

EFFECTOS LOCALES DE LA EXPANSIÓN COSMOLÓGICA

Trabajo de Tesis Doctoral

Luciano Combi

Director: Dr. Gustavo Esteban Romero
Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas



LA PLATA, ARGENTINA
- 2022 -

Contenido

Introducción	1
1 Relatividad General y cosmología	6
1.1 Geometría pseudo-Riemanniana	6
1.2 Cinemática en espacio-tiempos curvos	8
1.3 Dinámica de la materia	13
1.4 Dinámica del espacio-tiempo	15
1.5 Horizontes y superficies atrapadas	17
1.6 Cosmología relativista	25
1.7 Λ CDM: el modelo estándar cosmológico	29
2 Interacción global-local y local-global en cosmología	35
2.1 Introducción	35
2.2 Dinámica global: de pequeñas a grandes escalas	36
2.3 Dinámica local: de grandes a pequeñas escalas	44
2.4 Métricas inhomogéneas en espacios-tiempos en expansión	51
3 Dinámica local de observadores cosmológicos	57
3.1 Entorno local en un espacio-tiempo homogéneo	58
3.2 Efectos de rotación en marcos de referencia locales	66
3.3 Efectos locales vs. efectos globales de la expansión acelerada	70
3.4 Conclusiones	74
4 Expansión y cuerpos rígidos relativistas	76
4.1 Sistemas rígidos en relatividad	78
4.2 Sistemas rígidos en cosmología	87
4.3 Conservación de energía en sistemas inmersos en la expansión	90
4.4 Conclusiones	95
5 Horizontes y membranas cosmológicas	97
5.1 Introducción	97
5.2 Propiedades de membranas gravitatorias y horizontes	98
5.3 Horizontes en espacio-tiempos cosmológicos esféricos	104
5.4 Horizontes de materia: infinito-finito	114
5.5 Interacción entre horizontes	116
5.6 Conclusiones	121

6 Radiación y campos electromagnéticos cosmológicos	123
6.1 Campos electromagnéticos y marcos de referencia	124
6.2 Efectos cosmológicos campos electromagnéticos locales	135
6.3 Conclusiones	138
7 Conclusiones	140
8 Apéndice A: Coordenadas de Fermi	144
9 Apéndice B: Colapso gravitacional esférico Newtoniano.	148
Bibliografía	150

Resumen

El Universo era extremadamente uniforme en su edad temprana. A partir de pequeñas fluctuaciones en este medio casi homogéneo, inestabilidades gravitacionales dieron lugar a la red cósmica que observamos hoy en día, compuesta de estructuras como cúmulos de galaxias y grandes regiones de baja densidad. La evolución del espacio-tiempo en el Universo está regida por las ecuaciones de Einstein que determinan la curvatura y en consecuencia la dinámica de los sistemas inerciales. Las ecuaciones de Einstein son ecuaciones no-lineales para la métrica, con lo cual, el acople entre regiones locales y el espacio-tiempo global es altamente no trivial. En el Universo, las inhomogeneidades que observamos hoy en día pueden afectar la dinámica global y, viceversa, la expansión global determina las condiciones de contorno de sistemas astrofísicos locales.

En esta tesis, investigamos problemas relacionados a la influencia de la expansión global cosmológica en sistemas físicos locales. En el Capítulo I introducimos los conceptos básicos de geometría diferencial, Relatividad General, y cosmología relativista que utilizaremos a lo largo de esta tesis. En el Capítulo II discutimos los problemas que surgen de la interacción entre sistemas de escalas pequeñas y grandes en el Universo. Primero discutimos de qué manera pueden influir las inhomogeneidades de pequeña escala a la expansión global en lo que se conoce como el efecto de reacción inversa. Luego introducimos el tema que atañe a esta tesis: la influencia de la expansión en sistemas locales. Discutimos las problemáticas principales para definir un sistema aislado en Relatividad General cuando el espacio-tiempo no es asintóticamente plano y algunos de los interrogantes más relevantes en el contexto cosmológico. Con esto motivaremos los diferentes aspectos que se desarrollarán en los siguientes capítulos. En el Capítulo III analizamos la dinámica de sistemas locales que están embebidos en el Universo en expansión. En particular, analizamos el entorno local inercial de un observador para tres métricas cosmológicas particulares que modelan un universo homogéneo e isotrópico, un universo perturbado por corrientes de materia, y un universo inhomogéneo. En el Capítulo IV analizamos el concepto de espacio en cosmología, investigando cómo definir sistemas relativistas rígidos y cuasilocalmente rígidos en un universo en expansión. En particular, establecemos una serie de teoremas que restringen el comportamiento de estos sistemas. Analizamos también la relación entre la expansión y la pérdida/ganancia de energía de sistemas utilizando varios experimentos mentales sencillos. En el Capítulo V investigamos la dinámica de horizontes cosmológicos y subsistemas gravitatorios, que denominamos membranas, en métricas cosmológicas. Nos enfocamos en definir su energía gravitatoria y los balances asociados. Discutimos el caso de simetría esférica que nos permite establecer relaciones más generales entre las propiedades de horizontes con el contenido de materia y la curvatura del espacio-tiempo. Finalmente construimos una foliación no trivial de la métrica de Schwarzschild-de Sitter y mostramos que los horizontes de agujero negro y cosmológicos pueden interactuar. Finalmente, en el Capítulo VI analizamos soluciones de campos electromagnéticos generados por cargas en métricas cosmológicas homogéneas e

isotrópicas y derivamos expresiones para los campos radiactivos que estas generan.

Agradecimientos

A mi director Gustavo E. Romero, por su confianza, por su tiempo, por enseñarme a pensar claramente, y por su apoyo ineludible durante tantos años.

A mis colegas, a Santi, a Fede, a Vass, a Valen, a Michael, a Guille, a Fito, a Pau y a Ani, por aprender juntos cómo funcionan las cosas.

Al Instituto Argentino de Radioastronomía, al grupo GARRA, al grupo Puma, al Center for Computing Relativity and Gravitation, y al Perimeter Institute.

A Carlos Lousto y Manuela Campanelli, por su generosidad, por su entusiasmo por la ciencia, y por todas las oportunidades que me han dado.

A Daniel Siegel, por su enorme generosidad, por su ética de trabajo, y por enseñarme el oficio de astrofísico.

