

Agujeros negros de Born-Infeld

Florencia L. Vieyro

Profesor: Dr. Gustavo E. Romero

Materia: Introducción a la astrofísica de agujeros negros

12 de mayo de 2010

Índice

1. Introducción	2
2. Agujeros negros de Reissner-Nordström	2
2.1. Ecuaciones de Einstein	3
2.2. Agujeros negros cargados	3
2.3. Geometría de Reissner-Nordström	5
3. Electromagnetismo no lineal	6
3.1. Fundamentos de la teoría	7
3.2. Formalización del electromagnetismo no lineal	7
4. Agujeros negros de Born-Infeld: generalización de la solución de Reissner-Nordström	9
5. Estudio de las geodésicas en agujeros negros de BI	12
5.1. Partículas masivas	13
5.2. Partículas sin masa: fotones y gravitones	15
6. Conclusiones	17
A. Sistemas de unidades electromagnéticas	19

1. Introducción

Las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo (ecuaciones lineales) han sido exitosas describiendo una gran cantidad de fenómenos físicos a nivel clásico. Sin embargo, desde el punto de vista de la física teórica, la situación no es enteramente satisfactoria. Al resolver las ecuaciones de Maxwell para una carga puntual se obtiene un campo que diverge en la posición de la carga. Desde comienzos del siglo XX, ha habido diversos intentos de eliminar este resultado poco atractivo de esta teoría. Entre los más exitosos se encuentra el de Born e Infeld (BI), basado en la elección de una acción no lineal, con un máximo en la intensidad del campo. Born e Infeld resuelven las ecuaciones de campo resultantes de la nueva acción en el caso de una carga puntual, y obtienen lo que se conoce como *solución esféricamente simétrica* (SSS). El resultado difiere significativamente del campo coulombiano en el entorno de una carga puntual donde los campos son más intensos, y encuentran un campo que es finito en todo punto, incluso en la posición de la carga.

A pesar de ser finita en todo el espacio, la solución SSS de Born-Infeld posee una discontinuidad. Esta discontinuidad puede evitarse con la elección de otra acción no lineal. La generalización de la teoría de Born-Infeld acoplada con las ecuaciones de Einstein que estudia un conjunto de acciones fué desarrollada por Plebanski en 1966. Entre otras cosas, Plebanski muestra que existen numerosas acciones no lineales de las que se obtienen soluciones SSS no singulares y continuas en todo punto. Entre estas soluciones se encuentra una generalización no lineal de la solución de Reissner-Nordström (también estudiada por Pellicer y Torrence en 1969).

Este trabajo está centrado en el análisis de esta última solución, conocida como agujeros negros de Born Infeld. Esta solución describe el espacio-tiempo alrededor de un objeto con simetría esférica y con carga eléctrica, en el marco del electromagnetismo no lineal.

Primero, en la Sección 2, se describen brevemente los agujeros negros de Reissner-Nordström, solución de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica y una fuente cargada. Luego en la Sección 3 se introduce el formalismo del electromagnetismo no lineal (NLED) que sentará las bases para el estudio de los agujeros negros de Born-Infeld en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 se estudian las trayectorias de las partículas en la métrica de B-I.

2. Agujeros negros de Reissner-Nordström

En esta sección se discuten las propiedades y características de la solución de las ecuaciones de Einstein de Reissner-Nordström.

2.1. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones que relacionan la estructura geométrica del espacio tiempo con las fuentes de campo gravitatorio fueron halladas por Einstein (1915) e independientemente por Hilbert (1915) el 25 y el 20 de noviembre de 1915, respectivamente. Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de *energía-impulso* y representa las propiedades físicas de los objetos materiales. Las ecuaciones de campo son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales en los coeficientes de la métrica.

2.2. Agujeros negros cargados

A pesar de la complejidad de las ecuaciones de campo de Einstein, se han hallado diversas soluciones. Estas se obtienen imponiendo simetrías en el espacio tiempo para determinar los coeficientes de la métrica. La primera solución de las Ecs. (1) la obtuvo Karl Schwarzschild en 1916, y describe el espacio-tiempo en una región externa a un objeto con simetría esférica de masa M .

La métrica de Reissner-Nordström también es una solución con simetría esférica de las Ecs. (1). Sin embargo no es una solución de vacío, dado que la fuente posee una carga eléctrica, y consecuentemente, existe un campo eléctrico. El tensor de energía-impulso de este campo es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right), \quad (2)$$

donde:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (3)$$

es el tensor de campo electromagnético y A_{μ} es el tetravector potencial. Una propiedad importante para destacar de este tensor de energía-impulso es que es de traza nula,

$$T \equiv T_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho}F^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\mu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right) = 0. \quad (4)$$

Esto permite simplificar las ecuaciones de Einstein, que toman la forma:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Además de satisfacer estas ecuaciones, la solución debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Fuera de la fuente cargada el tetravector corriente j^μ es cero, entonces las ecuaciones de Maxwell son:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (6)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\sigma} + F^{\nu\sigma}{}_{;\mu} + F^{\sigma\mu}{}_{;\nu} = 0. \quad (7)$$

Las ecuaciones de Einstein y las de Maxwell están acopladas, dado que el $F^{\mu\nu}$ aparece en las ecuaciones de campo gravitatorio a través del tensor de energía-impulso, y la métrica $g_{\mu\nu}$ aparece en las ecuaciones electromagnéticas a través de la derivada covariante.

Debido a las restricciones impuestas por las simetrías el tetravector potencial se puede escribir como:

$$A^\mu = (\Phi(r), a(r), 0, 0), \quad (8)$$

donde $\Phi(r)$ es el potencial electrostático y $a(r)$ es la componente radial del 3-vector potencial cuando $r \rightarrow \infty$. Esta forma del tetravector potencial lleva al siguiente tensor de campo electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $E(r)$ puede ser interpretada como la componente radial del campo electrostático cuando $r \rightarrow \infty$.

