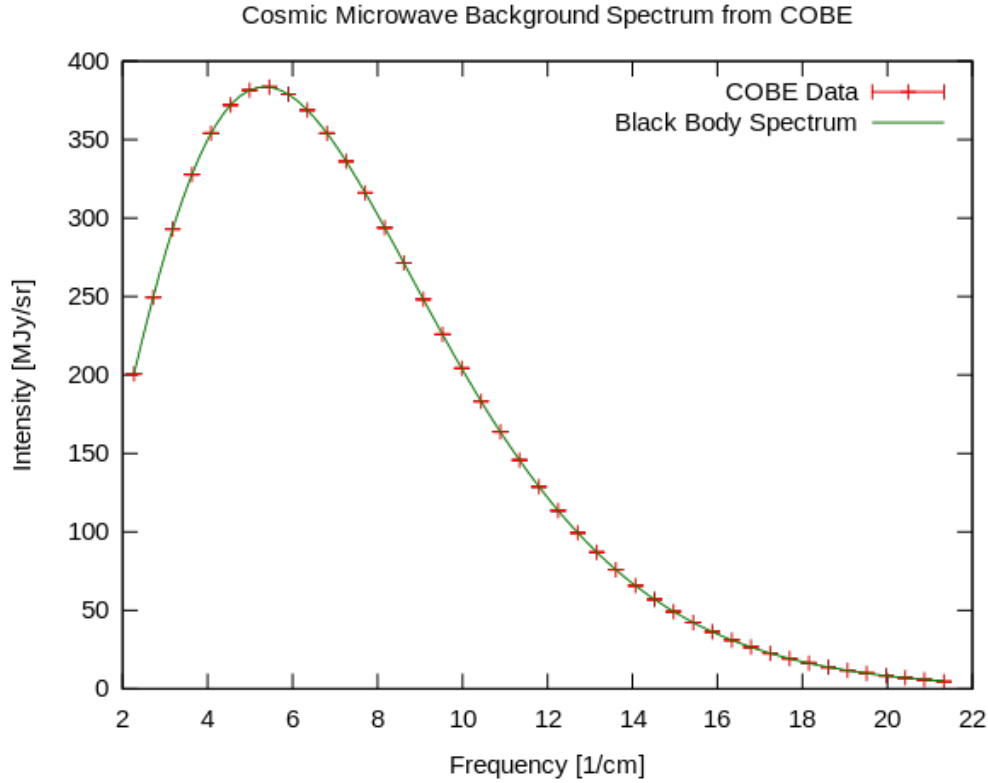


Figura 4.3: Espectro del fondo cósmico de microondas, la radiación de cuerpo negro más precisa que se haya observado. Se muestran los resultados del satélite COBE, obtenidos entre 1989 y 1996. Actualmente existen mediciones más precisas realizadas por la misión WMAP y el satélite Planck.

donde p y u son la presión y densidad de energía del baño térmico, respectivamente, y $\alpha(r) = \sqrt{-g_{00}(r)}$.

Reemplazando la Ecuación 4.9 en la Ecuación 4.8 e integrando, resulta $u(r) = u_{\infty}/\alpha(r)^4$, donde u_{∞} es la densidad de energía cuando $r \rightarrow \infty$. Combinando este resultado con la ecuación de estado $u(r) \propto T(r)^4$, la *temperatura del gas de fotones que mide un observador estático en r* resulta:

$$\boxed{T(r) = \frac{T_{\infty}}{\alpha(r)}}, \quad (4.10)$$

donde T_{∞} es la temperatura medida en $r \rightarrow \infty$. La expresión 4.10 para la temperatura del gas de fotones se denomina *temperatura de Tolman*.

Analizamos la acreción de fotones como observadores estáticos espacialmente “en el infinito”. La cuadrivelocidad unitaria de un observador estático en la geometría de Sch-

warzschild es $u^\mu \rightarrow (1/\sqrt{g_{00}}, 0, 0, 0)$. Tomando el límite $r \rightarrow \infty$ encontramos para un observador estático en infinito: $u^\mu = t^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$. Si medimos la energía de un fotón que se dirige al agujero negro por medio de la geodésica nula $k = k^\mu \partial_\mu$ obtendremos el valor $E_\infty = u^\mu k_\mu = k_0 = h\nu_\infty$.

El espacio-tiempo de Schwarzschild es estacionario. Luego, el campo vectorial $t = t^\mu \partial_\mu$ es un campo vectorial de Killing, implicando la conservación de la cantidad $t^\mu k_\mu = k_0 = h\nu_\infty$ a lo largo de la geodésica k . Esta cantidad conservada es la energía del fotón y coincide con nuestra medición en el infinito. Si el fotón cruza el horizonte de eventos, aportará dicha cantidad de energía al agujero negro.

Nos proponemos calcular el *número de fotones capturados por el agujero negro por unidad de tiempo* \dot{N} , o \dot{E} en términos de la energía incorporada. Para ello, recurriremos a resultados clásicos de dispersión de partículas.

Cuando un flujo de partículas J incide sobre un dispersor, el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo es:

$$\dot{N} = J\sigma, \quad (4.11)$$

donde σ es la *sección eficaz total* que cuantifica el área de impacto del sistema. En caso que el dispersor sea una esfera rígida de radio R , vale $\sigma = \pi R^2$. Modelamos al agujero negro como un blanco dispersor y a los fotones como las partículas proyectiles, que no serán dispersadas, sino capturadas.

El radio de la esfera rígida dispersora será la menor distancia a la que puede acercarse un fotón al agujero negro sin ser capturado. Designamos a esta distancia *radio de captura* R_c . Del estudio de las geodésicas nulas en la geometría de Schwarzschild resulta:

$$R_c = \frac{\sqrt{27}}{2} r_S, \quad (4.12)$$

donde r_S es el radio de Schwarzschild del agujero negro.

Por homogeneidad, el flujo de fotones a través de la superficie $r \rightarrow \infty$ es:

$$J_\infty = \rho_\infty c, \quad (4.13)$$

donde ρ_∞ es la densidad de fotones en $r \rightarrow \infty$ y c es la velocidad de la luz en el vacío. Combinando las ecuaciones 4.11, 4.12 y 4.13 resulta la *tasa de acreción*:

$$\dot{N} = \rho_\infty c \pi R_c^2. \quad (4.14)$$

Multiplicando la tasa de acreción 4.14 por la energía de cada fotón obtenemos la *tasa de energía incorporada*:

$$\dot{E} = u_{\infty} c \pi R_c^2, \quad (4.15)$$

donde u_{∞} es la densidad de energía de los fotones en infinito.