A todos mis amigos, y en especial a mis super amigos Edu y Fede Armengol por ser excelentes seres humanos y compartir las cosas importantes.

A toda mi familia, y en especial a Ana, a mis viejos y a mi hermana por el amor y cariño que ejercen todos los días desde siempre.

Producción

Esta tesis está basada en los siguientes trabajos originales publicados en revistas internacionales con referato

- Electromagnetic fields and charges in expanding universes. L Combi, GE Romero. *Physical Review D* 99 (6), 064017, (2019)
- Relativistic rigid systems and the cosmic expansion. L Combi, GE Romero. *General Relativity and Gravitation* 52 (9), 1-20, (2020)
- A note on geodesics in inhomogeneous expanding spacetimes. D Pérez, GE Romero, L Combi, E Gutiérrez. *Classical and Quantum Gravity* 36 (5), 055002, (2019)
- Space-time is material. L Combi. In *Contemporary Materialism. Its Ontology and Epistemology*, Synthese Library, 447, Springer, (2021)
- Cosmological membranes. L Combi. (2022) En preparación.

— \diamond —

Otras publicaciones realizadas en el doctorado que no forman parte de la tesis: [Combi y Siegel \(2022\)](#), [Combi et al. \(2021\)](#), [Combi et al. \(2022\)](#), [Gutiérrez y Combi et al \(2022\)](#), [Armengol y Combi et al \(2021\)](#), [Gancio et al. \(2020\)](#), y [Fiscella et al. \(2021\)](#).

Lista de Figuras

- 0.1 Caricatura publicada en un diario holandés (Miércoles 9 de Julio, 1930 General Commerce Newspaper). El profesor de Sitter aparece dibujado con su cuerpo en forma de λ por la constante cosmológica. La leyenda se traduce como: “¿Quién está inflando el globo? ¿Qué provoca que el Universo se expanda o se contraiga? La respuesta es indefectiblemente λ .” 2
- 1.1 **Representación de una congruencia \mathcal{C}** con un corte espacial Σ y una tétrada definida con dos vectores espaciales base $\mathbf{e}_{1,2}$ y un tetravector velocidad \mathbf{u} tangente a una curva γ de la congruencia. El vector ξ representa la desviación espacial con respecto a otra curva que forma parte de la congruencia. 9
- 1.2 **Intepretación de los vectores cinemáticos para una congruencia.** Consideramos como referencia una congruencia inercial con una sección espacial en forma de esfera. La presencia de cizalladura σ_{ab} produce deformaciones de los ejes de simetría espaciales de la esfera, cambiando su forma. La presencia de aceleración \dot{u}^a en una dirección hace que la esfera se mueva en una dirección preferencial produciendo también dilatación temporal entre sus partes (indicado con un sombreado). Si el escalar de expansión Θ es no nulo, entonces la esfera crecerá en tamaño sin perder sus ejes de simetría. Finalmente si la vorticidad ω_{ab} es no nula, la esfera rotará diferencialmente sobre un eje de rotación determinado por el vector de vorticidad 11
- 1.3 (Izquierda) *Representación de un diagrama conforme* para un colapso de materia (en azul) que forma un agujero negro. (Derecha) Diagrama conforme de materia cayendo a un agujero negro pre-existente. Nótese como el horizonte de eventos (\mathcal{H}) está presente en una región alejada del horizonte atrapado local, MTT, en donde la curvatura es grande. En este escenario, el observador no tiene manera de saber que está dentro del horizonte de eventos. Solamente a tiempos posteriores la superficie atrapada crece de repente como para tragar al observador cuyo destino estaba predestinado mucho antes. 17
- 1.4 Representación de una hipersuperficie \mathcal{H} foliada por superficies cerradas 2-dimensionales \mathcal{S}_t . En el gráfico, estas superficies están representadas por curvas en vez de superficies y la dirección vertical puede ser una dirección temporal, espacial o nula, dependiendo de la signatura de la hipersuperficie. 19
- 1.5 (Izquierda) Evolución de una superficie \mathcal{S} a lo largo de un vector \mathbf{u} . (Derecha) Los vectores unitarios normales a \mathcal{S} dados por \mathbf{u} y \mathbf{e} , definen vectores nulos \mathbf{l} y \mathbf{k} también normales a la superficie. 20

- 1.6 (Izquierda) Región normal del espacio-tiempo: los rayos de luz que son emitidos sobre la esfera hacia afuera aumentan su área en su evolución, mientras que los rayos de luz que son emitidos hacia dentro disminuyen su área. (Derecha) Región atrapada del espacio-tiempo: los rayos de luz que salen y entran de una esfera disminuyen su área en su evolución, e.g. dentro de un agujero negro. Representación inspirada en (Senovilla y Garfinkle 2015) 21
- 1.7 Representación de un horizonte atrapado (FOTH) que comienza siendo un horizonte dinámico H tipo espacio foliadas por superficies 2 dimensionales cerradas \mathcal{S} que cumplen $\theta^{(l)} = 0$, con flujos \mathcal{F} entrantes, y vector tangente espacial \mathbf{r} . El horizonte evoluciona a un horizonte aislado no expansivo Δ con vector tangente \mathbf{l} . 23
- 1.8 Medidas de la constante de Hubble a lo largo de la historia. Extraído de Harrison (2001) 27
- 1.9 Diagrama de regiones causales en un Universo de Λ CDM. Extraído de Davis y Lineweaver (2004) 28
- 2.1 **Esquema de la red cósmica y escalas en el Universo.** A partir de pequeñas fluctuaciones sobre un medio de densidad homogénea, observadas en el CMB ($z = 1100$), el Universo evoluciona formando estructura. En la época actual ($z = 0$), la densidad de la materia es homogénea sólo a escalas espaciales mayores a $\mathcal{L}_h \sim 100$ Mpc. La estructura está dominada por *voids*, con escalas características de $\mathcal{L}_v \sim 40$ Mpc, rodeados de paredes y filamentos de materia con escalas características más pequeñas a medida que colapsan \mathcal{L}_m . La curvatura de estos *voids* es negativa y por lo tanto se expanden más rápido que las regiones más densas. El tiempo propio (representado por reloj) en estas regiones pasa más rápido que en regiones de densidad y esto tiene efectos en la evolución de la energía de fotones. Notemos finalmente que la curvatura promedio del espacio-tiempo no es nula estrictamente. (*Imágenes obtenidas en simulaciones cosmológicas. Crédito: V.Springel, Max-Planck Institut für Astrophysik*) 40
- 2.2 (Derecha) La propagación de la luz ante curvatura local de Ricci y curvatura de Weyl es cualitativamente diferente. La curvatura de Ricci tiende a focalizar los rayos de luz positivamente, mientras que la curvatura de Weyl (a primer orden) actúa como un lente atisgmático, con focalización positiva en un plano y negativa en el otro (Penrose 2005). (Izquierda) En modelos globales cosmológicos tipo FLRW suponemos que en promedio los haces desde luz se mueven en un medio uniforme con curvatura de Ricci no nula. En realidad, la situación es similar al panel de abajo, donde los haces de luz se mueven casi en vacío con Ricci nulo y estructuras gravitacionales con curvatura de Weyl no nula. 42
- 2.3 Representación de una hipersuperficie espacial Σ perpendicular a una congruencia tipo-tiempo \mathbf{t} que define una membrana \mathcal{T} . Esta membrana contiene una región $\mathcal{S} \in \Sigma$ que posee una curvatura no nula. Para resolver el problema de valores iniciales de contorno se debe especificar el campo en \mathcal{S} e imponer condiciones de contorno en $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}$. 47