La solución para la métrica está dada por:

$$ds^2 = -\psi_{\text{RN}} c^2 dt^2 + \psi_{\text{RN}}^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (9)$$

donde

$$\psi_{\text{RN}} = 1 - \frac{2GM/c^2}{r} + \frac{q^2}{r^2}. \quad (10)$$

En esta expresión M es la masa del agujero negro y $q^2 = GQ^2/c^4$ está relacionada con la carga eléctrica total Q (en el sistema de unidades gaussiano). La componente $E(r)$ del tensor de campo electromagnético está dada por:

$$E(r) = \frac{Q}{r^2}. \quad (11)$$

2.3. Geometría de Reissner-Nordström

La métrica tiene una singularidad esencial en $r = 0$ y singularidades coordenadas en los puntos donde $\psi_{\text{RN}}(r_{\pm}) = 0$, dados por:

$$r_{\pm} = \frac{GM}{c^2} \pm \left(\frac{(GM)^2}{c^4} - q^2 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

La Fig. (1) muestra la forma de la función métrica ψ_{RN} . Es claro que existen tres casos diferentes, dependiendo de los valores relativos de $r_g^2 = (GM)^2/c^4$ y Q^2 .

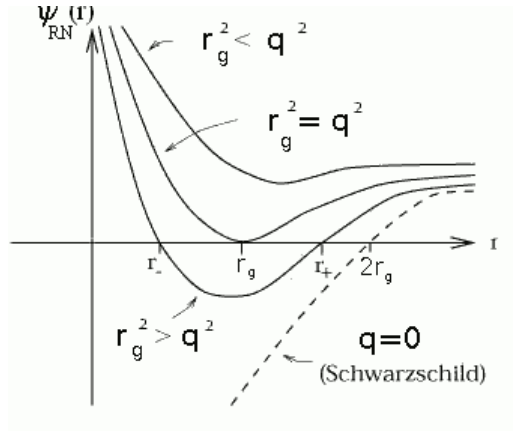


Figura 1: Forma de la función métrica ψ_{RN} . Dependiendo de los valores relativos de r_g^2 y q^2 se pueden distinguir tres casos.

- $r_g^2 = q^2$: en este caso se tiene un agujero negro de Reissner-Nordström *extremo* con un único horizonte de eventos en $r = GM/c^2$. Cabe destacar que un agujero negro de R-N puede ser más compacto que un agujero negro de Schwarzschild de la misma masa.
- $r_g^2 < q^2$: los r_{\pm} son imaginarios y ningún horizonte esconde la singularidad en $r = 0$ (singularidad desnuda). Se cree que no existen singularidades desnudas en la naturaleza.
- $r_g^2 > q^2$: en este caso hay dos horizontes de eventos en $r = r_{\pm}$. Cuanto mayor es la carga del agujero negro, los horizontes son más cercanos. Este es el caso de interés astrofísico.

Las propiedades del espacio tiempo de RN pueden ilustrarse mejor al estudiar las trayectorias de fotones. En la Fig. (2) se muestra un diagrama

espacio-temporal con la estructura de los conos de luz en esta geometría. Por claridad se usan las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Las trayectorias de los fotones entrantes son líneas rectas a 45° en el diagrama. Las trayectorias de los fotones salientes confirman la naturaleza del horizonte de eventos en $r = r_+$. Todas las partículas en la región $r_- < r < r_+$ se mueven en direcciones entrantes hasta alcanzar $r = r_-$ (puede probarse que una partícula puede cruzar la superficie $r = r_-$ en un tiempo propio finito). En la región $r < r_-$ los conos ya no están inclinados y por lo tanto las partículas no caen necesariamente a la singularidad en $r = 0$.

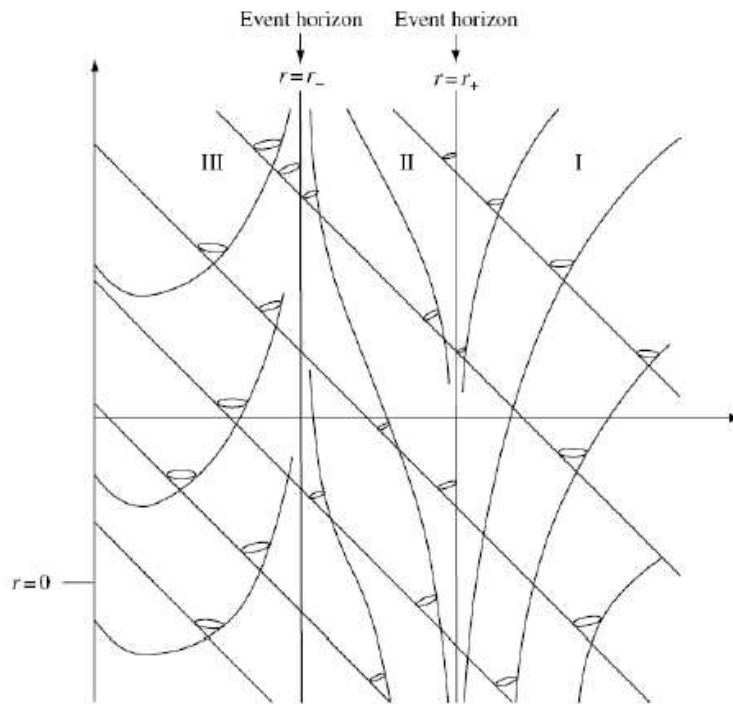


Figura 2: Diagrama espacio-temporal de la solución de Reissner-Nordström en las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Las líneas rectas son líneas de universo de fotones entrantes mientras que las líneas curvas corresponden a fotones salientes.

