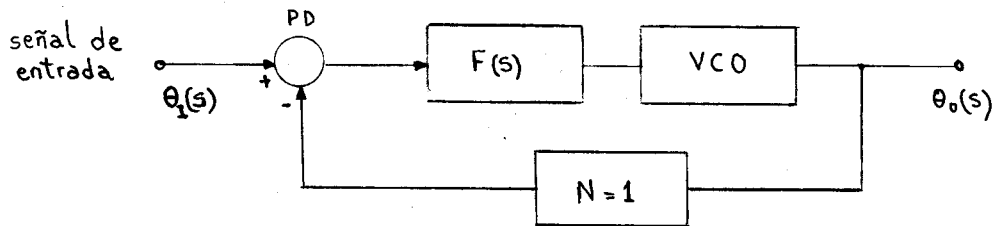


DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UNA BASE DE TIEMPO AUXILIAR DE 10 MHzUTILIZANDO PLL

Ing. Daniel O. Perilli

Lazo de fijación de fase (PLL).

El lazo de fijación de fase o PLL es un dispositivo electrónico que compara la fase (y frecuencia) de una señal cualquiera con la de una señal de referencia.



Los elementos básicos del PLL son:

- \* Un detector o comparador de fase (PD).
- \* Un filtro pasabajos ( $F_e$ ).
- \* Un VCO cuya frecuencia es una función de una tensión externa aplicada al oscilador.
- \* Un divisor fijo (N).

El detector de fase compara la fase de la señal de entrada con la del VCO, la salida del detector es una medida de la diferencia de fase entre las dos señales. El filtro elimina componentes indeseables, presentes en la señal de entrada o producidas por el proceso de detección y aplica una tensión de control al VCO. El oscilador es forzado de esta manera a modificar su frecuencia en la dirección que reduce la diferencia de fase. Cuando la tensión de control es tal que la frecuencia del VCO es la misma que la de la señal de entrada, se dice que el lazo está en sincronismo (locked) y  $f_0 = f_1$ . Para mantener

este sincronismo el PLL necesita tener cierto error de fase para desarrollar y mantener la tensión de control, sin embargo en un lazo bien diseñado ese error es pequeño.

Una vez que el proceso de adquisición de sincronismo en el lazo (fijación de lazo) se ha completado, el PLL va a seguir automáticamente las variaciones de la señal de entrada.

Si la señal es estable, con poco ruido y disturbios, el lazo necesita muy poca información para reproducirlas fielmente. En este caso un filtro de pequeño ancho de banda (puede ser tan angosto como 1 a 2 Hz) es suficiente, su uso reduce mucho el contenido de ruido de la señal de entrada. En otras palabras, el lazo funciona como un filtro de frecuencia variable y de pequeño ancho de banda, que puede seguir automáticamente la señal de entrada aún cuando esta posea una relación señal/ruido muy pobre.

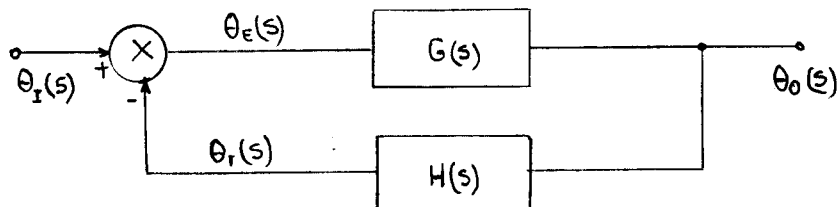
La mayoría de los PLL efectúan una de las tres funciones siguientes:

- \* Si  $N = 1$  el PLL es un filtro de seguimientos.
- \* Si  $N > 1$ , pero fijo, el PLL es un multiplicador de frecuencia.
- \* Si  $N$  es un valor programable, el PLL es un sintetizador de frecuencia.

La implementación de las funciones de lazo pueden ser hechas utilizando componentes analógicos o digitales.

De todos estos conceptos surge que el PLL puede ser analizado como un servomecanismo en donde los problemas de diseño pueden acortarse usando la transformada de Laplace.

Un diagrama más funcional en bloques de las funciones indicadas en la figura anterior es:



donde:

$\theta_I(s)$  = fase de entrada (referencia).

$\theta_R(s)$  = fase de realimentación.

$\theta_E(s)$  = señal de error.

$\theta_O(s)$  = fase de salida.

$G(s)$  = producto de funciones de transferencia directa.

$H(s)$  = producto de funciones realimentadas.

Las ecuaciones que describen a este sistema, usando la notación de Laplace son las siguientes:

$$\theta_O(s) = G(s) \theta_E(s)$$

$$\theta_R(s) = H(s) \theta_O(s)$$

$$\theta_E(s) = \theta_I(s) - \theta_R(s)$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene:

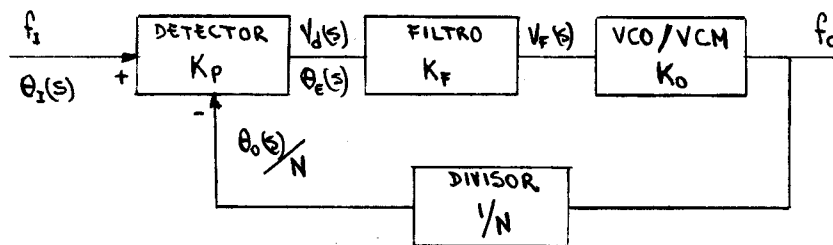
$$\frac{\theta_O(s)}{\theta_I(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad \begin{array}{l} \text{función de transferencia} \\ \text{de lazo cerrado.} \end{array}$$

El denominador  $1 + G(s) H(s) = 0$  se llama ecuación característica de lazo cerrado. Donde  $G(s) H(s) = \theta_R(s) / \theta_E(s)$ , es la función de transferencia de lazo abierto.

Además se puede expresar la señal de error  $\theta_E(s)$  en función de la entrada  $\theta_I(s)$

$$\theta_e(s) / \theta_i(s) = 1 / (1 + G(s) H(s))$$

Ahora el circuito de la figura 1 se puede relacionar con estas funciones:



$$V_D(s) = K_P (\theta_i(s) - \theta_o(s))$$

$K_N = 1 / N =$  ganancia del divisor.

$K_P =$  factor de ganancia del PD.

La frecuencia  $f_o$  del VCO es función de la tensión de control  $V_f(s)$  y la desviación de su frecuencia central es:

$$\Delta \omega = K_V V_F(s)$$

$K_o =$  factor de ganancia del VCO.

$K_V =$  sensibilidad del VCO.

Puesto que la frecuencia es la derivada de la fase, entonces la operación del VCO puede escribirse como:

$$d\theta_o(t) / dt = K_V V_F(s) \implies$$

$$\implies L\{(d\theta_o(t) / dt)\} = s\theta_o(s) = K_V V_F(s)$$

por lo tanto:

$$\theta_o(s) = (K_V V_F(s)) / s = (K_V) / s V_F(s) = K_o V_F(s)$$

Entonces se ve que  $s$  en el denominador convierte la frecuencia

característica del VCM en fase (fase es la integral de la frecuencia).

Como:

$$\theta_O(s) = K_P K_F (K_V / s) \theta_E(s)$$

$$\theta_R(s) = K_N \theta_O(s)$$

$$\theta_E(s) = \theta_I(s) - \theta_R(s)$$

La función transferencia de lazo cerrado va a ser:

$$\theta_O(s) / \theta_I(s) = (k_P K_F K_O) / (s + K_P K_F K_V K_N)$$

Además:

$$\theta_E(s) / \theta_I(s) = s / (s + K_P K_F K_V K_N)$$

### Tipo y orden.

El tipo de un sistema se refiere al número de polos en el origen de la función transferencia de lazo  $G(s) H(s)$ . El orden de un sistema se refiere al mayor grado de la ecuación característica ( $1 + G(s) H(s) = 0$ ). Las raíces de esta ecuación son los polos de la función transferencia de lazo cerrado.