2.4 Diagramas conformes para (a) Minkowski, (b) de Sitter “eterno”, (c) FLRW (desacelerado) y (d) FLRW-de Sitter. En el diagrama (b) de Sitter, $\mathcal{I}_{\text{local}}^+$ corresponde al horizonte de eventos cosmológico, la zona gris es el espacio accesible al observador en el centro; la línea verde corresponde a la trayectoria de una partícula libre que se mueve inercialmente a una distancia del origen.	49
3.1 Diagrama espacio-temporal en coordenadas (t, R) para un Universo de Einstein-de Sittere. En líneas grises mostramos las superficies de simultaneidad $t_L = \text{constante}$ para un observador local; notemos cómo estas se tuercen al pasado. Dos sistemas inerciales separados comóviles al flujo de Hubble ($r = \text{constante}$) se muestran en líneas punteadas. Estos aumentan su distancia propia a medida que pasa el tiempo. En línea sólida, mostramos el radio de Hubble.	59
4.1 Diagrama embebido de un disco rígido acelerado (izquierda) y rotante (derecha). El color representa el corrimiento al rojo con respecto al centro. En el caso de un disco acelerado, la geometría se mantiene Euclidiana, mientras que la geometría espacial de un disco rígido rotante se deforma, como se aprecia en el diagrama embebido.	84
5.1 Representación de una membrana tipo tiempo H con un vector tangente generador u^a que representa una tetravelocidad, y foliada por superficies esféricas (aquí representadas por curvas) con vector normal e^a . Estas membranas pueden absorber y emitir flujos, con lo cual pueden crecer y decrecer su área.	100
5.2 Representación esquemática de diferentes escalas de influencia local. En la parte interior tenemos estructuras ya colapsadas y viralizadas, en donde la expansión promedio es nula. En la región donde $\theta < 0$ la materia está siendo acretada por la sobredensidad central hasta llegar a un radio donde $\theta = 0$, que divide la expansión del colapso de materia. La materia fuera de esta región se expande pero no sigue el flujo de Hubble ya que están siendo atraídas por la sobredensidad. En efecto, en un tiempo futuro, estas estructuras colapsarán eventualmente. El radio máximo de la estructura para el cual ya no hay más colapso es el horizonte de materia futuro, para el cual el sistema alcanza un equilibrio: lo que se encuentra afuera de esta superficie $\theta(t_*) = 0$ no puede ser acretado por la presencia repulsiva de la constante cosmológica. Fuera de este radio, tenemos materia expandiéndose con perturbaciones al flujo de Hubble y mucho más afuera, la materia se expande con el flujo de Hubble global.s	115
5.3 Solución para $\theta^{(l)} = 0$ para diferentes tiempo (en azul). El horizonte cosmológico con $M = 0$ se representa en amarillo y el horizonte de agujero negro con $\Lambda = 0$ en verde (pequeño abajo).	119
5.4 Igual que la Figura anterior para cuando el horizonte del BH emerge del otro lado	120
6.1 Campo eléctrico para una carga puntual en espacios-tiempo de FLRW con diferentes curvaturas espaciales.	134
6.2 Representación de esfera rígida y carga comovil al fluido cósmico	136

8.1 Representación de las coordenadas de Fermi construidas a partir de una curva tipo-tiempo $x^a(\tau)$.

144

Convenciones

A lo largo de esta tesis tomaremos las siguientes convenciones formales:

- **Unidades:** Utilizaremos unidades geométricas en donde la velocidad de la luz, c ($[\text{Distancia}] \times [\text{Tiempo}]^{-1}$), y la constante gravitacional, G ($[\text{Distancia}]^3 \times [\text{Masa}]^{-1} \times [\text{Tiempo}]^{-1}$) son fijadas a uno:

$$c = G = 1 \quad (1)$$

En Relatividad General, todo queda determinado entonces por una sola dimensión o escala.

- **Índices:** Utilizamos letras latinas $a, b, c = 0, 1, 2, 3$ para indicar índices espacio-temporales de bases coordenadas, $i, j, k, .. = 1, 2, 3$ para índices espaciales, y $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = 0, 1, 2, 3$ para índices en bases ortonormales.
- **Notación de tensores:** Utilizamos resaltado en negrita para indicar tensores, con letras mayúsculas, \mathbf{T} , y vectores, con letras minúsculas, \mathbf{v} . Los covectores también se indican con resaltado en negrita, utilizando letras griegas, $\boldsymbol{\sigma}$.
- **Signos:** La convención para la signatura y signos en la curvatura los tomamos de [Misner et al. \(1973b\)](#) (convención de Landau-Lifshitz), en donde la métrica del espacio-tiempo tiene signatura:

$$\text{sign}(\mathbf{g}) = (-, +, +, +), \quad (2)$$

El tensor de Riemann sigue la convención de Wald; para un covector ω_c definimos

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = \omega^d R_{abc}{}^d, \quad (3)$$

el tensor de Ricci se define por la contracción del tensor de Riemann con signo positivo

$$R_{ac} = +R^{abcb}, \quad (4)$$

y las ecuaciones de Einstein en unidades geométricas están dadas por:

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (5)$$

Los conmutadores se escriben de la manera usual $2v_{[a}u_{b]} = v_a u_b - u_a v_b$, lo mismo que los anticonmutadores $2v_{(a}u_{b)} = v_a u_b + u_a v_b$.