3. Electromagnetismo no lineal

En esta sección se introducen las ideas e hipótesis que dieron origen al electromagnetismo no lineal y luego se describe brevemente el formalismo de esta teoría.

3.1. Fundamentos de la teoría

Originalmente Born e Infeld se basaron en la idea de simplicidad para desarrollar su teoría, es decir, pidieron que el lagrangiano tuviera la forma “más simple” que respetaba ciertas condiciones.

Basándose en esta idea, Born e Infeld siguieron el razonamiento que se describe a continuación.

La mecánica descrita por la relatividad especial se obtiene a partir del lagrangiano

$$L = m_0 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \quad (13)$$

Históricamente, este se derivó a partir del concepto de invariantes relativistas, sin embargo bien podría obtenerse el mismo resultado a partir de los experimentos que muestran que los electrones no pueden acelerarse arbitrariamente. De estos se sabe que existe un límite superior a la velocidad, c ; y el lagrangiano (13) es la expresión más simple que es real sólo para $v < c$ y tiende a $m_0 c^2/2$ a bajas velocidades.

El problema de encontrar la misma ley para el electromagnetismo se puede abordar de una manera similar. A partir del lagrangiano clásico

$$L_{\text{em}} = -\frac{1}{8\pi}(B^2 - E^2), \quad (14)$$

pueden obtenerse valores muy altos en la intensidad de los campos, y en algunos casos hasta valores infinitos, que en realidad son finitos. Se postula entonces la existencia de un límite b para la intensidad de los campos, y análogamente a la mecánica, se construye el nuevo lagrangiano:

$$L_{\text{NLED}} = \frac{b^2}{4\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{B^2 - E^2}{b^2}} \right]. \quad (15)$$

En el caso no estático aparece un término adicional $b^{-4}(\bar{B}\bar{E})^2$.

3.2. Formalización del electromagnetismo no lineal

El lagrangiano que propone esta teoría, depende de manera no lineal con los invariantes del electromagnetismo, dados por:

$$F = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(B^2 - E^2), \quad (16)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} = -\bar{B} \cdot \bar{E}, \quad (17)$$

donde $\tilde{F}^{\alpha\beta} = (1/2\sqrt{-g})\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$ es el dual de $F^{\alpha\beta}$. Para que el lagrangiano sea invariante ante transformaciones de Lorentz y de paridad entonces debe depender de F y \tilde{G}^2 .

Las condiciones de integrabilidad de la Ec. (3) se conocen con la siguiente forma:

$$(\tilde{F}^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0. \quad (18)$$

Este es el primer conjunto de ecuaciones. El segundo conjunto de ecuaciones se obtiene minimizando la acción,

$$2\left(\frac{\partial L(F, \tilde{G}^2)}{\partial F^{\alpha\beta}}\right) = 0. \quad (19)$$

De esta manera las Ecs. (18) y (19) son la generalización de las ecuaciones de Maxwell.

Es conveniente introducir el formalismo hamiltoniano del sistema. Si se define

$$P^{\alpha\beta} = 2\frac{\partial L}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{\partial L}{\partial F}F^{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial \tilde{G}}\tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (20)$$

$$H = \frac{1}{2}P^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - L(F, \tilde{G}^2), \quad (21)$$

se puede trabajar tanto con $H(F, \tilde{G}^2)$ o con $H(P, \tilde{Q}^2)$, donde P y \tilde{Q} son los invariantes asociados a $P^{\alpha\beta}$,

$$P = \frac{1}{4}P_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}, \quad (22)$$

$$\tilde{Q} = \frac{1}{4}P_{\alpha\beta}\tilde{P}^{\alpha\beta}. \quad (23)$$

La Ec. (20) puede invertirse para expresar a $F_{\alpha\beta}$ en función de $P^{\alpha\beta}$, P y \tilde{Q} . Estas ecuaciones -conocidas como ecuaciones de Hamilton- son

$$F^{\alpha\beta} = 2\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha\beta}} = \frac{\partial H}{\partial P}P^{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}}\tilde{P}^{\alpha\beta}. \quad (24)$$

Sustituyendo la Ec. (24) en la Ec. (18) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\tilde{P}^{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}}P^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} = 0. \quad (25)$$

Esta ecuación, junto con la Ec. (19), son las ecuaciones del electromagnetismo de Born-Infeld.

El marco (P, \tilde{Q}) es una forma alternativa del electromagnetismo no lineal que se obtiene a partir del original, el marco (F, \tilde{G}) , mediante una transformación de Legendre. Las condiciones físicas deben ser impuestas sobre $H(P, \tilde{Q})$. Para campos débiles los efectos no lineales son despreciables y la teoría debe tener como límite el electromagnetismo lineal, es decir $H(P, \tilde{Q}) = P + O(P^2, \tilde{Q}^2)$.

En este formalismo, $F^{\alpha\beta}$ es el tensor con significado físico, mientras que $P^{\alpha\beta}$ no lo es. Las teorías no lineales logran que $F^{\alpha\beta}$ sea una cantidad bien comportada haciendo que $P^{\alpha\beta}$ absorba las singularidades de las fuentes.

Las ecuaciones acopladas entre la gravitación y el electromagnetismo no lineal se derivan a partir de la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi} - L \right), \quad (26)$$

donde R es el escalar de curvatura, $g := \det|g_{\mu\nu}|$ y L , la parte electromagnética, tiene una dependencia no lineal con los invariantes de $F_{\mu\nu}$, en el marco (P, \tilde{Q}) , o con los invariantes de $F_{\mu\nu}$ en el esquema (F, \tilde{G}) .