La energía de un agujero negro de Schwarzschild es $E_{\text{BH}} = M_{\text{BH}} c^2$. Luego, debido a la acreción, su masa aumentará como:

$$\dot{M}_{\text{BH}} = u_{\infty} \frac{\pi R_c^2}{c}. \quad (4.16)$$

La densidad de energía de los fotones en infinito depende de la temperatura según:

$$u_{\infty} = b T_{\infty}^4, \quad (4.17)$$

donde $b = 1.917 \times 10^{-15} \text{erg K}^{-4} \text{cm}^{-3}$. Reemplazando la densidad de energía 4.17 en la tasa 4.16 resulta:

$$\boxed{\dot{M}_{\text{BH}} = \frac{27 G^2 b}{c^2} M^2 T_{\infty}^4.} \quad (4.18)$$

A continuación, utilizaremos este resultado para calcular como crece la masa de un agujero negro de Schwarzschild debido a la acreción de los fotones del CMB en función del tiempo cósmico t y de la temperatura del CMB observada “en infinito”.

4.3.2. Aplicación al fondo cósmico de microondas

Un agujero negro aumenta su masa debido a la acreción de fotones del CMB. Para estimar la tasa de acreción simplemente debemos reemplazar en la Ecuación 4.18 la temperatura del CMB observada. Sin embargo, debido a la expansión del universo, la temperatura del CMB no es constante sino una función del tiempo cósmico t .

En la Sección 3.2.2 encontramos cómo depende la densidad de radiación del tiempo cósmico t en un universo de FLRW (Ecuación 3.21). Combinando este resultado con la Ecuación 4.17 obtenemos que la temperatura del CMB depende de t según:

$$T^{\text{CMB}}(t) = \frac{T_0^{\text{CMB}}}{a(t)}, \quad (4.19)$$

donde T_0^{CMB} es la temperatura del CMB en la época actual y $a(t)$ es el factor de escala normalizado.

Finalmente, de las Ecuaciones 4.18 y 4.19 obtenemos la tasa de acreción dependiente del tiempo:

$$\dot{M}_{\text{BH}}^{\text{CMB}} = \frac{27G^2b}{c^2}M^2 \left(\frac{T_0}{a(t)} \right)^4. \quad (4.20)$$

Integrando la ecuación anterior en el tiempo, la masa del agujero negro para $t > t_0$ por acreción de fotones del CMB es:

$$M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t) = M_0 + \Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t) = M_0 + \int_{t_0}^t \frac{27G^2b}{c^2}M^2 \left(\frac{T_0}{a(t)} \right)^4 dt, \quad (4.21)$$

donde M_0 es la masa en la época actual t_0 del agujero negro.

En la siguiente sección calcularemos el aumento total del área del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild debido a la expansión del universo y a la acreción de los fotones del CMB. Compararemos el crecimiento del área del horizonte de eventos con la expansión cosmológica del área de una hipersuperficie esférica tipo espacio.

4.4. El factor de llenado

En las secciones anteriores estudiamos procesos por los cuales aumenta la masa de un agujero negro de Schwarzschild en un contexto cosmológico. Este aumento en la masa implica el crecimiento del radio de Schwarzschild del agujero negro y del área del horizonte de eventos. Por otro lado, una hipersuperficie esférica tipo espacio en la geometría de FLRW crece debido a la expansión del universo. En esta sección calculamos el cociente entre el área de estas superficies para mostrar que la expansión del horizonte de eventos de un agujero negro supera a la expansión de una hipersuperficie esférica tipo espacio.

Definimos el *factor de llenado* $f(t)$ como el cociente entre el área $A_{\text{BH}}(t)$ del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild cosmológico, y el área $\Sigma(t)$ de una hipersuperficie esférica tipo espacio de la geometría FLRW:

$$f(t) \equiv \frac{A_{\text{BH}}(t)}{\Sigma(t)}. \quad (4.22)$$

El área del horizonte de eventos $A_{\text{BH}}(t)$ en función del tiempo cósmico t es:

$$A_{\text{BH}}(t) = \frac{16\pi G^2}{c^4}M_{\text{BH}}(t)^2, \quad (4.23)$$

donde $M_{\text{BH}}(t)$ es la masa total del agujero negro en función del tiempo cósmico t . Si suponemos que el crecimiento de la masa del agujero negro se debe únicamente a la

expansión del universo y a la acreción de fotones del CMB, combinamos las Ecuaciones 4.7, 4.21 y obtenemos:

$$M_{\text{BH}} = M_{\text{BH}}^{\text{HH}} + \Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}} = M_0 a(t) + \Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}. \quad (4.24)$$

El área de de una hipersuperficie esférica tipo espacio en la geometría FLRW se obtiene de la métrica 3.12:

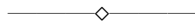
$$\Sigma(t) = 4\pi R_0^2 r^2 a(t)^2, \quad (4.25)$$

donde r es la coordenada radial comóvil de la hipersuperficie esférica y $R_0 = R(t_0)$.

Reemplazando las Ecuaciones 4.23, 4.24 y 4.25 en la Ecuación 4.22, el factor de llenado toma la forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4G^2}{c^4 R_0^2 r^2 a(t)^2} (M_0 a(t) + \Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t))^2 = \\ &= \frac{4G^2 M_0^2}{c^4 R_0^2 r^2} \left(1 + \frac{2\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)}{M_0 a(t)} + \frac{\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)^2}{M_0^2 a(t)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Además de los fotones del CMB, el área del horizonte de eventos podría crecer por la acreción de otros objetos. Sin embargo, nuestra intención es estimar una cota mínima para este crecimiento. Esta cota será suficiente para demostrar que el crecimiento del horizonte de eventos supera la expansión del universo.



Hemos estudiado los efectos sobre la masa de un agujero negro de Schwarzschild al introducirlo en un contexto cosmológico. Tuvimos en cuenta el aumento de la masa debido a la expansión del universo y aceptamos la propuesta de masa cuasi-local de Hawking-Hayward para agujeros negros cosmológicos. Por otro lado, calculamos la tasa de acreción de fotones del CMB. Finalmente, sumamos el aumento en la masa debido a estos procesos y definimos el factor de llenado. Este factor compara el crecimiento mínimo del área del horizonte de eventos de un agujero negro cosmológico con el crecimiento del área de una hipersuperficie esférica tipo espacio en expansión cósmica.

En el siguiente capítulo calcularemos explícitamente el factor de llenado $f(t)$ para un agujero negro supermasivo en los modelos cosmológicos de Friedmann. Luego, explicaremos

la importancia conceptual de este resultado al relacionar procesos irreversibles globales de naturaleza gravitatoria con procesos irreversibles locales de naturaleza electromagnética.