El tipo 2 es generalmente el más deseable debido a la simplicidad de su implementación y a las buenas características de operación.

Las funciones de transferencias típicas para los tipo 1, 2 y 3 tienen la forma:

$$\text{Tipo 1} \text{ ---> } G(s) H(s) = k / (s (s + a))$$

$$\text{Tipo 2} \text{ ---> } G(s) H(s) = (K (s + a)) / s^2$$

$$\text{tipo 3} \text{ ---> } G(s) H(s) = (K (s + a) (s + b)) / s^3$$

Escribiendo la función transferencia de lazo abierto, que incluyen los parámetros  $K_P$ ,  $K_F$ ,  $K_V$ , y  $K_N$  y relacionándola con la del

tipo 2 se tiene:

$$G(s) H(s) = (K_P K_F K_V K_N) / s = (K (s + a)) / s^2$$

donde sólo  $K_F$  (filtro de lazo) se usa como variable de diseño.

De modo que  $K_F$  debe tener la forma de  $K_F = (s + a) / s$  para proporcionar todos los polos y ceros para la  $G(s) H(s)$  exigida.

### Análisis de la respuesta del sistema.

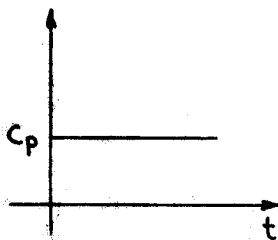
Es una importante propiedad por que permite determinar el tiempo de establecimiento  $t_s$  cuando se cambia de frecuencia al PLL, además de confirmar que tipo de sistema es el más adecuado.

Para analizar la respuesta a los tipos de funciones de transferencia de lazos anteriores se usan las señales:

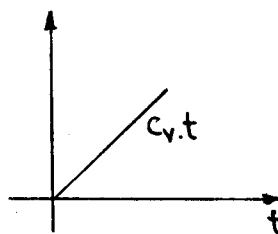
- \* Escalón de fase.
- \* Escalón de velocidad (rampa).
- \* Escalón de aceleración (parábola).

En estado estable, el uso del teorema del valor final, asociado con Laplace permite averiguar el error  $e(s)$  del sistema, sin hacer transformaciones al dominio del tiempo.

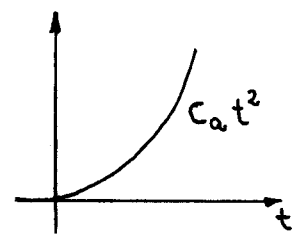
Las señales de entrada entonces van a ser:



$$\theta_i(s) = C_p/s$$



$$\theta_i(s) = C_v/s^2$$



$$\theta_i(s) = 2C_a/s^3$$

$$(s, t \geq 0)$$

En el caso del sistema del tipo 2, si se aplica a la entrada un escalón de fase, el error de fase final se calcula como sigue:

$$\text{siendo } G(s) H(s) = (K (s + a)) / s^2$$

$$\text{y } \theta_E(s) = \theta_I(s) / (1 + G(s) H(s))$$

$$\text{entonces } \theta_E(s) = (1 / (1 + (K (s + a)) / s^2)) (C_p / s)$$

y aplicando el teorema del valor final que se define como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \theta_E(s); \text{ se tiene}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s (1 / (1 + (K (s + a)) / s^2)) (C_p / s)$$

$$\text{---> } \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 C_p) / (s^2 + K (s + a)) = 0$$

El procedimiento es similar para los otros tipos de sistemas. De esta forma se puede construir una tabla que muestre los respectivos errores de fase para estado estacionario.

	TIPO 1	TIPO 2	TIPO 3
ESCALON	0	0	0
RAMPA	CONST	0	0
PARABOLA	$\infty$	CONST	0

\* Un error de fase 0 indica enganche de fase entre dos señales de entrada al detector.

\* Un error de fase constante indica diferencia de fase entre las dos señales de entrada al detector. La magnitud de este error es proporcional a la ganancia de lazo y a la magnitud de entrada.

\* Un error de fase continuamente creciente indica una rapidez de cambio de fase con el tiempo. Esta es una condición de desenganche para el lazo.

Como en el PLL se desea seguir una frecuencia de referencia (escalón de velocidad) con error de fase cero, como mínimo se debe elegir el sistema del tipo 2.

**Estabilidad. Respuesta transitoria.**

Para visualizar la estabilidad del sistema se usa a menudo el Lugar de Raíces, que es una técnica gráfica para determinar la posición de los polos y ceros del sistema en el plano s, al variar la ganancia de lazo de cero a infinito.

Este método gráfico muestra como los polos de lazo cerrado (raíces de la ecuación característica) varían con la ganancia del lazo. La ubicación de los polos y ceros determinará el grado de estabilidad.

Aplicando esta técnica a la función transferencia de lazo de tipo 2 puede dibujarse el lugar de raíces y así poder relacionar las raíces que dan mejor comportamiento al sistema.

siendo  $G(s)H(s) = (K (s+a)) / s^2$

entonces:

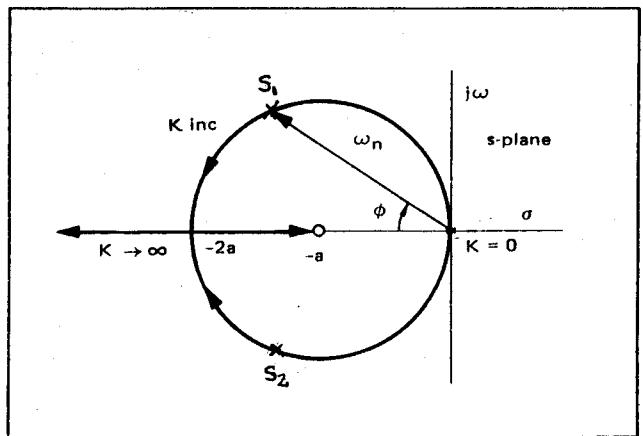
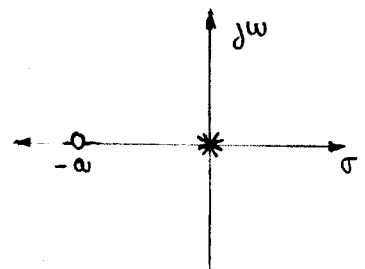


FIGURE 5 – Type 2 Second Order Root Locus Contour

Cuando la ecuación característica  $1 + G(s)H(s) = 0$ , utilizada en las reglas de construcción del Lugar de Raíces, tiene un par de raíces complejas conjugadas, tiene un factor cuadrático de la forma:

$$s^2 + 2\zeta\omega_N s + \omega_N^2 = 0 \quad (1)$$

Las raíces de este factor son:



$$s_{1,2} = -\xi \omega_N \pm j\omega_N \sqrt{1-\xi^2} = \sigma \pm j\omega_D$$

donde:

$\omega_D$  = frecuencia natural amortiguada.

$\xi$  = coeficiente de amortiguamiento.

$\omega_N$  = frecuencia natural no amortiguada.

Esto se cumple para  $\xi < 1$  y positivo, así el transitorio es una senoide amortiguada. Es decir el sistema alcanza los distintos valores de equilibrio rapidamente, pero la respuesta oscila alrededor del valor final. Si puede tolerarse esta oscilación, la elección de este sistema amortiguado permite que la actuación sea más rápida.