El tensor de energía impulso y el escalar de curvatura están dados por:

$$4\pi T_{\mu\nu} = \frac{\partial H}{\partial P} P_{\mu\alpha} P_{\nu}^{\alpha} - g_{\mu\nu} \left(2P \frac{\partial H}{\partial P} + \tilde{Q} \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} - H \right), \quad (27)$$

$$R = 8 \left(P \frac{\partial H}{\partial P} + \tilde{Q} \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} - H \right) \quad (28)$$

Es importante destacar que en este caso la traza de $T_{\mu\nu}$, y consecuentemente, el escalar de curvatura R , pueden ser distintos de cero.

Como ya se mencionó anteriormente, el electromagnetismo de Born-Infeld surge del lagrangiano (15), a partir del cuál se obtiene el siguiente hamiltoniano:

$$H = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - 2P/b^2 + \tilde{Q}^2/b^4} \right) \quad (29)$$

donde b es la máxima intensidad de los campos y el parámetro relevante en la teoría de Born-Infeld.

4. Agujeros negros de Born-Infeld: generalización de la solución de Reissner-Nordström

La solución de Einstein-Born-Infeld en las llamadas *coordenadas canónicas* (t, r, θ, ϕ) y en términos de las funciones elípticas de Legendre $F(\beta, \kappa) := \int_{\beta}^{\infty} (1 - \kappa^2 \sin^2 s)^{-1/2}$, está dada por:

$$ds^2 = -\psi_{\text{BI}}c^2dt^2 + \psi_{\text{BI}}^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (30)$$

$$\psi_{\text{BI}}(r) = 1 - \frac{2GM/c^2}{r} + \frac{2}{3}b^2r^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2r^4}} + \frac{4Q^2}{3r}G(r) \right] \quad (31)$$

$$G(r) = \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} = \sqrt{\frac{b}{Q}}F \left[\arccos \left(\frac{br^2/Q - 1}{br^2/Q + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (32)$$

Nuevamente en el sistema de unidades gaussiano, M es la masa del agujero negro, Q es la carga eléctrica y b es el parámetro de Born-Infeld que corresponde a la magnitud del campo eléctrico en $r = 0$. Con la sustitución $Q \rightarrow \sqrt{Q^2 + g^2}$, la solución incluye la llamada *carga magnética* (que proviene del hecho de que en la teoría de Born-Infeld existe una simetría de rotaciones duales eléctrica-magnética).

La componente no nula del tensor de campo electromagnético es:

$$F_{rt} = \frac{Q}{\sqrt{r^4 + Q^2/b^2}}. \quad (33)$$

Como ya se mencionó, en electromagnetismo no lineal el papel del tensor $F_{\mu\nu}$ lo juega el tensor $P_{\mu\nu}$, que en el caso de la solución de Born-Infeld está dado por

$$P_{rt} = \frac{Q}{r^2}. \quad (34)$$

De las Ecs. (33)-(34) puede verse que P_{rt} es singular en el origen, mientras que F_{rt} en $r = 0$ da un valor finito que corresponde a la magnitud b .

Las dos componentes no nulas del campo electromagnético de Born-Infeld, Ec. (27), están dadas por:

$$8\pi T_{r\theta} = 2b^2 \left[\left(1 + \frac{Q^2}{b^2r^4} \right)^{-1/2} - 1 \right], \quad (35)$$

$$8\pi T_{\theta\phi} = 2b^2 \left[\left(1 + \frac{Q^2}{b^2r^4} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (36)$$

En el límite de $b \rightarrow \infty$, se recupera la solución electromagnética lineal (Einstein-Maxwell) de Reissner-Nordström, cuyo elemento de línea está dado por la Ec. (9), y la componente no nula del tensor de campo electromagnético es $F_{rt} = Q/r^2$.

Para obtener este límite a partir de las Ecs. (31)-(33) se debe tener en cuenta el comportamiento de la función integral F ,

$$F \left[\arccos \left(\frac{br^2/Q - 1}{br^2/Q + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 2\sqrt{\frac{Q}{b}} \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{Q^2/b^2 + s^4}}. \quad (37)$$

En el límite $b \rightarrow \infty$ el tercer término de la métrica ψ_{BI} es $-Q^2/3r^2$ mientras que el último término es $4Q^2/3r^2$; la suma de ambos da Q^2/r^2 , que es igual a ψ_{RN} . Claramente, en el límite $Q = 0$ se obtiene la solución de Schwarzschild.

Existe un único escalar de Weyl no nulo, Ψ_2 , dado por:

$$\Psi_2 = \frac{M}{r^3} - \frac{Q^2 r^3}{6} \partial_r \left[\partial_r \left(\frac{1}{r^2} \int_r^\infty \frac{ds}{s^2 + \sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} \right) \right]. \quad (38)$$

Los invariantes de esta solución dependen de Ψ_2^2 , por lo que en $r = 0$ existe una singularidad de orden $1/r^6$, que proviene del primer término (similar al caso de Schwarzschild y Reissner-Nordström).

Existen ceros en la función métrica $\psi_{\text{BI}}(r)$ que son singularidades de las coordenadas, y que pueden ser eliminadas usando extensiones analíticas. Estos ceros se obtienen en forma numérica. En la Fig. (3) se muestra el comportamiento de $\psi_{\text{BI}}(r)$ en función de la coordenada adimensional $u = r/r_g$ para distintos valores de los parámetros Q , M y b .