Capítulo 5

Resultados

A continuación, presentamos los cálculos realizados con el objetivo de encontrar e interpretar la forma del factor de llenado $f(t)$ para un agujero negro supermasivo en los modelos cosmológicos de Friedmann.

En la primera sección determinaremos los parámetros cosmológicos de estos modelos imponiendo ciertas condiciones como la constante de Hubble H_0 observada recientemente. En la segunda sección integraremos la tasa de acreción de fotones del CMB por un agujero negro supermasivo en función del tiempo cósmico t para los distintos modelos de Friedmann. Con estos resultados, en la tercera sección procederemos a calcular y graficar el factor de llenado $f(t)$ para los distintos modelos de Friedmann. Finalmente, en la cuarta sección, interpretaremos el comportamiento de este factor en el tiempo. Argumentamos que implica el apantallamiento de corrientes electromagnéticas futuras y la existencia de una dirección temporal preferencial para el flujo de energía electromagnética.

5.1. Parámetros cosmológicos

Los modelos cosmológicos de Friedmann estudiados en la Sección 3.2 quedan completamente determinados si se conocen los valores de los parámetros cosmológicos actuales: densidad de curvatura $\Omega_{k,0}$, densidad de materia $\Omega_{m,0}$, el factor R_0 , la constante de Hubble H_0 y la edad del universo t_0 . Como mostramos en dicha sección, estos parámetros se relacionan por medio de las siguientes ecuaciones:

	Modelo de Friedmann		
	Cerrado	Plano	Abierto
$\Omega_{k,0}$	-0.30	0	0.21
$\Omega_{m,0}$	1.30	1	0.79
R_0 [cm]	2.52×10^{28}	2.75×10^{28}	2.98×10^{28}
H_0 [s^{-1}]	2.18×10^{-18}	2.18×10^{-18}	2.18×10^{-18}
t_0 [s]	2.90×10^{17}	3.06×10^{17}	3.20×10^{17}

Tabla 5.1: Parámetros cosmológicos de los modelos de Friedmann. Estos valores resultan del sistema de ecuaciones 5.1 al fijar la constante de Hubble observada por el satélite Planck (Planck collaboration, 2014).

$$\begin{aligned}
a(t_0) &= 1, \\
R_0 &= c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \\
\Omega_{k,0} &= -\frac{c^2 k}{H_0^2 R_0^2}, \\
\Omega_{m,0} &= 1 - \Omega_{k,0}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Hay cuatro ecuaciones independientes y cinco parámetros a determinar. Es necesario imponer el valor de uno de ellos. Para los tres modelos cosmológicos a considerar, fijamos el valor de la constante de Hubble medida recientemente por el satélite Planck (Planck collaboration, 2014):

$$H_0 \approx 67.3 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}. \tag{5.2}$$

Los parámetros de los modelos de Friedmann que resultan del sistema de ecuaciones 5.1 se muestran en la Tabla 5.1. Utilizamos estos parámetros para calcular los factores de escala dados por las Ecuaciones 3.25, 3.26 y 3.27. En la Figura 5.1 graficamos los resultados correspondientes y comprobamos que son consistentes con la Figura 3.3 de la Sección 3.2.

Conociendo los parámetros actuales y factores de escala de los modelos cosmológicos, procedemos a calcular la tasa de acreción de fotones del CMB por un agujero negro supermasivo.

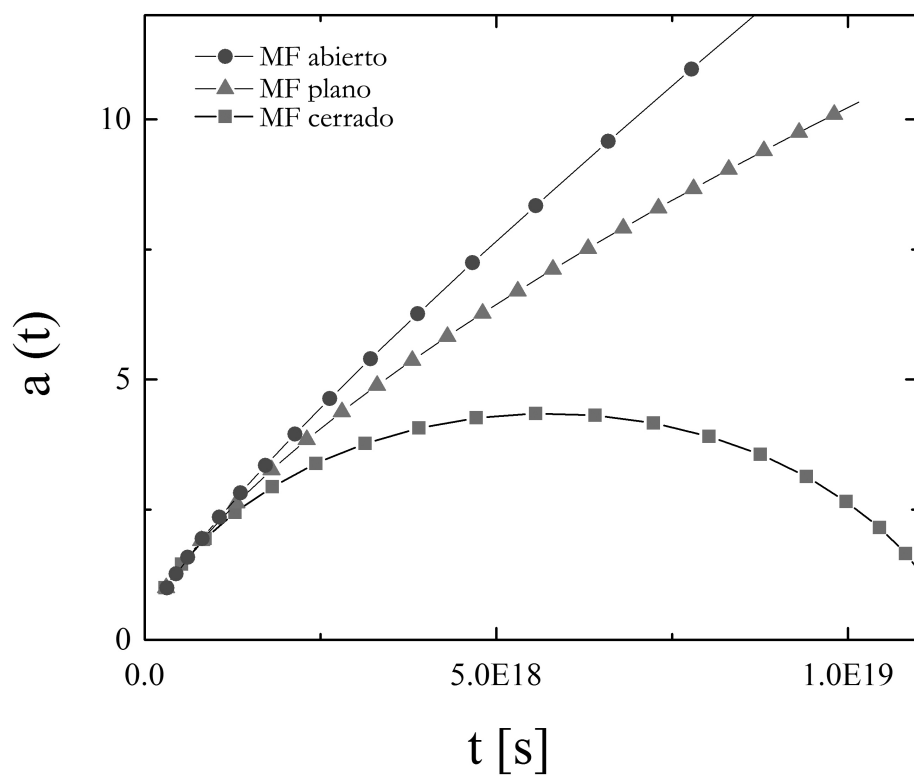


Figura 5.1: Factores de escala normalizados en función del tiempo cósmico para los modelos de Friedmann abierto, plano y cerrado. Los cálculos fueron realizados con los parámetros de la Tabla 5.1.

5.2. Acreción de fotones del CMB por agujero negro supermasivo

Consideremos la acreción de fotones del CMB por un agujero negro supermasivo. Estos objetos suelen encontrarse en centros galácticos y su rango de masa se encuentra entre $10^6 M_\odot$ y $10^9 M_\odot$. El apantallamiento de corrientes electromagnéticas por agujeros negros de masa estelar puede despreciarse frente a la acreción de estos objetos supermasivos.