Para el caso del sistema del tipo 2 y segundo orden, la respuesta a un escalón de fase normalizado, para diferentes valores de  $\xi$  es:

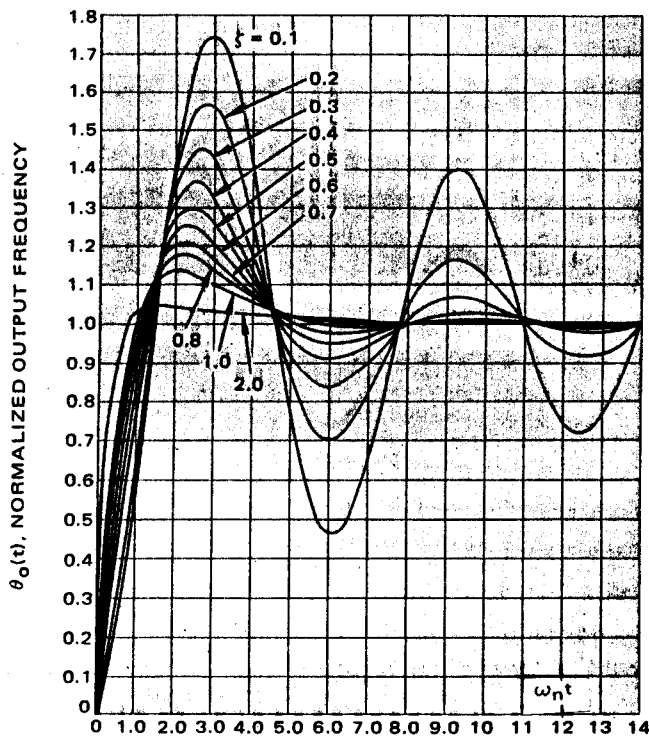


Figura 6

También la misma gráfica da la respuesta a un escalón de velocidad (frecuencia) de entrada con la frecuencia de salida en función del tiempo.

Estas curvas muestran que el valor de la sobreelongación (overshoot) y estabilidad dependen del  $\xi$ . Un  $\xi = 0,4$  representa una sobreelongación de  $\approx 35\%$  y con el valor  $\xi = 0,8$  se tiene  $\approx 16\%$ .

Además se puede determinar el tiempo de establecimiento  $t_s$  que es el tiempo necesario para que las oscilaciones disminuyan a un porcentaje absoluto del valor final y a partir de allí permanezcan en valores inferiores al fijado. Errores del 2% y 5% son valores comunes para determinar el  $t_s$ .

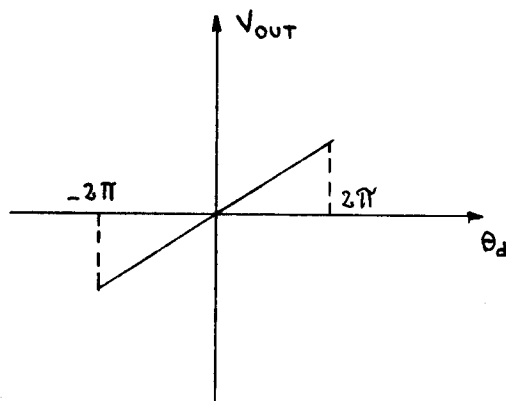
### Componentes a utilizar.

- \* Detector de fase-frecuencia MC4044.
- \* Multivibrador controlado por tensión (VCM) MC4024.
- \* Divisor por N con CI SN7490.
- \* Filtro de lazo, tipo activo de alta ganancia.

Detector de fase: El C.I. MC4044 se llama detector de fase-frecuencia por que también suministra una indicación de error de frecuencia cuando el lazo está desenganchado.

Es de tipo secuencial, el cual opera sobre los flancos de las ondas de entrada y generalmente están contruidos en la forma de circuitos digitales (compuertas, FF) y operan con entrada binaria. Sus salidas son pulsos cuyo valor medio es una tensión de CC que depende de la diferencia de fase.

Un diagrama entre tensión de salida y diferencia de fase de entrada es  $\theta_d$  es:



La ganancia del detector  $K_p$  se da generalmente en las notas de aplicación del dispositivo.

Se define:

$$K_F = \Delta V_{OUT} / \Delta \theta_{IN}$$

$\Delta V_{OUT}$  = cambio en el valor medio de la tensión de salida.

$\Delta \theta_{IN}$  = diferencia de fase de entrada en radianes.

Oscilador controlado por tensión (VCO): el tipo de VCO a usar es el VCM MC4024, en el cual se garantiza una variación de frecuencia de salida de 3,5/1 para una tensión de control de 1 a 5 V.

El VCM tiene una función transferencia dada por  $K_o = K_v / s$ , la cual relaciona el cambio de frecuencia  $\Delta f_o$  con el cambio de la tensión de sintonía  $\Delta V_c$ .

$$\text{====> } K_v = 2\pi (\Delta f_o / \Delta V_c)$$

Algunas de las características más importante que tiene que tener son:

- 1) Estabilidad de fase (pureza espectral).
- 2) Gran rango de sintonía.
- 3) Linealidad entre frecuencia y tensión de control.
- 4) Gran factor de ganancia  $K_o$ .
- 5) Bajo costo.

Divisor fijo: el divisor fijo es un circuito digital que proporciona una división de frecuencia por un número entero. A menudo son programados desde microprocesadores, llaves normales o contadores digitales y también pueden llevar una indicación visual (display).

El divisor usado en el proyecto está formado simplemente por décadas contadoras y compuertas para obtener el número N de división requerido.

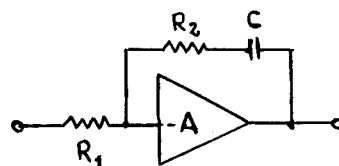
La ganancia del divisor es:  $K_N = 1 / N$

Filtro de lazo: este componente siempre es el último circuito que se diseña porque se necesita conocer los valores de  $K_P$ ,  $K_V$  y  $K_N$  para determinar los valores de sus componentes. El filtro de lazo proporciona dos funciones importantes: filtra la tensión de error del PD, de modo que el VCO recibe una tensión de sintonía limpia y controla los parámetros del lazo.

El circuito MC4044 proporciona el circuito activo para configurar el filtro.

Se vió que de acuerdo con los siguientes requerimientos de la función transferencia de lazo  $G(s)H(s)$ , la función transferencia del filtro era  $K_f = (s + a) / s$ . Con el uso de un filtro activo se tiene:

$$K_f = (sCR_2 + 1) / (sCR_1)$$



A = ganancia de tensión del amplificador.

$R_1$ ,  $R_2$  y C son las variables usadas para establecer todas las características del lazo.

Este tipo de filtro se lo llama de avance-retardo por que modifica, de esta manera, el ángulo de fase. Tiene un amplificador de C. C. de alta ganancia y posee buenas características de seguimiento, permitiendo un funcionamiento del PLL incondicionalmente estable.

### Diseño del PLL.

Datos:

$$f_{OUT} = 9,6 \text{ MHz a } 10,4 \text{ MHz}$$

$$f_{IN} = 400 \text{ KHz} = f_{REF}$$

$$t_s = 1 \text{ ms (sincronismo entre canales)}$$

$$\text{sobrelongación} \leq 20\%$$

### Ganancia del divisor

Cuando el lazo está enganchado, la frecuencia de salida es  $f_o = Nf_i$ , entonces:

$$N_{MIN} = (f_{OMIN}) / f_i = (f_{OMIN}) / f_{OTEP} = \\ = 9,6 \text{ MHz} / 400 \text{ KHz} = 24$$

$$N_{MAX} = f_{OMAX} / f_{OTEP} = 10,4 \text{ MHz} / 400 \text{ KHz} = 26$$

entonces:

$$K_N = 1 / 24 \text{ a } 1 / 26$$

### Cálculo del VCM.

El rango de operación que debe cubrir el VCM debe ser de 9,4 MHz a 10,6 MHz. Es decir la variación de la frecuencia de salida es  $10,6 / 9,4 = 1,12 / 1$ , relación que puede manejar perfectamente el C. I. MC4024.