Acrónimos y términos

Utilizaremos usualmente los siguientes acrónimos en la tesis:

- **RG**: Relatividad General
- **Λ CDM**: *Lambda Cold Dark Matter*, Materia oscura fría.
- **CMB**: *Cosmic Microwave Background*, fondo cósmico de microondas
- **NEC**: *Null Energy Conditions*, condiciones de energía nula
- **EM**: Electromagnético.

También utilizaremos usualmente los siguientes términos:

- **Espacio-tiempo**: entidad física representada por el tensor métrico y la variedad.
- **Materia**¹: cualquier entidad física que no es el espacio-tiempo, e.g. campos, fluidos, partículas, y posea un tensor de energía-impulso.
- **Local**: Propiedad que refiere a una escala física por debajo del radio de Hubble, $R_{\mathcal{H}} := 1/H(t) \sim 5$ Gpc, donde $H(t)$ es el factor de Hubble.
- **Global**: Propiedad que refiere a una escala física mayor al radio de Hubble.
- **Cuasilocal**: Propiedad que refiere a la frontera de un objeto en contraposición a una propiedad definida en un punto. Sinónimo de holográfico.

¹Notemos que en la literatura también se define “materia” como entidad física con potencialidad de cambio, con lo cual el espacio-tiempo es en este sentido material. Siguiendo la literatura relativista, decidimos reservar este término para sistemas físicos que no son espacio-tiempo.

Introducción

*To see a World in a Grain of Sand
And a Heaven in a Wild Flower,
Hold Infinity in the palm of your hand
And Eternity in an hour.*

AUGURIES OF INNOCENCE, WILLIAM BLAKE

El Universo es el sistema compuesto por todos los sistemas que existen. Las interacciones entre las entidades físicas que lo componen producen que el Universo como un todo sea dinámico. La interconexión entre sus partes muestra que para comprender lo que ocurre a gran escala, debemos entender cómo funciona la naturaleza en nuestro entorno y *viceversa*. Las leyes de la física aplicadas al Universo constituyen la base de la cosmología científica moderna. Entre todos los sistemas físicos que forman parte del Universo, el espacio-tiempo ocupa un rol distinguido. El espacio-tiempo es el escenario en el cual ocurren las interacciones de la materia pero también constituye un sistema dinámico en sí. La gran densidad de materia en el Universo produce que el espacio-tiempo se curve a gran escala y esta curvatura produce que las distancias entre sistemas inerciales, como galaxias, crezcan con el tiempo. La dinámica entre materia y espacio-tiempo está descrita por la teoría de la Relatividad General (RG) de Einstein, una teoría geométrica y no lineal del espacio-tiempo.

El primer modelo científico para la dinámica global del Universo fue propuesto por el mismo Einstein apenas dos años después de la formulación de su teoría. El modelo proponía un universo estático cuyo espacio-tiempo estaba descrito por la RG. En la construcción de su modelo, Einstein se guió por lo que denominó *Principio de Mach*, para el cual el espacio-tiempo debía estar determinado completamente por la distribución local de materia; por esta razón, Einstein introdujo una constante cosmológica que compensaba el contenido de materia y dejaba estático al Universo. El mismo año, sin embargo, el holandés de Sitter mostró que existían soluciones sin contenido de materia pero en las cuales las distancias entre partículas tendían a crecer aceleradamente. Este argumento y otros mostraron a Einstein que el principio de Mach no era una parte intrínseca de la teoría y que, por el contrario, la RG implica que el espacio-tiempo debía ser un ente físico. En los siguientes años, Friedmann, Robertson,

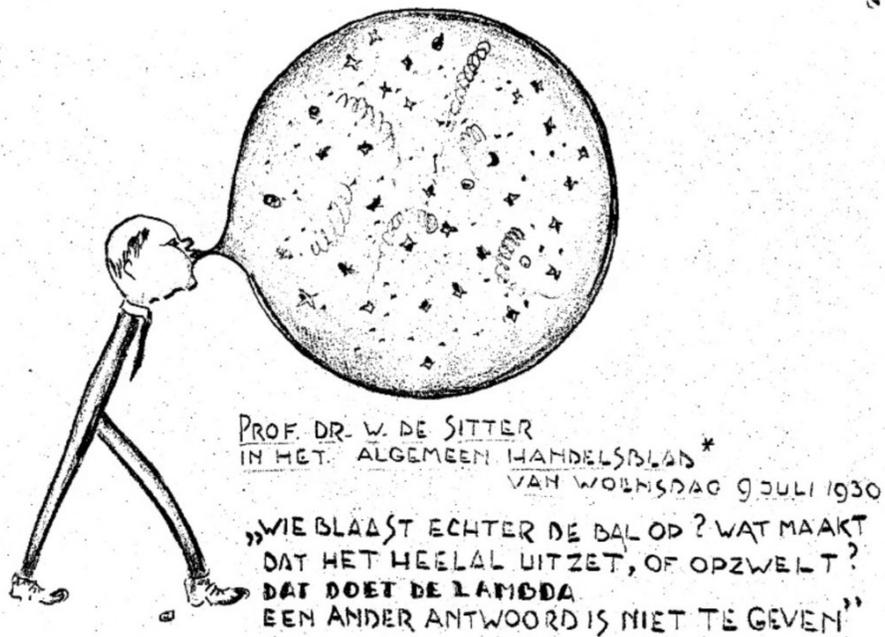


Figura 0.1: Caricatura publicada en un diario holandés (Miércoles 9 de Julio, 1930 General Commerce Newspaper). El profesor de Sitter aparece dibujado con su cuerpo en forma de λ por la constante cosmológica. La leyenda se traduce como: "¿Quién está inflando el globo? ¿Qué provoca que el Universo se expanda o se contraiga? La respuesta es indefectiblemente λ ."