La tasa de acreción 4.20 para un agujero negro supermasivo con masa actual $M_0 = 10^8 M_\odot$ es:

$$\dot{M}_{\text{BH}}^{\text{CMB}} = 1.11 \times 10^3 \left(\frac{T_0}{a(t)} \right)^4 \frac{\text{g}}{\text{s K}^4}, \quad (5.3)$$

donde $T_0 = 2.725 \text{ K}$ es la temperatura actual del CMB. Utilizando los parámetros cosmológicos de la Tabla 5.1, integramos la tasa 5.3 en el tiempo cósmico desde la época actual t_0 para los distintos modelos de Friedmann:

$$\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t) = 1.11 \times 10^3 \frac{\text{g}}{\text{K}^4} \int_{t_0}^t \left(\frac{T_0}{a(t)} \right)^4 dt. \quad (5.4)$$

Graficamos el resultado de esta integral como función del tiempo cósmico t en la Figura 5.2.

En los gráficos de la Figura 5.2 vemos que la masa de un agujero negro crece con el tiempo cósmico t debido a la acreción de fotones del CMB. En los modelos plano y abierto, $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$ tiene un comportamiento asintótico para $t > 6.3 \times 10^{18} \text{ s}$. Esto se debe a que la densidad y energía de los fotones del CMB es inversamente proporcional al factor de escala normalizado $a(t)$. Los agujeros negros, por lo tanto, acretan fotones cada vez menos energéticos debido a la expansión del universo. Contrariamente, en el modelo de Friedmann cerrado, $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$ tiende a infinito cuando el universo recae pues la densidad y energía de los fotones diverge.

5.3. Cálculo del factor de llenado

Habiendo integrado la tasa de acreción de fotones del CMB para un agujero negro supermasivo en los distintos modelos cosmológicos de Friedmann, procedemos a calcular el factor de llenado $f(t)$ definido en la Sección 4.4.

Para realizar el cálculo recurrimos a la expresión 4.26. Elegimos la coordenada radial

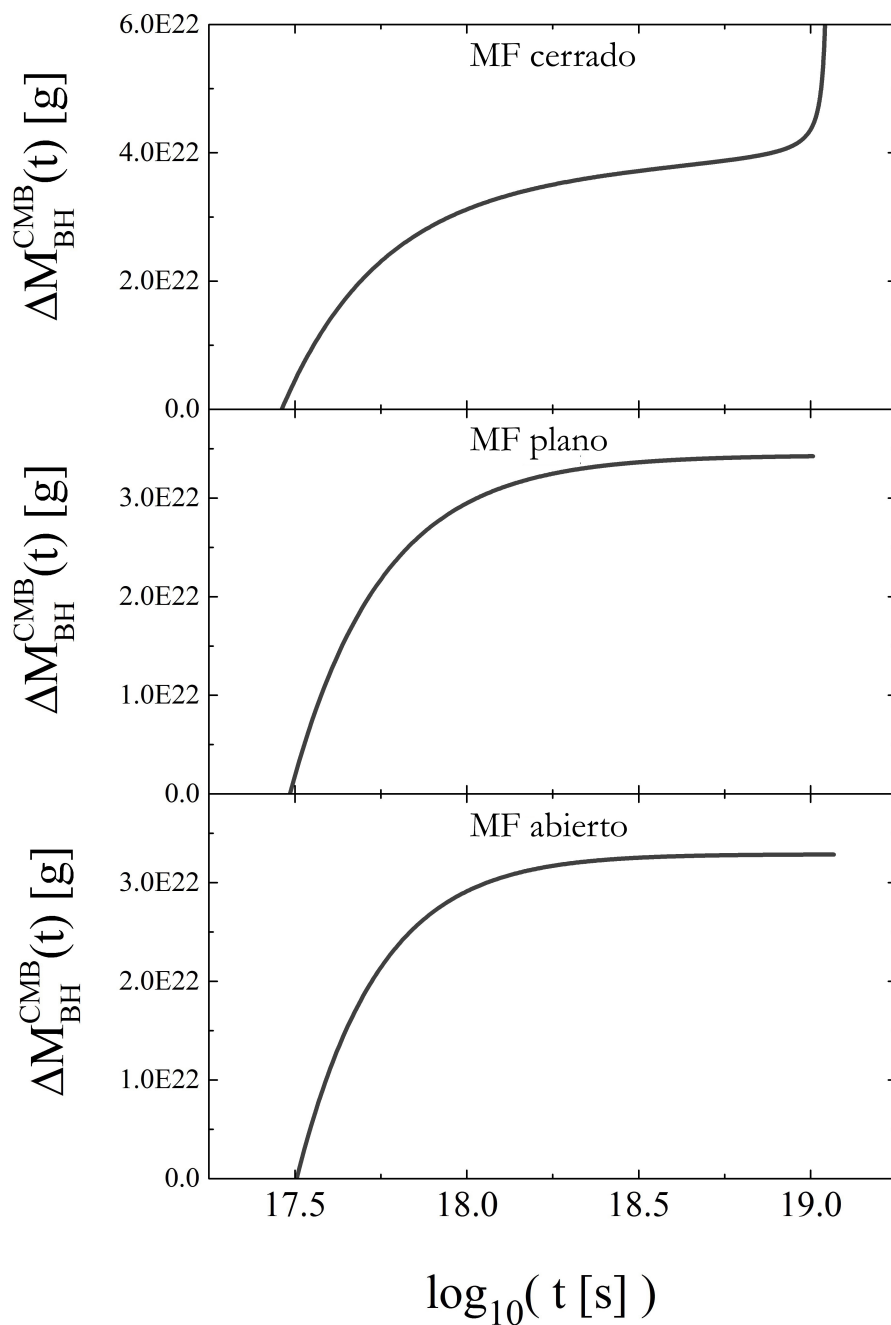


Figura 5.2: Gráficos de la función $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$ en función del tiempo cósmico para los modelos cosmológicos de Friedmann cerrado, plano y abierto, respectivamente.

para la hipersuperficie esférica tipo espacio:

$$r = \frac{2GM_0}{c^2 R_0}, \quad (5.5)$$

de forma que el factor de llenado sea igual a 1 en la época actual. Con esta elección, la expresión 4.26 toma la forma:

$$f(t) = 1 + \frac{2\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)}{M_0 a(t)} + \frac{\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)^2}{M_0^2 a(t)^2}. \quad (5.6)$$

En la Figura 5.3 graficamos los dos últimos términos de la ecuación anterior para los distintos modelos cosmológicos de Friedmann en función del tiempo cósmico t . Para realizar el cálculo, utilizamos los parámetros cosmológicos de la Tabla 5.1, la masa actual del agujero negro supermasivo $M_0 = 10^8 M_\odot$ y la función $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$ calculada en la sección anterior.