Este rango de operación está controlado por el valor de un capacitor exterior  $C_x$  que se calcula como sigue:

Usando la tabla 1 de las características del VCM (pag. 7-22) se tiene:

$$C_x = (K_1 / f_{OH}) - 5 \quad f_{OL} \leq K_2 / C_x$$

$f_{OH}$  = frecuencia de salida con  $V_{IN} = V_{DD}$

$f_{OL}$  = frecuencia de salida con  $V_{IN} = 2,5 \text{ V}$

(frecuencia en MHz,  $C_x$  en pF)

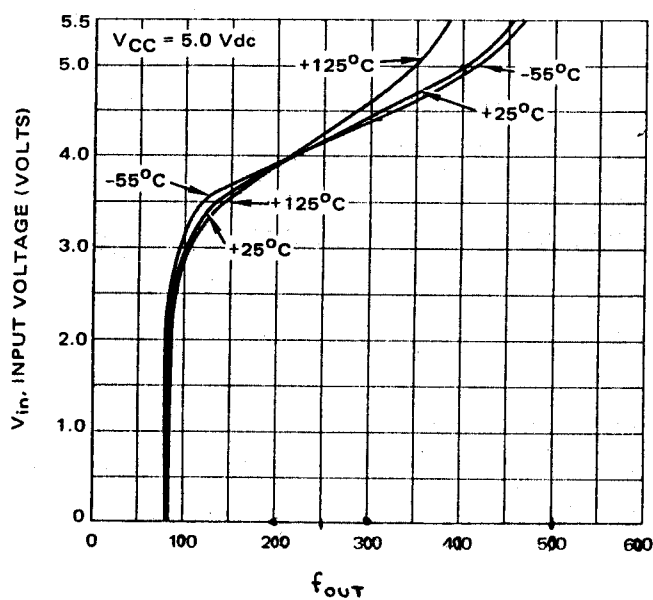
Para  $T_A = 25^\circ\text{C} \pm 3^\circ\text{C} \rightarrow K_1 = 325 \text{ y } K_2 = 175$

$$C_x = (325 / 10,6) - 5 = 25,6 \rightarrow C_x = 25,6 \text{ pF}$$

$$f_{oL} = 175 / 25,6 = 6,8 \text{ ---> } f_{oL} = 6,8 \text{ MHz.}$$

El rango de operación deseado se centra entre el rango total del dispositivo.

Para este valor de  $C_x$ , la tensión de entrada frecuencia de salida puede graficarse como sigue:



La función de transferencia del VCM estaba dada por  $K_o = K_v / s$  donde  $K_v$  era la sensibilidad en (rad / seg / V). De la curva anterior se puede encontrar  $K_v$  tomando la reciproca de la pendiente.

$$K_v = ((400 - 150) 10^6) / (C_x (5V - 3,6V)) = 43,8 10^6 \text{ rad/seg/V}$$

de modo que:

$$K_o = 43,8 10^6 / s \text{ (rad/seg/V)}$$

### Factor de ganancia del PD

De acuerdo con las características del PD, la salida varía de  $V_{BE}$  a  $3V_{BE}$  cuando la fase varía de  $-2\pi$  a  $2\pi$ .

Entonces la ganancia del detector es:

$$K_P = (\Delta V_{OUT} / \Delta \theta_{IN}) = (3V_{BE} - V_{BE}) / (2\pi - (-2\pi)) = \\ = 2 V_{BE} / 4\pi$$

$$K_P = 0,111 V / rad.$$

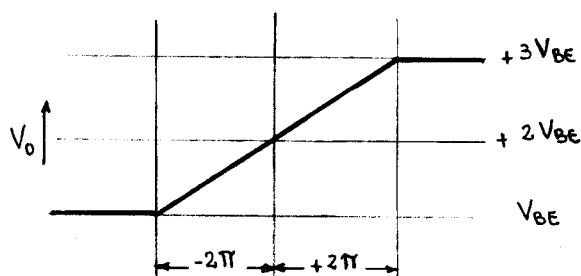


FIGURA 9

### Cálculo del filtro de lazo.

La función transferencia de lazo abierto tenía la forma de:

$$G(s) H(s) = (K_P K_F K_V K_N) / s = K (s + a) / s^2$$

Puesto que la ganancia del filtro activo en el MC 4044 no es infinita un factor de corrección debe aplicarse a  $K_P$  para caracterizar la función. Se encuentra experimentalmente que ese factor es 0,5. Es decir  $0,5 K_P$ . Entonces:

$$G(s) H(s) = K_P 0,5 ((sCR_2 + 1) / sCR_1) (K_V / s) (1 / N)$$

Del análisis de estabilidad surgió que la ecuación característica tomaba la forma de:

$$s^2 + 2\zeta\omega_N s + \omega_N^2 = 0$$

Relacionando ésta última con la función transferencia de lazo anterior se tiene:

$$s^2 + 2\xi\omega_N s + \omega_N^2 = 0 = s^2 + (K_P K_V R_2 / R_1 N) s + (K_P K_V / R_1 C N)$$

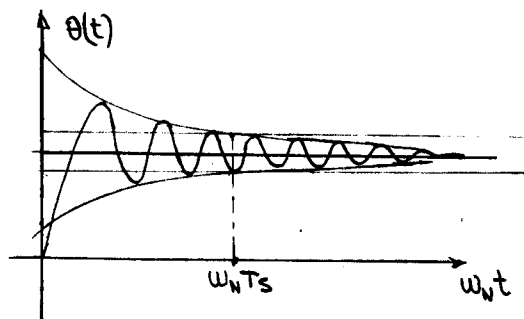
es decir:  $\omega_N^2 = 0,5 K_P K_V / R_1 C N$  (1)

$$2\xi\omega_N = 0,5 K_P K_V R_2 / R_1 N$$
 (2)

Para determinar  $\omega_N$  se usa el porcentaje de sobrelongación y tiempo de establecimiento admitido.

Eligiendo un  $\xi = 0,8$ , se vio que (figura 6) el sobrepico máximo era menor que el 20%. Además el amortiguamiento de las oscilaciones se establecerá a valores inferiores del 5% de error para un valor de  $\omega_N t_s = 4,5$ .