Lemaitre y otros mostraron que la RG admitía una familia amplia de modelos cosmológicos globales. La mayoría de estos modelos mostraban que el Universo, sorprendentemente, debía estar en expansión. En 1929, Edwin Hubble observó que la luz de las galaxias se corría más al rojo cuanto más alejadas estaban las galaxias. Este resultado, junto con los trabajos teóricos de Robertson, mostraron fuerte evidencia de que el Universo estaba en expansión, tal como predecía la RG para un Universo homogéneo.

El siguiente gran paso en la cosmología ocurriría en la década del sesenta con el avance tecnológico de la astronomía observacional y el comienzo de la llamada *década de oro de la Relatividad General*, donde hubo grandes avances teóricos utilizando esta teoría. En esta década, con el descubrimiento de los cuásares y el fondo cósmico de microondas, se estableció la idea de un Universo en expansión y en evolución. En este nuevo modelo de *Big Bang*, el Universo tiene un estado inicial, hace 13,8 mil millones de años, en el cual la densidad y temperaturas eran extremadamente altas. En estas condiciones extremas, fotones y electrones se mantuvieron acoplados hasta que la opacidad del plasma decreció por la expansión, permitiendo que la radiación escape y llegue a nuestros telescopios. Esta luz forma el fondo cósmico de microondas (CMB), una huella directa del Universo temprano que permea todo el espacio.

Luego de varias décadas de avances teóricos y observacionales, sobre todo en el estudio de formación de estructura y evolución de las perturbaciones, el descubrimiento de la expansión acelerada consolidó lo que hoy conocemos como el modelo estándar cosmológico denominado Λ CDM, Λ *cold dark matter*, por sus componentes principales: materia oscura fría y una constante cosmológica Λ que modifica las ecuaciones de la RG que modelan el espacio-tiempo.

A partir de suponer un Universo homogéneo a gran escala con pequeñas perturbaciones primordiales, el modelo es uno de los más exitosos de la física moderna: con sólo seis parámetros puede explicar un amplio rango de observaciones, desde el Universo temprano hasta la formación de estructura que da lugar a las galaxias. En las últimas dos décadas mediante grandes *surveys* y mejores mediciones del CMB, la cosmología ha entrado en una fase de alta precisión. Con ello, han aparecido discrepancias observacionales con el modelo estándar que obligan reevaluar algunas de sus hipótesis. Las anomalías pueden deberse tanto a errores sistemáticos en las observaciones como a insuficiencias de nuestros modelos físicos. Esto quiere decir que debemos construir modelos más complejos o que, incluso, debemos modificar nuestras teorías fundamentales. Además de las discrepancias observacionales, la aplicación de la RG en cosmología tiene numerosas sutilezas conceptuales que todavía no están resueltas.

La interacción gravitatoria a través de diferentes escalas es complicada de modelar. La dificultad para conectar la dinámica del espacio-tiempo en diferentes escalas surge principalmente de la no linealidad de las ecuaciones de Einstein. La cosmología se ocupa de modelos globales (emergentes) de toda la materia. Para construir un modelo global del Universo debemos considerar la dinámica promedio de todos los sistemas locales. Las teorías físicas de carácter macroscópico surgen como representaciones efectivas de teorías de pequeñas escalas; pensemos, por ejemplo, en la termodinámica o el electromagnetismo de medios materiales. A diferencia de estas teorías, la no linealidad de las ecuaciones de Einstein introduce términos adicionales en el modelo efectivo global, con lo cual las ecuaciones a resolver pueden ser muy diferentes a las ecuaciones locales. En particular, la curvatura espacial promedio no se conserva en los modelos efectivos del espacio-tiempo, lo que puede introducir efectos de reacción inversa sobre la dinámica, i.e. efectos que desvíen la dinámica de un modelo homogéneo e isotrópico. La curvatura espacial dinámica, ausente en la métrica homogénea utilizada en Λ CDM puede ser también de importancia para los modelos de formación de estructura construidos exclusivamente con gravedad Newtoniana. La relevancia de este efecto sobre la dinámica global todavía es materia de discusión.

En contraposición al problema de construir modelos globales del Universo, tenemos el problema de modelar la física de sistemas locales que están *inmersos* en el Universo. Dado que todo sistema es parte del Universo, las condiciones iniciales de la expansión determinan las condiciones de formación y de contorno para cualquier sistema local. A partir de fluctuaciones en la densidad del plasma primordial, el colapso gravitacional junto con procesos de viralización forman halos de galaxias, galaxias, estrellas, planetas y otros sistemas de pequeña escala. Las condiciones iniciales del Universo se pueden observar inmediatamente en nuestro entorno, e.g. en la baja temperatura del CMB en nuestro entorno y la baja entropía del espacio exterior, la abundancia de elementos livianos, y las condiciones de irreversibilidad de los procesos termodinámicos locales.

La principal dificultad para determinar si un sistema gravitatorio puede considerarse aislado es que el espacio-tiempo es una entidad continua y sin bordes (espacialmente infinita). Un sistema físico experimenta entonces la influencia de todos los demás cuerpos gravitatorios del Universo, incluso los que están fuera de su dominio causal dadas las restricciones de las ecuaciones de Einstein. En modelos relativistas, para caracterizar las propiedades un sistema gravitatorio *aislado* se suelen imponer condiciones de contorno asintóticamente planas, i.e., requerimos que la interacción gravitatoria sea despreciable en infinito. En cosmología, sin

embargo, no existen en rigor tales condiciones ya que el sistema siempre está rodeado de otros sistemas; ¿cómo caracterizamos entonces un sistema relativista aislado? Debemos primero adoptar un marco conceptual que nos permita definir y analizar las propiedades de un sistema gravitatorio de manera (cuasi)local, es decir, definir un subsistema del espacio-tiempo. Esto es necesario, por ejemplo, para definir un agujero negro en un espacio-tiempo en expansión, para lo cual debemos adoptar conceptos locales en vez de globales.