De la Figura 5.3 notamos que $f(t) - 1$ es siempre positivo, es decir, $f(t)$ es siempre mayor que su valor actual para $t > t_0$. El crecimiento de los agujeros negros cosmológicos supera al crecimiento de las hipersuperficies esféricas tipo espacio en expansión cósmica. Para los modelos abierto y plano, $f(t) - 1$ crece hasta un máximo local en $t = 6.6 \times 10^{17}$ s y luego tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Contrariamente, en el modelo cerrado, $f(t) - 1$ tiene un máximo y un mínimo local en $t = 6.76 \times 10^{17}$ s y $t = 5.37 \times 10^{18}$ s, respectivamente. Luego, $f(t) - 1$ diverge hacia el recolapso, o big crunch. Las formas de $f(t) - 1$ para los distintos modelos está directamente relacionada con la energía y densidad de los fotones del CMB para $t > t_0$.

5.4. Agujeros negros y Electrodinámica

Las interacciones electromagnéticas dominan los procesos macroscópicos que percibimos diariamente. Las interacciones fuertes y débiles son despreciables pues poseen un rango de acción microscópico. La gravedad, por otro lado, domina a escalas cosmológicas pero puede despreciarse localmente frente a las interacciones electromagnéticas. Por este motivo, en la búsqueda de los orígenes de la irreversibilidad de los procesos macroscópicos, comenzamos buscando soluciones temporalmente asimétricas de la Electrodinámica Clásica.

La radiación electromagnética puede describirse en términos del cuadripotencial A^μ que satisface las ecuaciones de Maxwell (gauge de Lorenz):

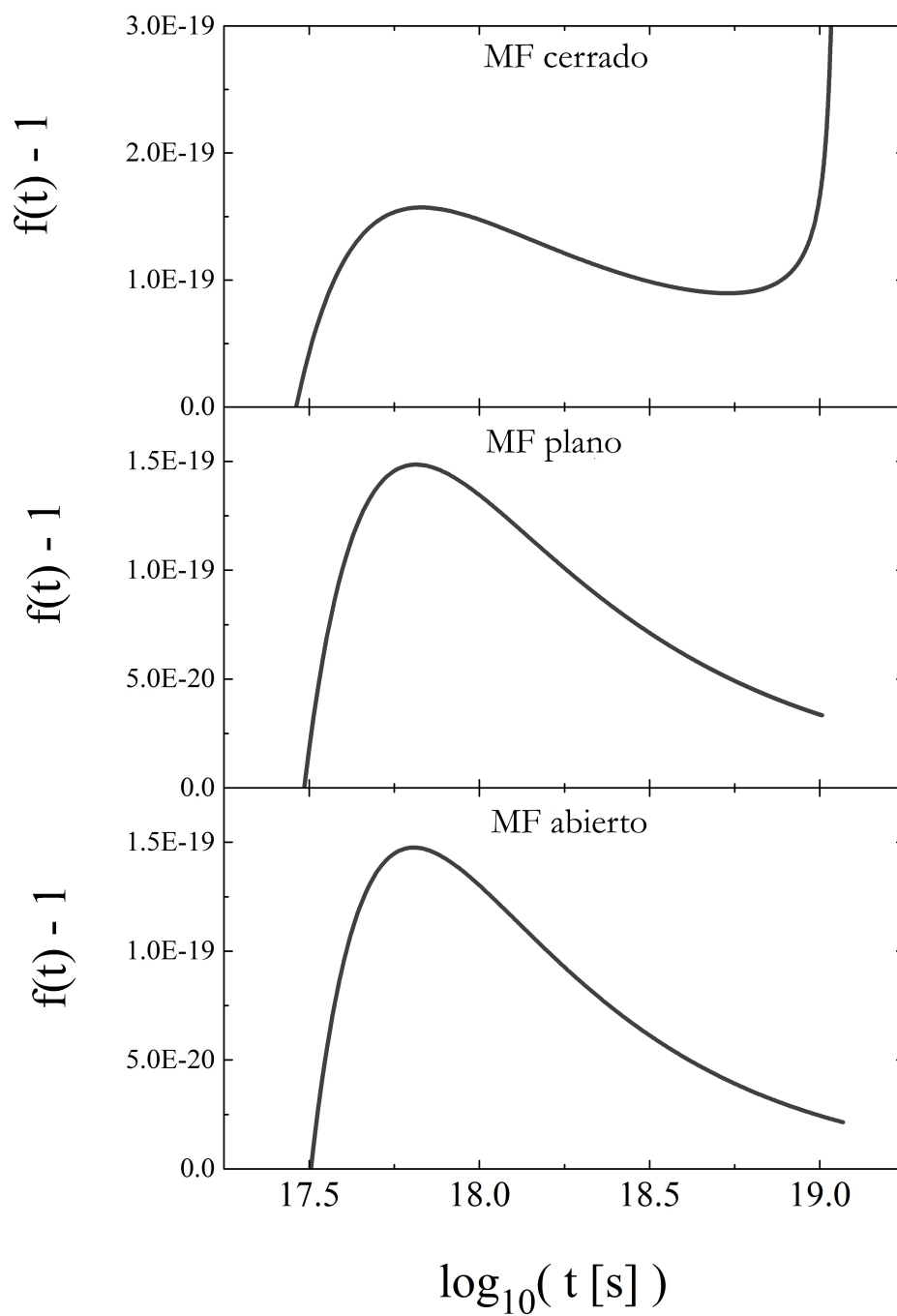


Figura 5.3: Gráficos de $f(t) - 1$ en función del tiempo cósmico t , para los distintos modelos cosmológicos de Friedmann.

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(\vec{r}, t) = 4\pi j^\mu(\vec{r}, t), \quad (5.7)$$

donde hemos utilizado unidades tales que $c = 1$, y j^μ denota la cuadricorriente electromagnética.

Las soluciones de la Ecuación 5.7 son funcionales de las fuentes j^μ . Resultan soluciones retrasadas y avanzadas:

$$A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t) = \int_{V_{\text{ret}}} \frac{j^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}', \quad (5.8)$$

$$A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t) = \int_{V_{\text{adv}}} \frac{j^\mu(\vec{r}', t + |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \quad (5.9)$$

Estas funcionales de la cuadricorriente $j^\mu(\vec{r}, t)$ se relacionan por inversión temporal. Mientras que la solución 5.8 depende de la cuadricorriente electromagnética en el pasado causal ($V_{\text{ret}} = J^-(p)$) del evento $p(\vec{r}, t)$, la solución 5.9 depende de la cuadricorriente en el futuro causal ($V_{\text{adv}} = J^+(p)$) del mismo evento.