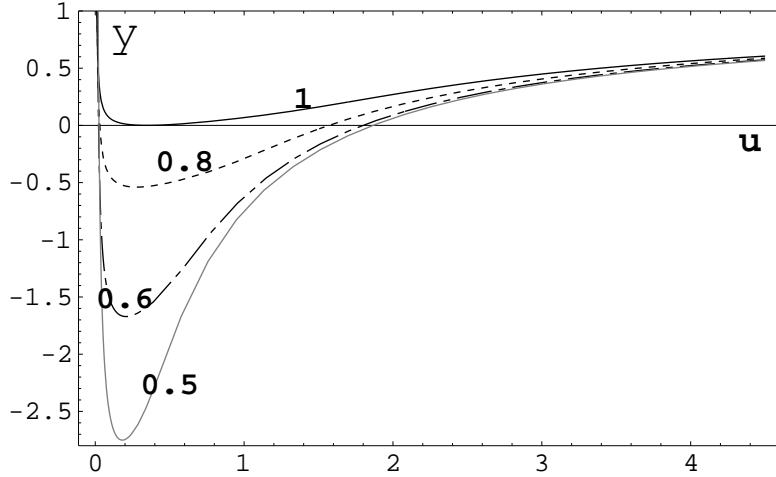


Figura 3: Forma de la función métrica. El valor $r_h = u_h r_g$, con $\psi(r_h) = 0$, determina la posición del horizonte de eventos. El valor de $\alpha = q/r_g$ está indicado en cada curva.

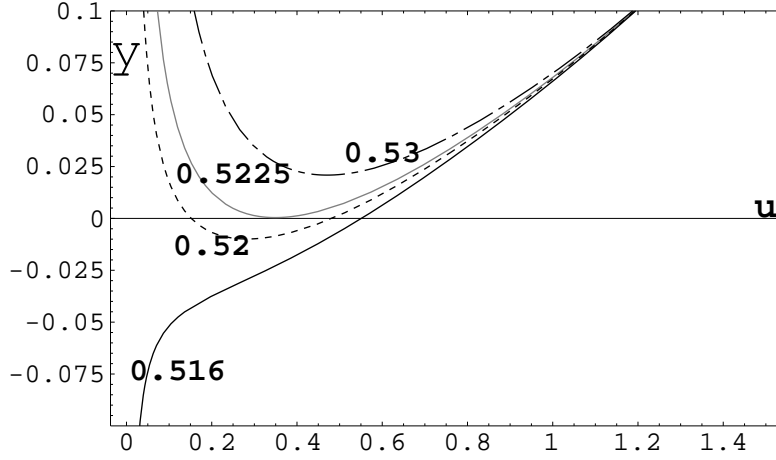


Figura 4: Comportamiento de la función métrica ψ para el caso extremo $q = r_g$ con diferentes valores de b . Las soluciones con $b > 0,5225/r_g$ representan singularidades desnudas. Por otro lado, si $b \leq 0,516/r_g$ domina el comportamiento de tipo Schwarzschild.

En los gráficos se dan los valores de la constante α , dada por $\alpha^2 = Q^2/M^2$. La posición del horizonte de eventos queda determinada por el valor de r en el cual $g_{tt} (= -\psi)$ es cero.

Para $\alpha > 1$ (caso hiperextremo, $q > r_g$) no existe horizonte de eventos, como en el caso de RN. Para $\alpha < 0,4$ el comportamiento se asemeja a Schwarzschild, independientemente del valor de b .

Para valores de $0,5 < \alpha < 0,9$ y $b < 0,7/r_g$ la función métrica también se asemeja Schwarzschild (campo electromagnético débil). Para estos valores de α , la magnitud br_g puede ajustarse de manera tal de que ψ tienda a infinito cerca de $r = 0$. En estos casos ψ tiene dos ceros.

El caso $\alpha = 1$ corresponde al caso extremo $q = r_g$. La función ψ muestra un comportamiento sensible al valor de b en la vecindad de $b = 0,5/r_g$ (ver Fig. 4). Se pueden distinguir tres casos: un horizonte, dos o ninguno. En los casos en que si hay horizontes, el tamaño de los mismos disminuye a medida que br_g aumenta.

5. Estudio de las geodésicas en agujeros negros de BI

Como en los casos de Schwarzschild y de R-N, las geodésicas en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) del espacio-tiempo de B-I se obtienen a partir de resolver

el problema de movimiento unidimensional en un potencial efectivo.

5.1. Partículas masivas

La ecuación de las geodésicas para una partícula de masa μ y carga ϵ está dada por:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{\epsilon}{\mu} F_\sigma{}^\nu \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (39)$$

donde τ es el parámetro afín a lo largo de la trayectoria. Hay dos cantidades conservadas: la energía E y el momento angular \tilde{l} . Usando estas simetrías, la geodésica para t puede integrarse una vez, obteniendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{t}\psi &= E + \frac{\epsilon}{\mu} \int_r^\infty F_{rt} dr \\ &= E + \frac{\epsilon Q}{\mu} \int_r^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'^4 + Q^2/b^2}} \\ &= E + \frac{\epsilon Q}{\mu} \sqrt{\frac{b}{Q}} \frac{1}{2} F \left[\arccos \left(\frac{r^2 - Q/b}{r^2 + Q/b} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Por otro lado, del elemento de línea de la geodésica tipo tiempo se obtiene:

$$1 = \psi \dot{t}^2 - \psi^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2. \quad (41)$$

Sustituyendo $\tilde{l} = g_{\phi\phi} \dot{\phi}$, y \dot{t} de la Ec. (40), resulta:

$$\dot{r}^2 + \psi \left(\frac{\tilde{l}^2}{r^2} + 1 \right) - \left[E + \frac{\epsilon Q}{2\mu} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left(\arccos \left\{ \frac{r^2 - Q/b}{r^2 + Q/b} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 = 0. \quad (42)$$

Comparando con $\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(E, \tilde{l}, r) = 0$, se obtiene la forma del potencial efectivo.

$$V_{eff}(u) = \frac{\psi}{2} \left(\frac{l^2}{u^2} + 1 \right) - \left[E + \frac{\epsilon \alpha}{2\mu} \sqrt{\frac{bGM/c^2}{\alpha}} F \left(\arccos \left\{ \frac{u^2 - \frac{\alpha}{bGM/c^2}}{u^2 + \frac{\alpha}{bGM/c^2}} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 / 2. \quad (43)$$