Como el  $t_s$  requerido es 1 mseg.



entonces:

$$\omega_N = 4,5 / t_s = 4,5 / 0,001 = 4,5 \cdot 10^3 \text{ r/seg}$$

de la ecuación (1):

$$R_1 C = 0,5 K_P K_V / \omega_N^2 N = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 43,8 \cdot 10^6 / (4500)^2 \cdot 26 = 4,57 \cdot 10^{-3}$$

tomando  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  ( $1\text{k}\Omega < R_1 < 5\text{k}\Omega$ )

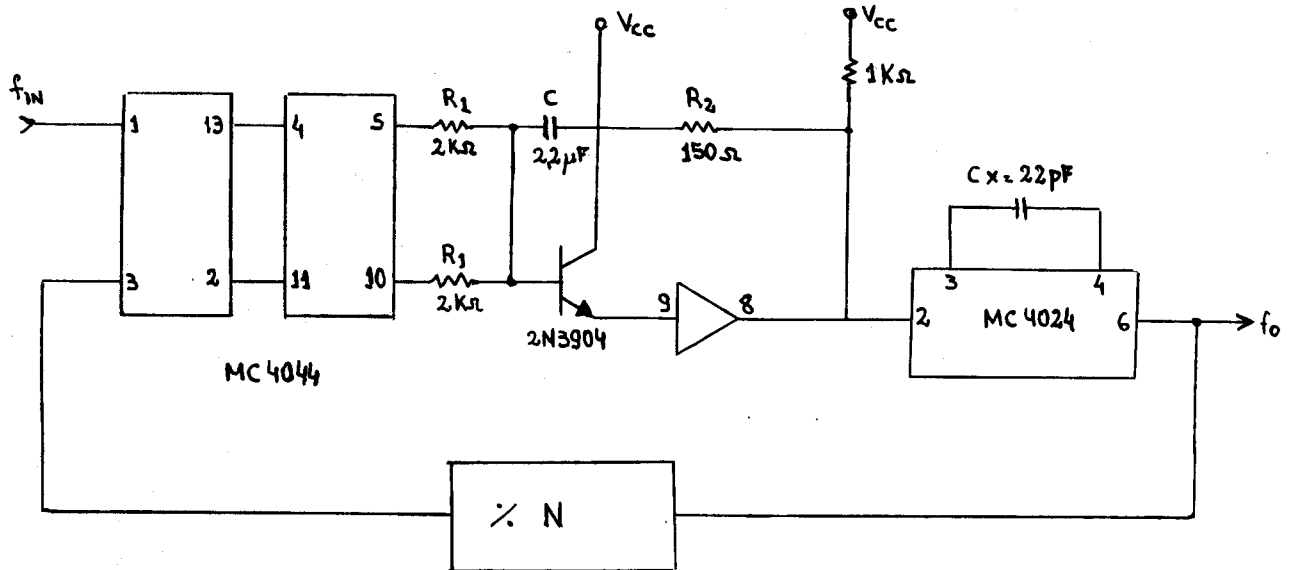
$$C = 4,57 \cdot 10^{-3} / 2 \text{ k}\Omega \implies C = 2,28 \mu\text{F} \quad (\text{valor com. } 2,2 \mu\text{F})$$



así de la ecuación (1) y (2)

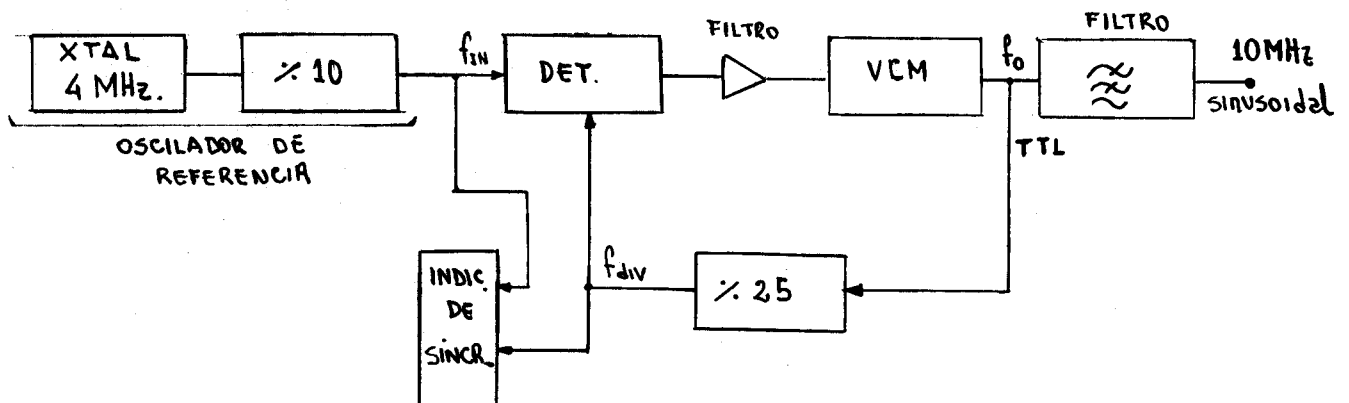
$$R_2 = 2 \xi_{\min} / \omega_N C = 2 \cdot 0,8 / 4500 \cdot 2,28 \cdot 10^{-6} = 155,9 \Omega \text{ (valor com. } 150 \Omega \text{)}$$

Todos los parámetros del circuito han sido determinados, por lo tanto el PLL puede configurarse como sigue:



Como se desea que el lazo funcione manteniendo una  $f_o$  fija de 10 MHz, entonces el número de división N correspondiente es 25.

Así el diagrama en bloques completo a utilizar en el proyecto del PLL como multiplicador de frecuencia es el siguiente.

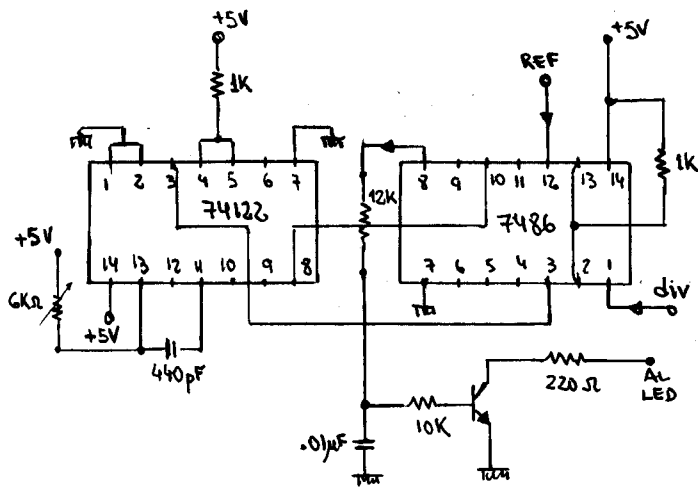
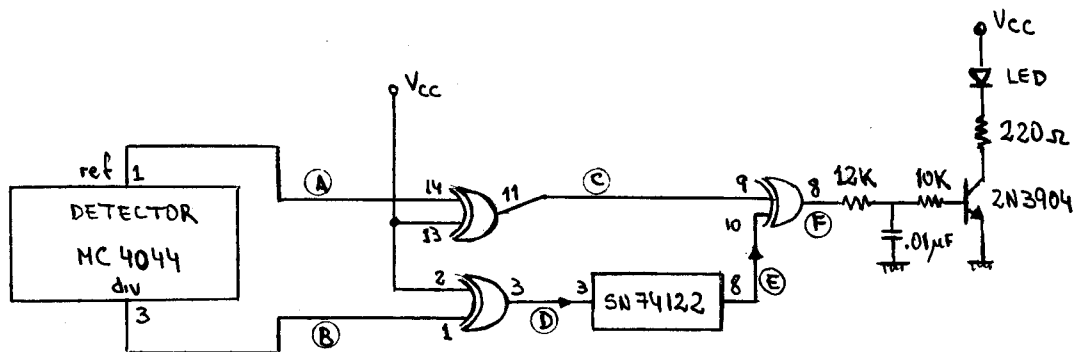


Indicador de sincronismo

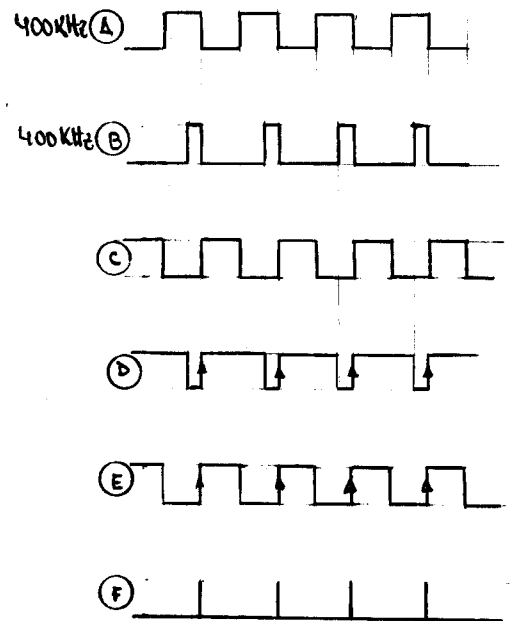
En ciertas aplicaciones es necesario tener una indicación visual o aural de la presencia (o pérdida) de sincronismo.