Argumentando que la solución avanzada “viola causalidad”, suele considerarse sólo la solución retrasada para calcular el tensor de campo electromagnético: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Esta elección es una hipótesis temporalmente asimétrica que no contribuye a la comprensión de los orígenes de la irreversibilidad observada. Por la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y por el Principio de Superposición, una combinación lineal de soluciones también es solución. Consideramos entonces la solución temporalmente simétrica:

$$A^\mu = \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^\mu + A_{\text{adv}}^\mu). \quad (5.10)$$

En el espacio-tiempo de Minkowski, los conos de luz pasado y futuro que determinan la estructura causal de un evento $p(\vec{r}, t)$ son idénticos. Las fuentes en el pasado causal coinciden con las fuentes del futuro causal; las soluciones retrasada y avanzada son iguales. Esto no sucede en un espacio-tiempo donde existen interacciones gravitatorias. Ciertamente, las fuentes electromagnéticas en los conos de luz pasado y futuro del evento $p(\vec{r}, t)$ pueden diferir debido a la curvatura del espacio-tiempo.

Romero y Pérez (2011) mostraron que, si el universo se expande aceleradamente, las fuentes electromagnéticas en $J^-(p)$ y $J^+(p)$ son distintas debido a la existencia de horizontes de partículas. En estos universos, las soluciones retrasadas y avanzadas difieren, y puede definirse un campo vectorial L^μ no nulo:

$$L^\mu = [A_{\text{ret}}^\mu - A_{\text{adv}}^\mu] \neq 0. \quad (5.11)$$

La asimetría en la distribución de cargas se debe a la expansión del horizonte de partículas. Dicha expansión sigue a la expansión del universo. Por este motivo, esperamos que $g_{\mu\nu}L^\mu t^\nu \neq 0$, donde $t^\nu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$. Es decir, esperamos que exista una dirección temporal preferencial en el espacio-tiempo para el flujo de energía electromagnética hacia el futuro global.

El trabajo de Romero y Pérez está basado en la expansión acelerada del universo y la consecuente existencia de horizontes de partículas. El objetivo de esta sección es mostrar que también existe una dirección temporal preferencial para el flujo de energía electromagnética en modelos cosmológicos sin expansión acelerada. En estos casos, el apantallamiento de corrientes se debe a la existencia de horizontes de eventos de agujeros negros.

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo desconectadas causalmente del futuro global (ver Sección 4.1). Los modelos cosmológicos de Friedmann poseen contenido de materia tipo polvo. Eventualmente, un agujero negro inmerso en un universo de Friedmann acreta cargas y corrientes electromagnéticas. Cuando esto sucede, ocurre un apantallamiento de corrientes electromagnéticas en el dominio causal de algunos eventos $p(\vec{r}, t)$. Las soluciones $A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t)$ y $A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t)$ difieren y podemos definir nuevamente un campo vectorial no nulo:

$$D^\mu(\vec{r}, t) = [A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t) - A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t)], \quad (5.12)$$

tal que $g_{\mu\nu}D^\mu t^\nu \neq 0$, con $t^\nu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$. Es decir, surge una dirección temporal preferencial en el espacio-tiempo para el flujo de energía electromagnética debido a la existencia de horizontes de eventos.

En la sección anterior mostramos que, para $t > t_0$, el factor de llenado $f(t)$ es mayor que el valor actual $f(t_0)=1$ en los modelos cosmológicos de Friedmann. El crecimiento del área del horizonte de eventos de un agujero negro cosmológico es mayor que el crecimiento del área de una hipersuperficie esférica tipo espacio en expansión cósmica. En otras palabras, los agujeros negros cosmológicos tienen un crecimiento neto en el tiempo dentro de un elemento de volumen cosmológico. Este crecimiento neto asegura la acreción y apantallamiento de corrientes electromagnéticas que genera la asimetría en la distribución de corrientes pasada y futura respecto a *cualquier* evento $p(\vec{r}, t)$ del espacio-tiempo.

Como mencionamos, la dirección temporal preferencial para el flujo de energía electromagnética en cada evento $p(\vec{r}, t)$ está determinada por el apantallamiento de corrientes futuras por los horizontes de eventos de los agujeros negros cosmológicos. La acreción de corrientes por estos objetos se produce debido al crecimiento de sus horizontes de eventos

a medida que el universo se expande. Por lo tanto, la dirección preferencial para el flujo de energía electromagnética sigue al crecimiento de los agujeros negros cosmológicos y coincide con la dirección hacia el futuro global del espacio-tiempo. Es decir, esperamos que $g_{\mu\nu}D^\mu t^\nu > 0$; donde $t^\nu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$ marca la dirección de expansión cosmológica hacia el futuro global.

Capítulo 6

Conclusiones

Para explicar procesos irreversibles en términos de leyes fundamentales, es necesario incluir hipótesis o condiciones iniciales temporalmente asimétricas. Encontrar estas condiciones no es una tarea sencilla pero significa un avance en la comprensión de la dinámica detrás de estos procesos y del origen de la irreversibilidad.

Suponemos que condiciones iniciales cosmológicas ocasionan procesos irreversibles, o “flechas del tiempo”, de naturaleza gravitatoria como la expansión del universo y la existencia de agujeros negros. Ante la falta de una teoría cuántica de la gravedad, no podemos detallar cuáles fueron estas condiciones. Sin embargo, inferimos condiciones iniciales de baja entropía gravitacional.

Calculamos una cota mínima para el crecimiento de un agujero negro supermasivo inmerso en los modelos cosmológicos de Friedmann. El factor de llenado $f(t)$ de estos objetos en un elemento de volumen cósmico resultó ser mayor al valor actual t_0 , si $t > t_0$. Esto conlleva a que haya más corrientes apantalladas en el futuro causal que en pasado causal de cualquier evento $p(\vec{r}, t)$. Mostramos que este hecho implica la existencia de una dirección temporal preferencial para el flujo de energía electromagnética local, que sigue a la expansión del universo hacia el futuro global.

Interpretamos esta dirección preferencial para el flujo de energía electromagnética como la “flecha de radiación” que mencionamos en la Introducción. Por otro lado, el flujo de energía electromagnética S se relaciona con la temperatura macroscópica T de un cuerpo por medio de la ley de Stefan-Boltzmann: $S = \sigma T^4$, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. La radiación electromagnética emitida por un cuerpo a temperatura T seguirá a la “flecha de radiación”. Luego, por conservación local de la energía, la temperatura T del cuerpo debe decrecer hacia el futuro global, aumentando la entropía según la segunda

ley de la Termodinámica.

Concluimos que existe un acoplamiento entre procesos irreversibles locales de naturaleza electromagnética con procesos irreversibles globales de naturaleza gravitacional. Estos últimos provocados por condiciones iniciales cosmológicas.

Hawking predijo que el sentido en que ocurren los eventos debe invertirse en un universo en contracción. Nuestro trabajo implica que esta predicción es errónea pues mostramos que la entropía debe aumentar incluso durante el período de contracción en el modelo de Friedmann cerrado.