Los gráficos del mismo están en términos de la coordenada adimensional $u = r/r_g$, y $l = \tilde{l}/r_g$,

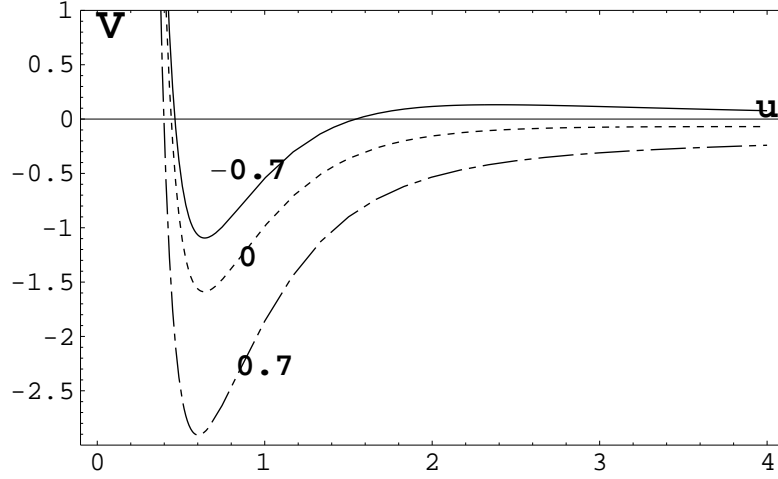


Figura 5: Potencial efectivo V , para partículas con $\epsilon/\mu = -0,7, 0, 0,7$. Los valores de las constantes son: $E = 1, l = 3, \alpha = 0,9, b = 0,9/r_g$. El cambio de signo en la carga presenta diferencias visibles en el gráfico. Hay posiciones de equilibrio estables que no dependen fuertemente de ϵ/μ .

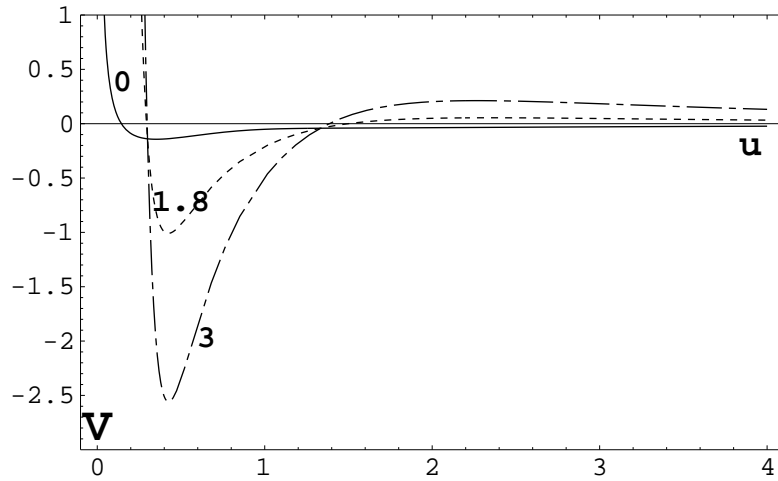


Figura 6: Potencial efectivo V , para partículas con diferentes valores del momento angular, ($l = \tilde{l}/r_g$, donde \tilde{l} es el momento angular de la partícula), $l = 0, 1,8, 3$. Los valores de las constantes son $E = 1, \epsilon/\mu = -1, \alpha = 0,9, b = 0,8/r_g$. Hay posiciones de equilibrio estables de menor energía para mayores valores de l .

En la Fig. (5) se muestra el potencial efectivo para distintos valores del cociente ϵ/μ . La forma del potencial es la misma independientemente del signo de la carga de la partícula. Hay una región atractiva con posiciones de equilibrio estables. La Fig. (6) corresponde al potencial efectivo para distintos valores del momento angular.

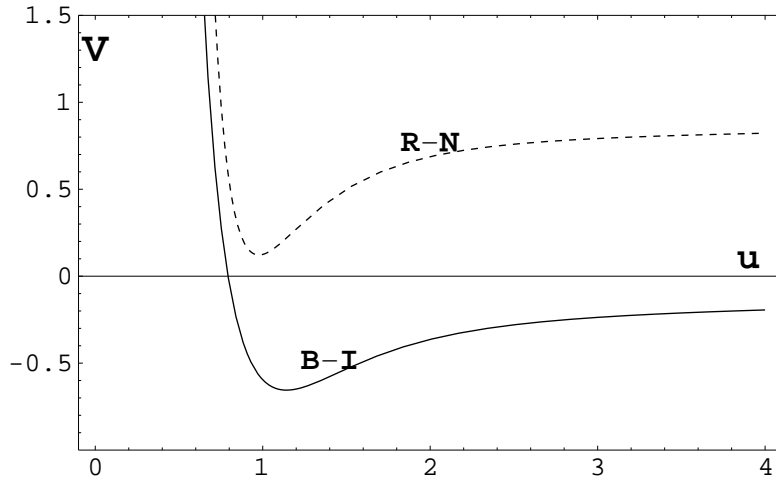


Figura 7: Potenciales efectivos de R-N y de B-I (ambos en el caso extremo). Las constantes son $\epsilon/\mu = 0,5$, $E = 1$, $l = 3$ and for B-I, $b = 0,8/r_g$.