Los problemas conceptuales relacionados a la dinámica local de un sistema inmerso en la expansión forman el punto de partida de esta tesis. Nuestro objetivo es analizar aspectos de la influencia de la expansión sobre sistemas locales dentro del marco de la Relatividad General, centrándonos en los aspectos gravitatorios. Algunas de las preguntas específicas que nos interesarán a lo largo de esta tesis son: ¿Cómo definimos un sistema gravitacional aislado si el Universo se expande? ¿Cómo afecta la expansión del Universo a sistemas locales, e.g. el sistema solar, para diferentes modelos cosmológicos? ¿Cómo definimos un sistema local dado una métrica global? ¿Es posible “resistir” la expansión del Universo si nos movemos en la dirección contraria? ¿Existen sistemas rígidos en un espacio-tiempo en expansión? ¿Cómo son las propiedades dinámicas de los horizontes cosmológicos? ¿Pueden interactuar horizontes de agujeros negros y horizontes cosmológicos? ¿Cuáles son las propiedades de cargas en movimiento en un Universo en expansión? ¿Qué ocurre si una carga alejada se expande en un Universo acelerado, produce radiación? Si una carga se mueve de manera inercial pero con una velocidad peculiar, ¿produce radiación?.

La estructura de la tesis es la siguiente:

Estructura de la tesis

- **Capítulo 1: Relatividad General y cosmología.** Fundamentos de geometría pseudo-Riemanniana con énfasis en propiedades de congruencias y geometría de hipersuperficie. Conceptos básicos de cosmología relativista y el modelo Λ CDM.
- **Capítulo 2: Interacción global-local y local-global en cosmología.** Problema de las escalas en cosmología; analizamos de qué manera influyen los sistemas locales a la dinámica global del Universo, y viceversa, cómo influye la dinámica global a la física local.

Los siguientes capítulos constituyen los aportes originales de esta tesis:

- ◇ **Capítulo 3: Dinámica local de la expansión cosmológica.** Dinámica inercial en el entorno local de un observador que habita un Universo en expansión. Sistema de coordenadas adaptado a un observador para diferentes métricas cosmológicas: FLRW, FLRW perturbado y una métrica inhomogénea.
- ◇ **Capítulo 4: Expansión y sistemas rígidos relativistas.** Concepto de expansión y rigidez en métricas cosmológicas. Movimiento rígido en espacio-tiempos máximamente simétrico y propiedades generales en sistemas rígidos. Concepto de rigidez superficial o cuasilocal; propiedades. No existencia de sistemas rígidos en cosmología.

- ◇ **Capítulo 5: Horizontes y membranas cosmológicas.** Propiedades de horizontes atrapados cosmológicos. Análisis detallado de horizontes en espacio-tiempos esféricos. Interacción de horizontes.
- ◇ **Capítulo 6: Radiación y campos electromagnéticos cosmológicos** Radiación de cargas en espacio-tiempos en expansión. Dependencia del campo EM con el sistema de referencia. Radiación electromagnética

— ◇ —

Gráficos y Figuras: Todas las figuras, excepto si se indica lo contrario, fueron realizadas con Inkscape (<https://inkscape.org/>) y se pueden encontrar en el repositorio público <https://gitlab.com/combi.luciano/efectos-locales-de-la-expansion-cosmologica>

— ◇ —

Cálculo simbólico: Los cálculos simbólicos en geometría pseudo-Riemanniana se realizaron con el paquete de manipulación tensorial `xAct`, parte de `Mathematica`. Los códigos utilizados se pueden encontrar en el repositorio público <https://gitlab.com/combi.luciano/efectos-locales-de-la-expansion-cosmologica>.

1

Relatividad General y cosmología

— \diamond —

En este capítulo introducimos los conceptos fundamentales y herramientas matemáticas que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Para representar propiedades de sistemas físicos necesitamos una estructura formal que nos permita formular rigurosamente teorías y sus consecuencias (Bunge 1967). En particular, la cosmología tiene como objeto de estudio al Universo, compuesto de materia y espacio-tiempo; por lo tanto, necesitamos las herramientas de la geometría diferencial pseudo-Riemanniana (también llamada Lorentziana). En la primer sección, definimos los constructos de geometría diferencial básicos como variedad, espacio-tangente, métrica, y curvatura. En la segunda sección, establecemos como representar propiedades de objetos físicos con estos conceptos geométricos. Luego, describimos la teoría de la Relatividad General, introduciendo las ecuaciones de Einstein y alguna de sus consecuencias más importante. Con esto, discutimos qué se entiende por modelo cosmológico y la métrica fundamental que necesitamos para describir el universo en expansión: la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). En la última parte de este capítulo, damos una breve introducción al modelo estándar de la cosmología, focalizándonos en la formación de estructura, que será importante para contextualizar el siguiente capítulo.

— \diamond —

1.1. Geometría pseudo-Riemanniana

Las propiedades de sistemas físicos clásicos se pueden representar utilizando el concepto de variedad diferenciable, que denotamos como \mathcal{M} ¹. Para nuestros propósitos, suponemos a lo largo de este trabajo que la variedad es Hausdorff y de cuatro dimensiones (Penrose y Mermin 1990; Wald 2010). Para representar la mayoría de propiedades físicas, utilizamos cantidades tensoriales definidas en el producto Cartesiano de espacios tangentes, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(p)$, definido en cada punto de la variedad.

En particular, un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(p)$ en un punto $p \in \mathcal{M}$ se puede describir en una base del espacio tangente $\partial_i = \partial/\partial x^i$ asociada a un sistema de coordenadas $U_p = \{x^i\}$, o también en una base arbitraria $\{\mathbf{e}_a\}$ no asociada a coordenadas (llamadas bases anholónomas):

¹La evidencia experimental muestra que el espacio y el tiempo son entidades continuas a bajas energías hasta al menos escalas de 10^{-24} cm (Hossenfelder 2013), tal como se observa en detectores de ondas gravitacionales

$$\mathbf{u} = u^a \partial_a = u^{\hat{a}} \mathbf{e}_{\hat{a}}. \quad (1.1)$$

Necesitamos introducir nociones de distancia y de cambio en la variedad para formular las ecuaciones de movimiento de nuestras teorías. Dotamos entonces a la variedad de una métrica, \mathbf{g} , pseudo-Riemanniana y de signatura $+2$. Las métricas pseudo-Riemannianas establecen una norma para los vectores del espacio tangente, $\|\mathbf{v}\|^2 := \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, los cuales quedan determinados como vectores tipo tiempo ($\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$), tipo luz ($\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$), o tipo espacio ($\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$). Puede mostrarse que dotada con esta métrica, la variedad resulta también paracompacta (Hawking y Ellis 1973).