Para finalizar, utilizamos nuestros resultados para analizar la factibilidad de *universos cíclicos*. En los modelos de Friedmann abierto y plano, la temperatura del CMB tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, existe un instante t_H en el cual la temperatura del CMB será menor que la “temperatura” del agujero negro supermasivo. Es decir, en el instante t_H las pérdidas de energía del agujero negro por radiación de Hawking son mayores que la energía incorporada por la acreción de fotones del CMB. A partir de ese momento, el agujero negro comenzará a perder energía o “evaporarse”. Cuando el agujero negro se haya evaporado completamente, el universo contendrá sólo un gas de fotones en equilibrio térmico. La entropía termodinámica de este sistema será máxima. Sin embargo, ante la ausencia total de estructuras, la entropía gravitacional de este sistema será mínima. Estas condiciones son similares a las condiciones iniciales que inferimos anteriormente para el origen del universo. La posibilidad, pues, de un universo cíclico es sugerente.

Apéndice A

La propuesta de Hawking-Hayward

En esta tesis estudiamos dos aplicaciones importantes de la Teoría de la Relatividad General: la solución de Schwarzschild (Sección 4.1) y los modelos cosmológicos de FLRW (Sección 3.2). A continuación, buscaremos soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que modelen al espacio-tiempo de un agujero negro de Schwarzschild embebido en un universo de FLRW y apoyen a la propuesta de masa cuasi-local de Hawking-Hayward para la masa de un agujero negro cosmológico (Sección 4.2).

Las soluciones de McVittie

En 1933, George McVittie encontró soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que incluían a la solución de Schwarzschild y a la geometría de FLRW en los límites apropiados (McVittie, 1933). El contenido de materia en el modelo de McVittie es de tipo polvo y tiene simetría esférica respecto al origen de coordenadas $r = 0$, donde se encuentra una partícula con masa constante M_0 .

La métrica de McVittie en coordenadas isotrópicas y en unidades de Planck para un modelo de universo asintótico de tipo FLRW plano es:

$$ds^2 = - \frac{\left[1 - \frac{M_0}{2ra(t)}\right]^2}{\left[1 + \frac{M_0}{2ra(t)}\right]^2} dt^2 + a(t)^2 \left[1 + \frac{M_0}{2ra(t)}\right]^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (\text{A.1})$$

donde M_0 es la masa central, $a(t)$ el factor de escala normalizado del modelo cosmológico asintótico y $d\Omega^2$ el elemento de línea de la 2-esfera unitaria. La métrica A.1 se reduce a la

solución de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas si $a(t) = 1$, y describe una geometría de tipo FLRW plana si $M_0 = 0$.

Para los casos en que el modelo cosmológico asintótico tiene curvatura no nula, McVittie propuso las métricas:

$$ds^2 = -\frac{\left[1 - \frac{M_0}{2ra(t)} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{1/2}\right]^2}{\left[1 + \frac{M_0}{2ra(t)} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{1/2}\right]^2} dt^2 + \frac{\left[1 + \frac{M_0}{2ra(t)} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{1/2}\right]^4}{\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2} a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (\text{A.2})$$

donde la constante $R^2 = -1, 1$ determina el signo de la curvatura espacial.

Interpretar al modelo de McVittie como el espacio-tiempo de un agujero negro de Schwarzschild embebido en un universo tipo FLRW es tentador, pero incorrecto. La superficie $r = M_0/2$, que debería representar al horizonte de eventos, es una superficie singular de tipo espacio (Nolan, 1999). Además, la presión y el escalar de Ricci divergen en $r = M_0/2$. Debido a estos problemas, las interpretaciones físicas de las soluciones de McVittie se mantienen en debate (ver Sussman, 1985; Ferraris, et al., 1996; Nolan, 1999).

La propuesta de Hawking-Hayward en el modelo de Friedmann plano

En la Sección 4.1 definimos a un agujero negro como una región particular de algunos espacios-tiempo. Entonces, en caso que el espacio-tiempo se expanda globalmente, es de esperar que el agujero negro lo haga de la misma forma. En este sentido, aceptamos la propuesta de masa cuasi-local de Hawking-Hayward para la evolución de la masa de un agujero negro cosmológico (Hawking, 1968; Hayward, 1994):

$$M_{\text{BH}}^{\text{HH}}(t) = M_0 a(t). \quad (\text{A.3})$$

En la métrica de McVittie A.1, reemplazamos la masa central por la propuesta de Hawking-Hayward: $M_0 \rightarrow M_0 a(t)$. Obtenemos el elemento de línea:

$$ds^2 = -\frac{\left[1 - \frac{M_0}{2r}\right]^2}{\left[1 + \frac{M_0}{2r}\right]^2} dt^2 + a(t)^2 \left[1 + \frac{M_0}{2r}\right]^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (\text{A.4})$$

Gao, et al. (2008) demostraron que la métrica A.4 se corresponde, por medio de las ecuaciones de campo de Einstein, con el tensor de energía-impulso:

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (\text{A.5})$$

donde $u^\mu \rightarrow (|g_{00}|^{-1/2}, 0, 0, 0)$ y $q^\mu \rightarrow (0, q, 0, 0)$. Además:

$$8\pi\rho = -G_0^0, \quad (\text{A.6})$$

$$8\pi P = G_1^1 = G_3^3 = G_2^2, \quad (\text{A.7})$$

$$8\pi q = \frac{1 - \frac{M_0}{2r}}{1 + \frac{M_0}{2r}} G_0^1, \quad (\text{A.8})$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

Si calculamos el tensor de Einstein para la métrica A.4 con el factor de escala del modelo de Friedmann plano obtenemos las componentes no nulas:

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2, \quad (\text{A.9})$$

$$G_{01} = \frac{8}{4r^2 - 1} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (\text{A.10})$$

Reemplazando estas expresiones en las Ecuaciones A.6, A.7 y A.8 podemos interpretar al contenido de materia como polvo ($P = 0$) que está siendo acretado por la masa central ($q < 0$). De esta forma, la métrica A.4 con el factor de escala del modelo de Friedmann plano es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein que valida la propuesta de Hawking-Hayward.