En la Fig. (7) se comparan los potenciales efectivos de Reissner-Nordström en el caso extremo ($q = r_g$). En el espacio tiempo de R-N las partículas no alcanzan la singularidad en $r = 0$, pero los fotones si lo hacen. En el espacio tiempo de B-I, ambos comportamientos son posibles: alcanzar o no la singularidad, dependiendo del valor del parámetro b . En particular, las partículas de prueba no pueden escapar a la singularidad si la función métrica ψ va a $-\infty$ cuando $r \rightarrow 0$.

5.2. Partículas sin masa: fotones y gravitones

En electromagnetismo no lineal los fotones no se propagan a lo largo de geodésicas nulas de la geometría de fondo, sino que los fotones se propagan sobre geodésicas no nulas de una geometría efectiva que depende de la teoría no lineal. En un espacio tiempo curvo las superficies características están dadas por:

$$g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = 0. \quad (44)$$

Cuando el electromagnetismo no lineal está involucrado, la correspondiente ecuación es:

$$\left(g^{\mu\nu} + \frac{4\pi}{b^2}T^{\mu\nu}\right)S_{,\mu}S_{,\nu} = \gamma^{\mu\nu}S_{,\mu}S_{,\nu} = 0, \quad (45)$$

Esta ecuación muestra que el tensor de energía-impulso del campo no lineal es el responsable de que las superficies no sean, en general, superficies nulas que obedecen la Ec. (44). Por lo tanto, cuando se considera el potencial efectivo para los fotones, en vez de usar los elementos de $g_{\mu\nu}$, se deben usar los de la métrica efectiva $\gamma_{\mu\nu}$. La Ec. (44) gobierna la propagación de discontinuidades gravitacionales, mientras que la Ec. (45) gobierna la propagación de discontinuidades electromagnéticas no lineales. Estas superficies son localmente superficies normales a las trayectorias de gravitones y fotones, respectivamente. El caso lineal (Maxwell) se obtiene cuando $b \rightarrow \infty$: el segundo término de del miembro izquierdo de (45) se anula y se recupera la Ec. (44).

Las trayectorias correspondientes a los gravitones se obtienen del elemento de línea:

$$0 = \psi \dot{t}^2 - \psi^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2. \quad (46)$$

Sustituyendo $E = -g_{tt}\dot{t} = \psi\dot{t}$ y $\dot{\phi} = \tilde{l}/r^2$ y comparando con $\dot{r} + V_g = 0$ se obtiene

$$V_g = -\frac{g_{tt}l^2}{2u^2} = \frac{\psi l^2}{2u^2}, \quad (47)$$

mientras que para fotones el potencial efectivo se debe obtener, de manera análoga, de la métrica efectiva $\gamma_{\mu\nu}$,

$$V_{\text{ph}} = \frac{\psi l^2}{2u^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{(bGM/c^2)^2 u^4} \right]^{-1}. \quad (48)$$

El potencial efectivo para fotones tiende a la Ec. (47) cuando $b \rightarrow \infty$.

Se puede reescribir la Ec. (48) como

$$\begin{aligned} V_{\text{ph}}(r) &= \frac{\tilde{l}^2}{2r^2} \left(1 + \frac{Q^2}{b^2 r^4} \right)^{-1}, \\ &= \frac{\tilde{l}^2}{2} \left(r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{2b^2}{3} \left[r^4 - \sqrt{r^8 + \frac{Q^2 r^4}{b^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} Q^2 r F \left[\arccos \left\{ \frac{br^2/Q - 1}{br^2/Q + 1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right), \end{aligned} \quad (49)$$

de la cuál se deduce que $V_{\text{ph}}(0) = 0$. Por el contrario, al acercarse al origen el potencial del gravitón V_g crece hasta infinito ($+\infty$), dejando un potencial repulsivo (análogo al de una partícula en R-N).

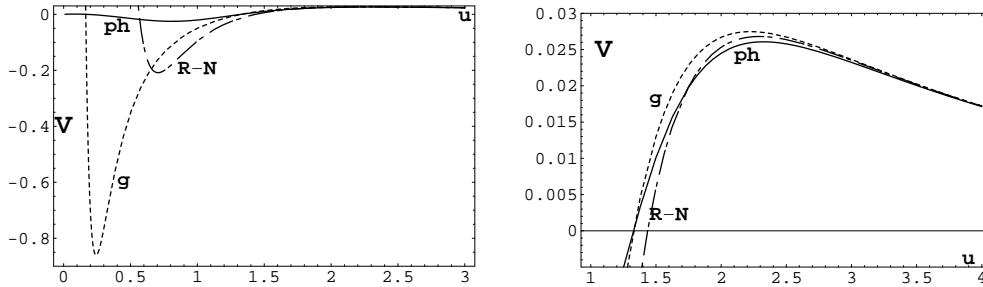


Figura 8: Potenciales efectivos correspondientes a geodésicas nulas en R-N y B-I. En el último caso el potencial efectivo que siente un fotón (ph) es diferente al que siente un gravitón (g). El punto donde $V(u) = 0$ corresponde al horizonte y es el mismo para fotones y gravitones en B-I; es más cercano al origen que R-N (el campo de B-I encoge el horizonte). Los valores de las constantes y parámetros son: $\alpha = 0,9$, $b = 0,75/M$, $l = 1$

Esta diferencia en el comportamiento de fotones y gravitones se muestra en la Fig. (8) junto con una comparación con las trayectorias nulas de Reissner-Nordström. Los gravitones interactúan con el campo de Born-Infeld sólo a través del efecto que este campo genera en la geometría del espacio-tiempo.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la solución a las ecuaciones de Einstein para una fuente con carga eléctrica en el marco del electromagnetismo no lineal de Born-Infeld.

Inicialmente se hizo un repaso de las características de los agujeros negros de Reissner-Nordström, solución de las ecuaciones de Einstein y de las de Maxwell (electromagnetismo lineal).