Esto puede lograrse usando el circuito de la figura siguiente, que emplea compuertas EXOR y un monostable redispensible (5N74122) para poder variar el ciclo de trabajo de la señal tomada del divisor.

El ancho del pulso de salida del 5N74122 esta determinado por los valores externos de capacidad y resistencia (pag. 6-81, Manual de Texas Instruments).

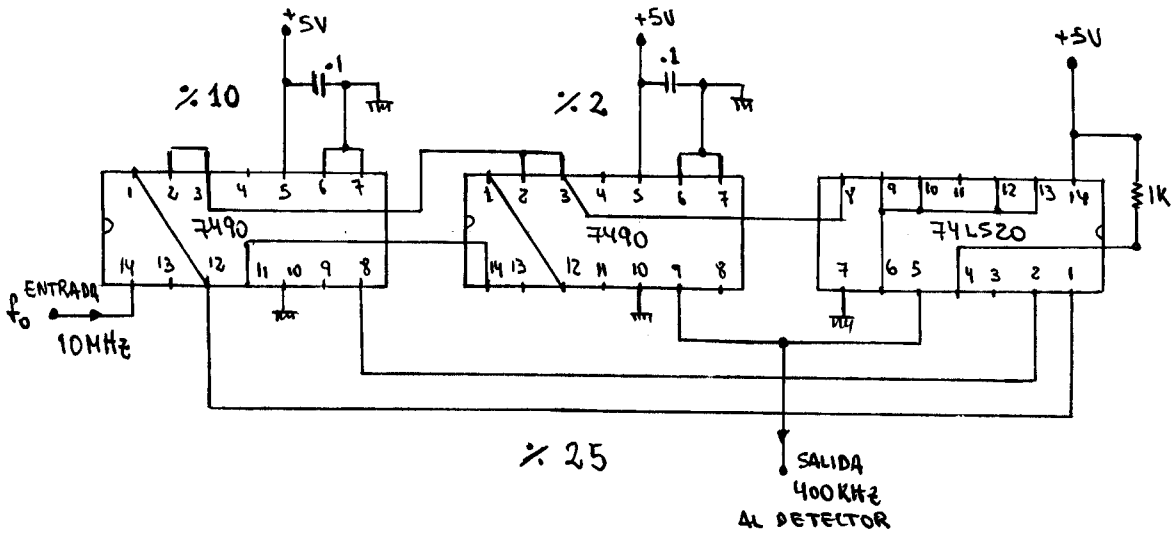


$t_w \approx 1250 \text{ mseg}$   $\rightarrow C_{ext} = 440 \text{ pF}$   
 $\rightarrow R_{ext} = 6 \text{ K}\Omega$

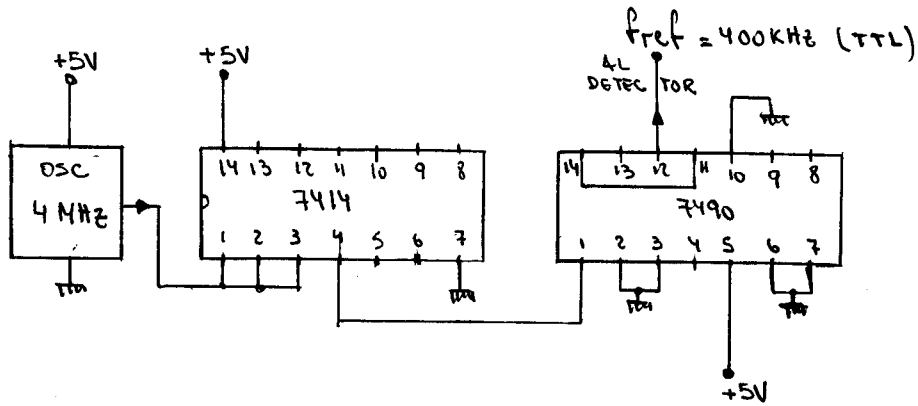


### Circuito digital del divisor fijo por 25

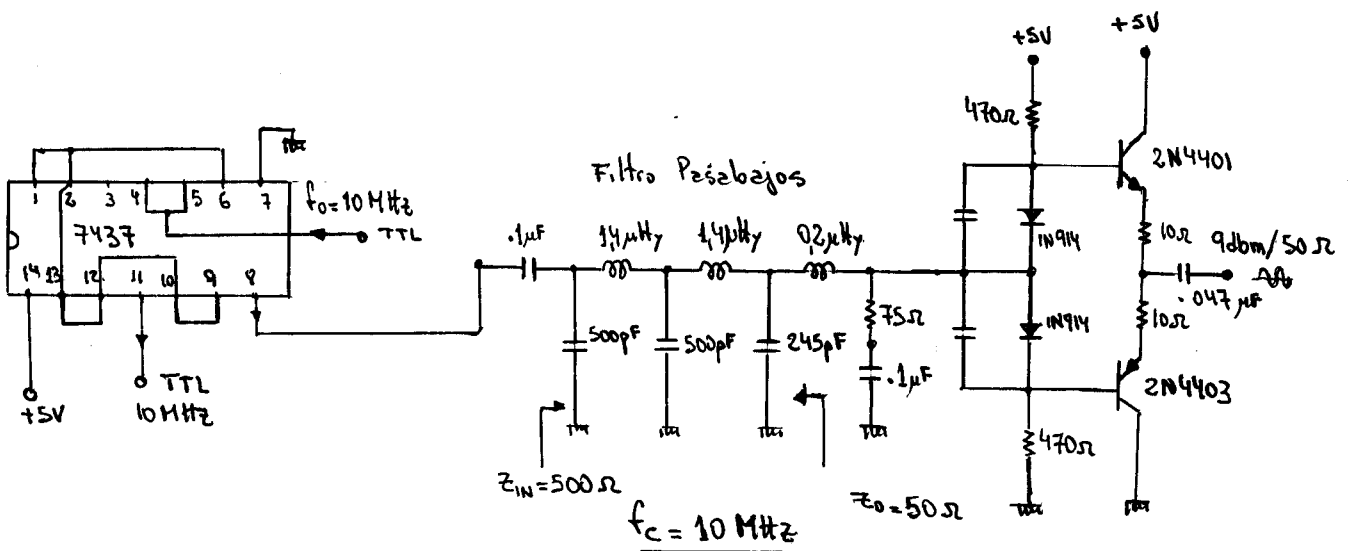
Si  $N = 25 \implies f_{\text{SALIDA}} = 10 \text{ MHz} / 25 = 400 \text{ KHz}$ .