La propuesta de Hawking-Hayward en los modelos de Friedmann abierto y cerrado

Procediendo en forma análoga a la sección anterior, reemplazamos la propuesta de masa cuasi-local de Hawking-Hayward A.3 en las métricas de McVittie A.2 para modelos cosmológicos con curvatura espacial no nula. Obtenemos el elemento de línea:

$$ds^2 = - \frac{\left[1 - \frac{M_0}{2r} \left(1 \pm \frac{r^2}{4} \right)^{1/2} \right]^2}{\left[1 + \frac{M_0}{2r} \left(1 \pm \frac{r^2}{4} \right)^{1/2} \right]^2} dt^2 + \frac{\left[1 + \frac{M_0}{2r} \left(1 \pm \frac{r^2}{4} \right)^{1/2} \right]^4}{\left(1 \pm \frac{r^2}{4} \right)^2} a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (\text{A.11})$$

donde los signos \pm determinan el signo de la curvatura espacial.

No hemos encontrado trabajos que analicen el tensor de energía-impulso correspondiente a la métrica A.11.

Calculamos las componentes del tensor de Einstein para las métricas A.11 con los factores de escalas de los modelos cosmológicos de Friedman cerrado y abierto. Obtuvimos las componentes no nulas:

$$G_{00} = f(r) \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2, \quad (\text{A.12})$$

$$G_{01} = g(r) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (\text{A.13})$$

$$G_{ii} \approx \pm 10^{-38} h(r), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.14})$$

donde las funciones $f(r), g(r), h(r)$ son funciones adimensionales cuyo comportamiento debemos analizar. Las componentes del tensor de Einstein sugieren una interpretación de contenido de materia tipo polvo ($P = 0$), consistente con los modelos cosmológicos de Friedmann. La propuesta Hawking-Hayward parece ser validada por las métricas A.11 con los factores de escala de los modelos de Friedmann cerrado y abierto.

Bibliografía

- [1] Boltzmann L., *Wiener Berichte*, **66**, 275 (1872).
- [2] Boltzmann L., *Wiener Berichte*, **76**, 373 (1877).
- [3] Boltzmann L., *Nature*, **51**, 413 (1895).
- [4] Bunge M.A., *Foundations of Physics* (Springer, Nueva York, 1967).
- [5] Bunge M.A., *Treatise on basic philosophy - Vol III. Ontology I: the Furniture of the World* (Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1977).
- [6] Burbury S.H., *Nature*, **52**, 78 (1894).
- [7] Burbury S.H., *Nature*, **52**, 320 (1895).
- [8] Booth I., *Can. J. Phys.*, **83**, 1073-1099 (2005).
- [9] Casares J., en: Karas V., Matt G. (editores), *Proceedings IAU Symposium* **238**, Vol. 2, 3-12 (2006).
- [10] Camenzind M., *Compact objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes* (Springer, Berlín, 2007).
- [11] Clifton T., Ellis G.F.R., Tavakol R., *Class. Quant. Grav.*, **30**, 125009 (2013).
- [12] D'Inverno R., *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, Nueva York, 1992).
- [13] Eddington A.S., en: *The Nature of the Physical World: Gifford Lectures* (Cambridge University Press, Nueva York, 1928).
- [14] Faraoni V., *Galaxies*, **1**, 114-179 (2013).
- [15] Faraoni V., Jacques A., *Phys. Rev. D*, **76**, 063510 (2007).

- [16] Ferraris M., Francaviglia M. & Spallicci A., *Nuovo Cimento B* **111**, 1031 (1996).
- [17] Gao C., Chen X., Faraoni V., Shen Y., *Phys. Rev. D*, **78**, 024008 (2008).
- [18] Hawking S.W., *J. Math. Phys.*, **9**, 598-604 (1968).
- [19] Hawking S.W., Ellis G.F.R., *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Nueva York, 1973).
- [20] Hawking S.W., Penrose R., *Proceedings of the Royal Soc. of London A*, **314**, 529-548 (1970).
- [21] Hayward S.A., *Phys. Rev. D*, **49**, 831-839 (1994).
- [22] Henry R.C., *The Astrophysical Journal (The American Astronomical Society)* **535**, 350-353 (2000).
- [23] Horwich P., *Asymmetries in Time* (The MIT Press, Cambridge (MA), 1987).
- [24] Hobson M.P., Efstathiou G.P. & Lasenby A.N., *General Relativity: An Introduction for Physicists* (Cambridge University Press, Nueva York, 2006).
- [25] Lemaitre G., *Publication du Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain* **9**, 171-205 (1932).
- [26] Loschmidt J., *Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss.*, **73**, 128-142 (1876).
- [27] McVittie G. C., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. **93**, 325-339 (1933).
- [28] Nolan B.C., *Classical Quantum Gravity* **16**, 3183 (1999).
- [29] Paredes J.M., en: Romero G.E. & Benaglia P. (editores), *Compact Objects and their Emission*, Argentinian Astronomical Society Book Series, Vol. 1, 91-121 (2009).
- [30] Penrose R., *Gen. Relat. and Grav.*, **10**, 12, 582 (1979).
- [31] Perez D., Romero G.E., *General Relativity and Gravitation* **46**, 1774 (2014).

- [32] Planck Collaboration, *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, arXiv:1303.5076 (2014). A ser publicado en *A & A*.
- [33] Price H., *Time's Arrow and Archimedes' Point* (Oxford University Press, Nueva York 1996).
- [34] Price H., en: Hitchcock C. (editor), *Contemporary Debates in Philosophy of Science* (Blackwell, Singapur, 2004).
- [35] Rich J., *Fundamentals of Cosmology* (Springer, Berlín, 2001).
- [36] Romero G.E., Pérez D., *Int. J. Modern Phys. D.*, **20**, 2831-2838 (2011).
- [37] Romero G. E., Thomas R. & Pérez D., *Int. J. Theor. Phys.*, **51**, 925942 (2012).
- [38] Romero G.E., *Foundations of Science*, **18**, 297-306 (2013).
- [39] Romero G.E. & Vila G.S., *Introduction to Black Hole Astrophysics. Lectures notes in Physics* (Springer, Berlín, 2013).
- [40] Romero G.E., en: Abraham Barton (editor), *Advances in Black Hole Reserch* (Nova Science Publishers). arXiv:1409.3318v1 (2014).
- [41] Rudjord Ø., Grøn Ø. & Hervik, S., *Phys. Scr.*, **77**, Issue 5, 055901, 1-7 (2008).
- [42] Savitt S.F., *Time's Arrows Today* (Cambridge University Press, Nueva York, 1995).
- [43] Sultana J. & Dyer C.C., *Gen. Rel. Grav.*, **37**, 1347-1370 (2005).
- [44] Sussman R., *Gen. Relativ. Gravit.* **17**, 251 (1985).
- [45] Wald R.M., *General Relativity* (The university of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [46] Westman H. & Sonogo S., *Annals of Physics*, **324**, 1585-1611 (2009).
- [47] Yourgrau W., van der Merwe A. & Raw G., *Treatise on irreversible and statistical thermophysics* (Dover Publications, Nueva York, 1982).