Luego se introdujo el formalismo del electromagnetismo no lineal, a partir del cuál se construyó la solución de B-I. Esta solución es de gran interés, en parte porque puede ser comparada directamente con el caso de R-N.

Al estudiar la geometría de B-I se encontró que es posible tener soluciones con uno, dos o ningún horizonte de eventos. Al aumentar el parámetro b se encoge el tamaño del horizonte.

Finalmente, se estudiaron las trayectorias de las partículas en esta geometría. Hay dos puntos importantes para destacar en este aspecto de la solución de B-I; por una lado es posible que algunos fotones eviten la caída a la singularidad en $r = 0$, hecho que en el caso de R-N era inevitable. Por otro lado, a pesar de que la geometría para fotones y gravitones no es la misma, ambas tienen el mismo horizonte.

Durante muchos años el electromagnetismo de Born-Infeld se mantuvo como una curiosidad, un modelo interesante de una teoría no lineal, pero que no describía ningún fenómeno físico. Sin embargo, en los últimos años el interés por esta teoría se ha renovado, debido a su conexión con la teoría de cuerdas y de p -branas. Estructuras similares al lagrangiano de Born-Infeld aparecen en estas teorías modernas. Es probable entonces, que la última palabra acerca de la teoría de Born-Infeld no ha sido dicha aún.

A. Sistemas de unidades electromagnéticas

La fuerza entre dos cargas puntuales q y q' separadas por una distancia r , está dada por la ley de Coulomb y tiene la forma:

$$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (50)$$

La magnitud y dimensiones de la constante de proporcionalidad k_1 quedan determinadas por esta ecuación (si las dimensiones de la carga están dadas), o se eligen arbitrariamente para determinar la unidad de carga.

En el caso de fenómenos magnéticos en estado estacionario, la ley de Ampère permite determinar la fuerza por unidad de longitud entre dos espiras paralelas de longitud infinita, separadas por una distancia d por las que circulan corrientes I e I' , respectivamente. Esta fuerza está dada por:

$$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d^2}. \quad (51)$$

El campo de inducción magnética que se obtiene a partir de esta última ecuación es proporcional a la fuerza por unidad de corriente,

$$B = 2k_2 \alpha \frac{I}{d} \quad (52)$$

Por último, la tercera relación entre las unidades y dimensiones electromagnéticas es la ley de Faraday, que conecta los fenómenos eléctricos y magnéticos. La fuerza electromotriz inducida alrededor de un circuito es proporcional a la tasa de cambio del flujo electromagnético,

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} + k_3 \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0, \quad (53)$$

donde k_3 es una constante de proporcionalidad.

Estas 4 constantes satisfacen las siguientes relaciones:

$$k_1/k_2 = c^2, \quad (54)$$

$$k_3 = 1/\alpha. \quad (55)$$

Debido a estas relaciones hay sólo dos constantes que pueden ser elegidas arbitrariamente. A continuación están tabuladas las cuatro constantes (k_1, k_2, α, k_3) para los sistemas de unidades más usuales.

En la Tabla (2) se muestran las ecuaciones de Maxwell en los sistemas de unidades de la Tabla (1).

Cuadro 1: Magnitudes y dimensiones de las constantes electromagnéticas

Sistema	k_1	k_2	α	k_3
Electrostático (esu)	1	c^{-2}	1	1
Gaussiano	1	c^{-2}	c	c^{-1}
SI	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	1

Cuadro 2: Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz en los distintos sistemas de unidades.

Sistema	Ecuaciones de Maxwell	Fuerza de Lorentz por unidad de carga
Electrostático (esu)	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$
Gaussiano	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$
SI	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

Cuadro 3: Tabla de conversión para símbolos y fórmulas

Parámetro	Gaussiano	SI
Campo eléctrico	$\vec{E} / \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	\vec{E}
Densidad de carga	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho$	ρ
Inducción magnética	$\sqrt{\mu_0 / 4\pi} \vec{B}$	\vec{B}

En el presente trabajo se ha adoptado el sistema de unidades Gaussiano. En las Tablas (3) y (4) se dan los factores de conversión entre este sistema y el SI.

La Tabla (3) es un esquema de conversión entre símbolos y ecuaciones que permite pasar una ecuación del sistema Gaussiano al SI, y viceversa. Los factores de conversión que figuran en la Tabla (4) permiten expresar un dado valor de algún parámetro físico como un cierto número en las unidades

Cuadro 4: Tabla de conversión para cantidades físicas

Parámetro	Símbolo	SI	Gaussiano
Longitud	l	1 m	10^2 cm
Masa	m	1 kg	10^3 g
Tiempo	t	1 s	1 s
Energía	U	1 J	10^5 ergs
Carga eléctrica	q	1 C	3×10^9 statcoulombs
Campo eléctrico	E	1 V m ⁻¹	$1/3 \times 10^{-4}$ statvolt cm ⁻¹
Inducción magnética	B	1 T	10^4 G

SI o cgs-Gaussianas.

Para mayor información acerca de los sistemas de unidades el lector es remitido al libro de Jackson, J.D. (1962).

Referencias

- [1] Bretón, N., 2001, arXiv:gr-qc/0109022
- [2] Bretón, N., 2002, *Class. Quantum Grav.* **19**, 601-612
- [3] Boillat, G., 1970, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 11, 941
- [4] Hobson, M.P., Efstathiou, G.P. & Lasenby, A.N., 2006, en: *General Relativity*, Cambridge University Press, New York
- [5] Jackson, J.D., 1962, en: *Classical Elettrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York
- [6] Pellicer, R. & Torrence, R. J., 1969, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 10, 1718
- [7] Peres, A., 1960, *Physical Review*, vol. 122, 273
- [8] Romero, G.E., 2008, en: G.E. Romero & P. Benaglia (eds), *Compact Objects and their Emission*, AAA Book, Paideia, La Plata