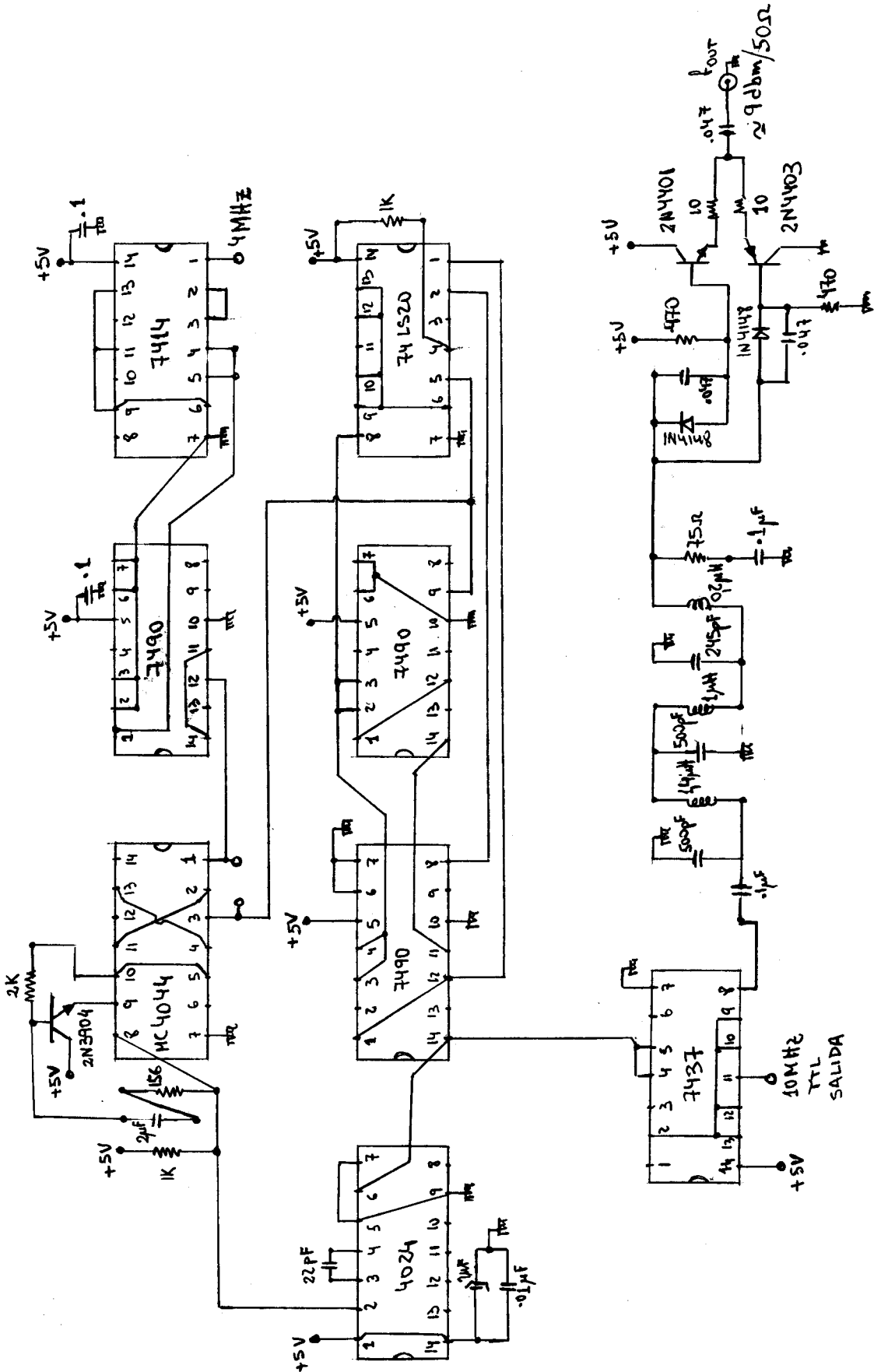
### Circuito digital del oscilador de referencia



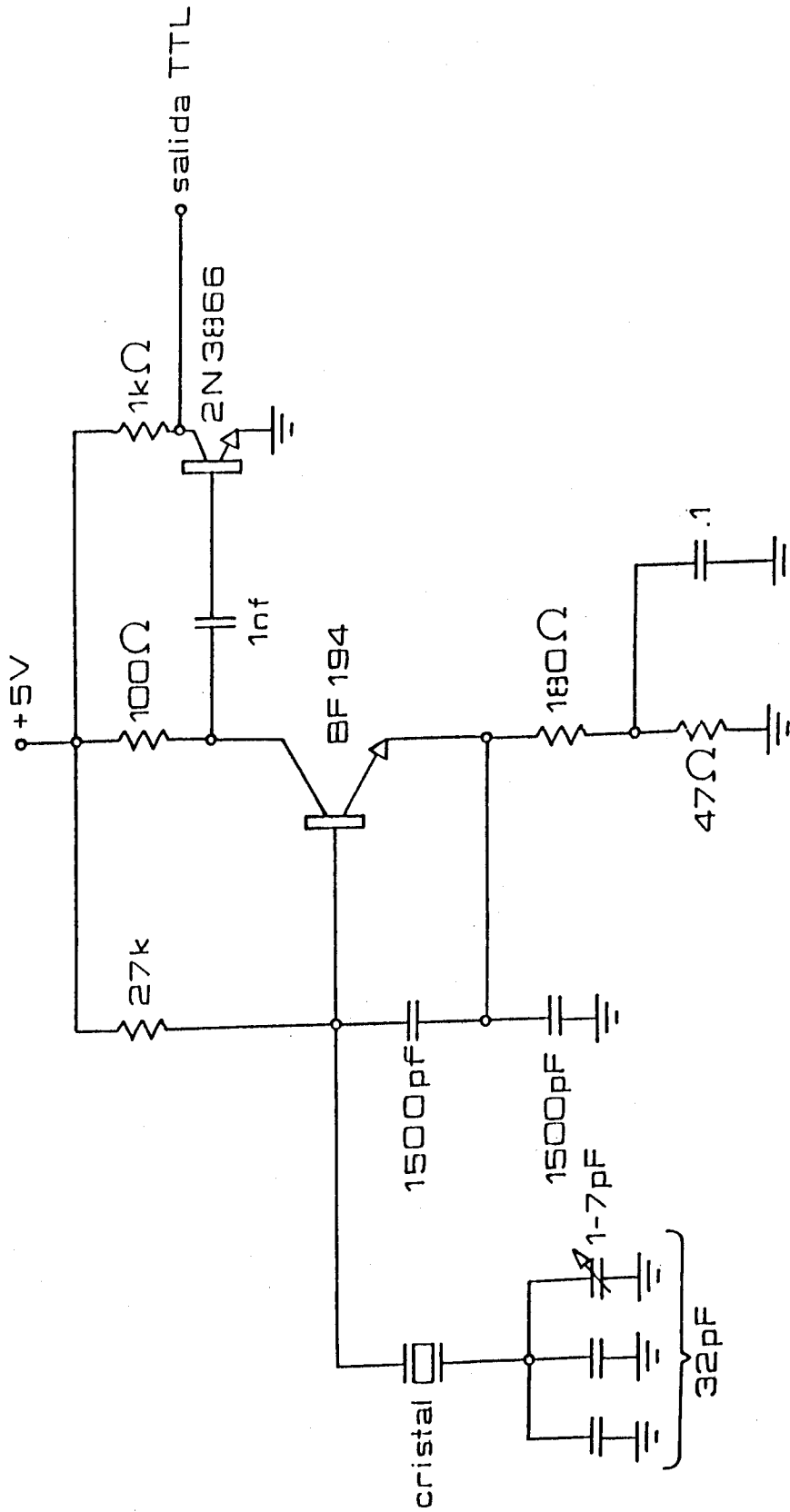
### Obtención de salida senoidal de 10 MHz



Circuito completo del oscilador de 10 MHz



Oscilador de Referencia de 4 MHz.