Con la métrica podemos definir la noción de espacio-tiempo como la dupla $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Las teorías físicas que trataremos son invariantes ante difeomorfismos, $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, con lo cual la representación completa del espacio-tiempo está dada en rigor por la clase de equivalencia $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ sobre ϕ . Cada punto de la variedad, una vez determinada la métrica, representa un evento espacio-temporal donde se definen propiedades de los sistemas físicos (Combi 2022)².

El cambio o transporte de un tensor entre dos puntos $p, q \in \mathcal{M}$ no está naturalmente definido en una variedad ya que esto implica una operación entre dos espacios tangente distintos. Existen varios constructos geométricos que podemos utilizar para evaluar cambios en una variedad, e.g. derivadas de Lie, conexiones afines, o derivadas exteriores. Dado un campo vectorial, \mathbf{u} , la derivada de Lie sobre otro vector \mathbf{v} queda definida como

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} := (u^a \partial_a v^b - v^a \partial_a u^b) \partial_b \equiv [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad (1.2)$$

donde en la última igualdad relacionamos la derivada de Lie con el conmutador de dos vectores. Para un escalar, la derivada es básicamente una derivada direccional:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\phi = u^a \partial_a \phi. \quad (1.3)$$

La derivada de Lie depende necesariamente de la definición del campo vectorial \mathbf{u} a lo largo de la curva tangente. Para formular una noción puramente local de derivada direccional, donde esta dependa exclusivamente de $\mathbf{u}(p)$ y no de su derivada, podemos introducir un espacio afín, caracterizado por una conexión Γ_{bc}^a ; la conexión define una derivada covariante ∇ que actúa sobre tensores del espacio tangente (Ortín 2004). En base coordenada, la derivada covariante para un vector se puede expresar como:

$$\nabla_b v^a := \partial_b v^a + \Gamma_{bc}^a v^c. \quad (1.4)$$

La conexión queda determinada en parte por las propiedades formales básicas que se le exigen a la derivada covariante para ser considerada una derivada: regla de Leibniz, multiplicación por un escalar, y aditividad. Tenemos todavía, sin embargo, una gran libertad para construir la conexión. En Relatividad General, utilizamos la derivada covariante que está completamente determinada por la métrica; equivalentemente, esta conexión se puede

²Por la invariancia ante difeomorfismos, los puntos de la variedad no tienen un significado físico a priori antes de resolver las ecuaciones para la métrica. Dadas condiciones iniciales de Cauchy, prefijar los puntos de la variedad lleva a la pérdida de determinismo de las soluciones. Esto se conoce como el Argumento del Agujero, e indica la ausencia de estructuras de fondos en la Relatividad General, c.f. Earman y Norton (1987); Stachel (2014); Iftime y Stachel (2006)

construir exigiendo que esta sea simétrica y que la derivada covariante sea compatible con la métrica, $\nabla_a g_{bc} = 0$. De estas condiciones, la conexión queda determinada por los símbolos de Christoffell:

$$\Gamma_{bc}^a := \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c g_{db} + \partial_b g_{dc} - \partial_d g_{bc}). \quad (1.5)$$

Notemos que existen conexiones mucho más generales que pueden ser no compatibles con la métrica y no simétricas. Diferentes conexiones poseen grados de libertad no determinados por la métrica y pueden ser utilizadas para construir teorías alternativas de la gravitación (Combi y Romero 2018)³. Una vez definido el concepto de derivada covariante, podemos transportar paralelamente vectores y compararlos en diferentes puntos. Es fácil mostrar que la derivada covariante con conexión de Levi-Civita conserva los productos escalares ante transporte paralelo de vectores (compatibilidad de la métrica) y la torsión de la conexión es cero, es decir, los paralelogramos en la variedad son siempre cerrados.

El transporte de un covector ω_c en un bucle cerrado está determinado, infinitesimalmente, por el conmutador de la derivada covariante que define así el tensor de curvatura de Riemann, R_{abc}^d :

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = \omega^d R_{abc}^d, \quad (1.6)$$

donde en términos de la conexión tenemos

$$R_{abc}^d := \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_a \Gamma_{bc}^d + \Gamma_{eb}^d \Gamma_{ac}^e - \Gamma_{ea}^d \Gamma_{bc}^e. \quad (1.7)$$

El tensor de Riemann se puede descomponer naturalmente como:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{1}{3} R g_{a[c} g_{d]b}, \quad (1.8)$$

donde

$$R_{bd} := R_{abcd} g^{ca}, \quad (1.9)$$

es el tensor de Ricci y C_{abcd} es el tensor invariante conforme de Weyl. Como veremos más adelante, en Relatividad General, si consideramos un modelo donde no hay materia, el tensor de Weyl determina completamente la curvatura del espacio-tiempo. El tensor de Weyl cuantifica los grados de libertad del espacio-tiempo sin la contribución local generada por la materia.

1.2. Cinemática en espacio-tiempos curvos

El espacio-tiempo es el escenario de fondo en el cual se mueve la materia. Para caracterizar la cinemática de la materia, empecemos considerando una curva $\gamma \in \mathcal{M}$ con representación coordinada $x^a(\tau)$, parametrizada por el parámetro afín τ . Su vector tangente está dado por $u^a = dx^a/d\tau$, que llamamos tetravelocidad, si este es tipo tiempo. Utilizando la métrica,

³Einstein utilizó otros conceptos más generales de conexión en su teoría teleparalela, donde introdujo la conexión de Weinzenbock que posee torsión pero no curvatura (Combi y Romero 2018). Elie Cartan fue el primero en reconocer el concepto formal de espacio afín de manera más general (Debever 2015)

podemos definir un tiempo (distancia) a partir de una curva tipo tiempo (tipo espacio) como (Synge 1960):

$$L = \int_{\gamma} \sqrt{\left| g_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt} \right|} dt. \quad (1.10)$$

Si dejamos puntos finales e iniciales fijos, denominamos *geodésica* a aquella curva que extremiza la distancia ya sea mínima o máxima. Si la curva es geodésica entonces, tomando una parametrización afín, la tetravelocidad satisface

$$u^a \nabla_a u^a = \frac{du^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a u^b u^c = 0. \quad (1.11)$$