## LUGAR DE RAICES

La estabilidad del sistema indica las bases para determinar la ganancia para satisfacer las especificaciones de comportamiento dadas.

Este método gráfico muestra como los polos de lazo cerrado (raíces de la ecuación característica) varían con la ganancia del lazo. La ubicación de los polos y ceros del sistema determinará el grado de estabilidad.

El trazado del lugar de raíces puede determinarse utilizando las siguientes reglas:

Regla 1: el número de ramas del lugar es igual al número de polos de la función transferencia de lazo. El número de ceros en el infinito es la diferencia entre  $n^{\circ}P - n^{\circ}Z$  finitos de  $G(s)H(s)$ .

Regla 2: para valores positivos de  $K$  existe el lugar en aquellas secciones del eje real para los que  $n^{\circ}P + n^{\circ}Z$  situados a su derecha es impar.

Regla 3: el lugar de raíces arranca en los polos de  $G(s)H(s)$ ,  $K=0$  y terminan ( $K=\infty$ ) en los ceros de  $G(s)H(s)$  o en el infinito, donde  $K$  es la ganancia de lazo.

Regla 4: los ángulos de las asíntotas del lugar están determinados por:  $\gamma = (1+2n)\pi / (n^{\circ}P - n^{\circ}Z)$   $n=0,1,2,3,\dots$

Regla 5: la intersección de las asíntotas con el eje real viene dada por:  $\sigma_0 = (\sum \text{Re}P - \sum \text{Re}Z) / (n^{\circ}P - n^{\circ}Z)$

Regla 6: el punto de dispersión del lugar entre dos polos reales (o el punto de confluencia entre dos ceros reales) puede determinarse tomando  $dK/ds=0$  y encontrando las raíces de la ecuación resultante se elige aquella situada entre los polos (o ceros) que es el

punto de dispersión (o confluencia).

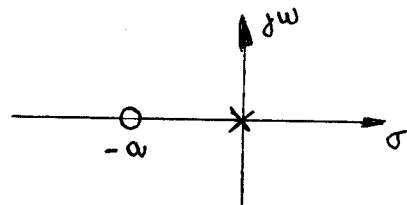
Regla 7: para  $K > 0$  el ángulo de arranque desde un polo complejo es igual a 180 grados menos la suma de los ángulos desde los demás polos más la suma de los ángulos desde los ceros. Cualquiera de estos ángulos pueden ser positivos o negativos.

Regla 8: el cruce del lugar con el eje imaginario puede determinarse estableciendo la distribución de Routh de la ecuación característica en lazo cerrado. Se iguala la  $s^1$  a cero y se forma la ecuación auxiliar de la fila  $s^2$ . Las raíces de la ecuación auxiliar dan los puntos de cruce.

### Ejemplo

El lugar de raíces para una función de transferencia de lazo típica se encuentra, entonces como sigue:

$$G(s)H(s) = K(s+a)/s^2$$



1) números de ramas = 2, las cuales comienzan en  $s=0$  y terminan en los ceros  $-a$  e  $\infty$ .

2) asíntotas:

$$m = n^{\circ}P - n^{\circ}Z = 2 - 1 = 1$$

ángulos de las asíntotas:

$$\gamma = (1+2n)\pi / n^{\circ}P - n^{\circ}Z = (2n+1)\pi / 2-1 = \pi$$

3) intersección de las asíntotas con el eje real:

$$\sigma_0 = (\sum \text{Re}P - \sum \text{Re}Z) / (n^{\circ}P - n^{\circ}Z) = ((-0) - (a)) / (2-1) = -a$$

4) punto de dispersión de los polos:

$$dK/ds \rightarrow 1+G(s)H(s)=0=1+(K(s+a))/s^2 \rightarrow$$

$$s^2+Ks+Ka=0 \rightarrow K=-s^2/(s+a) \rightarrow$$

$$dK/ds=d/ds(-s^2/(s+a))=(s^2+2as)/(s+a)^2=0 \rightarrow$$

$$s^2+2as=0 \rightarrow s(s+a)=0 \quad s_1=0; \quad s_2=-2a$$

5) cruce con el eje imaginario:

$$1+G(s)H(s)=0 \implies s^2+K(s+a)=0 \rightarrow$$

$$s^2+Ks+Ka=0$$

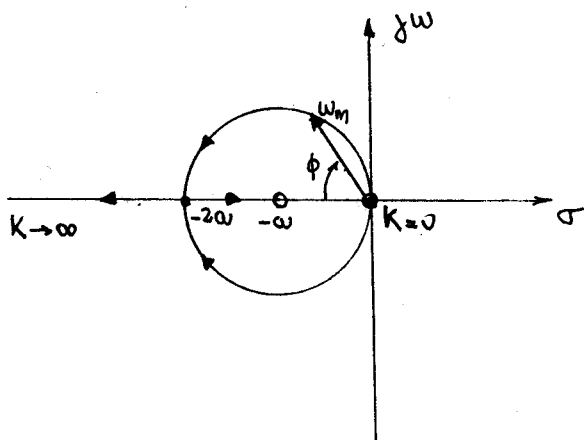
Routh

$s^2$	1	Ka	estabilidad si $K > 0$ $a > 0$
$s^1$	K	0	
$s^0$	Ka		

Ecuación auxiliar:

$$s^2+Ka=0 \implies s=\pm j \quad Ka=\pm j\omega$$

Usando esta información se puede dibujar el Lugar de Raíces y así poder seleccionar las raíces que mejor comportamiento den al sistema.





### Ancho de banda de 3 dB

Haciendo  $s=j\omega$  en la función transferencia de lazo cerrado  $\theta_o(s)/\theta_z(s)$  y poniendola como  $|\theta_o(j\omega)/\theta_z(j\omega)|^2 = 1/2$  se obtiene la expresión del ancho de banda de 3 dB del lazo.

$$\omega_{3dB} = \omega_n (2\xi + 1 + \sqrt{(2\xi + 1)^2 + 1})^{1/2}$$

### Tiempo de establecimiento

$$\xi = 0,8$$

$$\omega_{3dB} \leq \omega_{ref}/100 = 2\pi \cdot 400 \text{ kHz} / 100 = 8\pi \times 10^3 \text{ r/s}$$

$$\omega_n = \omega_{3dB} / (\sqrt{1 + 2\xi^2} + \sqrt{(2\xi^2 + 1)^2 + 1}) = 8\pi \times 10^3 / 2,18$$

$$\implies \omega_n = 11528,78 \text{ r/s}$$

$$T_s = N^\circ \text{ ctes de tiempo} / \xi \omega_n = 3 / 0,8 \times 11528,78 = 0,3 \text{ ms}$$

$$\text{si } \omega_n t = 4,5 \implies t_s \leq 0,3 \text{ mseg}$$

$$R_1, C = 0,5 \times 0,11 \times 43,8 \times 10^6 / (11528,78)^2 \times 26 = 6,97$$

$$C = 6,97 / 2k = 0,34 \mu\text{F}$$

$$R_2 = 2 \times 0,8 / (11528,78) \times 0,34 \times 10^{-6} = 408,2 \text{ ohms}$$

## Bibliografía

- 1 - Gardner, F. M. Phaselock Techniques.
- 2 - D'azzo y Houpis. Sistemas lineales de control.
- 3 - Ginzburg, M. C. Técnicas digitales con C. I.
- 4 - Texas Instruments Inc. The TTL Data Book for Designer Engineers.
- 5 - Garth Nash. Phase-Locked Loop Design Fundamentals, AN 535.
- 6 - Willians, A. B. Electronic Filter Design Handbook.