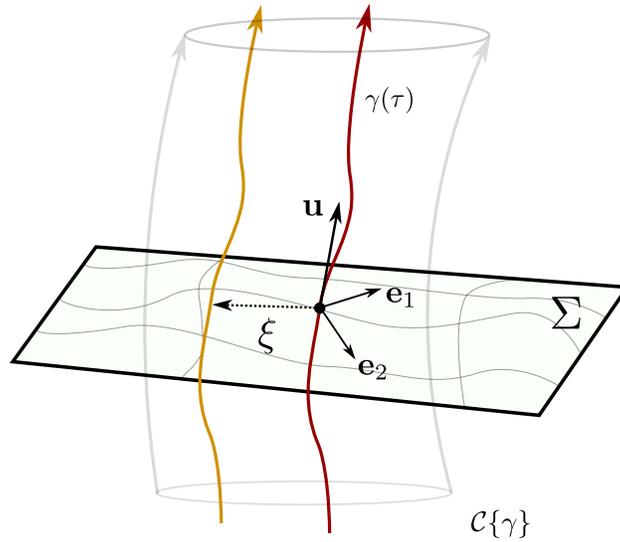


Figura 1.1: **Representación de una congruencia** \mathcal{C} con un corte espacial Σ y una tetrada definida con dos vectores espaciales base $e_{1,2}$ y un tetravector velocidad \mathbf{u} tangente a una curva γ de la congruencia. El vector ξ representa la desviación espacial con respecto a otra curva que forma parte de la congruencia.

Esta ecuación representa el movimiento libre de cuerpos puntuales que solamente interaccionan con el espacio-tiempo (Poisson 2004a). Tomando una parametrización afín para la tetravelocidad, la norma del vector es unitaria $u^a u_a = -1$ y se conserva a lo largo de la curva. Supondremos esto siempre que consideremos curvas tipo tiempo. Podemos generalizar el concepto de trayectoria al de *congruencia* tomando un campo vectorial $\mathbf{u}(x^a)$ sobre una región del espacio-tiempo en forma de tubo, construyendo un conjunto de curvas integrales tal que por cada punto x^a pase una sola curva (ver Figura 1.1). Las congruencias determinan una noción de *espacio* con respecto a la métrica que se puede caracterizar localmente con la métrica espacial dada por

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b. \quad (1.12)$$

La cinemática de la congruencia puede descomponerse en cantidades irreducibles (Ehlers 1973; Ellis y van Elst 1999; Ellis et al. 2012; Rezzolla y Zanotti 2013) utilizando la métrica espacial local como:

$$\nabla_b u_a = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \Theta h_{ab} - \dot{u}_a u_b, \quad (1.13)$$

donde definimos el tensor antisimétrico de *vorticidad*,

$$\omega_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_{[d} u_{c]}, \quad (1.14)$$

el tensor sin traza y simétrico de *cizalladura*,

$$\sigma_{ab} := (h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd}) \nabla_c u_d, \quad (1.15)$$

el escalar de *expansión*

$$\Theta = h^{ab} \nabla_a u_b, \quad (1.16)$$

y por último la *aceleración*

$$\dot{u}_a = u^b \nabla_b u_a. \quad (1.17)$$

Podemos también con ello definir un vector de vorticidad tomando el dual y contrayéndolo con la tetravelocidad:

$$\omega^a := \frac{1}{2} \eta^{abcd} \omega_{bc} u_d. \quad (1.18)$$

Estos tensores caracterizan completamente el movimiento de una congruencia (ver Figura 1.2), que puede asociarse al movimiento de un sistema físico mientras no haya cruzamiento de líneas, e.g. marcos de referencia o fluidos. La evolución de estas cantidades a lo largo de la congruencia se analizan tomando derivadas direccionales $D/d\tau := u^a \nabla_a$ sobre cada tensor. La ecuación de evolución para la expansión es:

$$u^a \nabla_a \Theta \equiv \dot{\Theta} = -R_{ab} u^a u^b - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \frac{1}{3} \Theta^2 + \nabla_a \dot{u}^a, \quad (1.19)$$

donde $\omega^2 = (1/2) \omega_{ab} \omega^{ab}$ y $\sigma^2 := (1/2) \sigma_{ab} \sigma^{ab}$. La Eq. (1.19) es la conocida ecuación de Raychaduri (Raychaudhuri 1955; Ehlers 1961) para congruencias tipo tiempo. De la misma manera podemos derivar ecuaciones para la evolución de la cizalladura y la vorticidad (Ellis y van Elst 1999).

La curvatura del espacio-tiempo produce fuerzas tidales sobre los sistemas materiales que cambian la aceleración relativa de los mismos. Ante la ausencia local de materia, estos efectos se pueden analizar en términos del tensor de Weyl. A partir de la descomposición 3 + 1, podemos definir los tensores eléctricos y magnéticos de Weyl en analogía con el caso electromagnético como:

$$E_{ab} = C_{abcd} u^c u^d, \quad B_{ab} = {}^* C_{abcd} u^c u^d, \quad (1.20)$$

donde definimos el dual del tensor como ${}^* C^a b_{cd} = (1/2) \eta^{abef} C_{efcd}$, y η^{abef} es el tensor totalmente antisimétrico que se construye a partir de los símbolos de Levi-Civita (De Felice y Clarke 1992a). La descomposición del tensor de Weyl, dependiente de la congruencia, es de gran utilidad para cuantificar los efectos de aceleración tidal entre curvas y de rotación de ejes por arrastre de marcos o *frame-dragging* (Misner et al. 1973a; Nichols et al. 2011). Dado un vector de separación ξ^a entre dos curvas vecinas, definimos la aceleración tidal como $\delta a^b := u^a \nabla_a (u^b \nabla_b \xi^c)$, y la velocidad de precesión angular de un eje espacial giroscópico $\sigma = \sigma^{(i)} e_{(i)}^\mu$, como $\Omega = \sigma \times \dot{\sigma}$ (ver sección IIIA-B de Nichols et al. (2011)). En vacío, estos vectores están relacionados con los tensores gravito-magnéticos de Weyl como:

$$\delta a_j = -E_{jk} \xi^k, \quad \Delta \Omega_j = B_{jk} \xi^k. \quad (1.21)$$

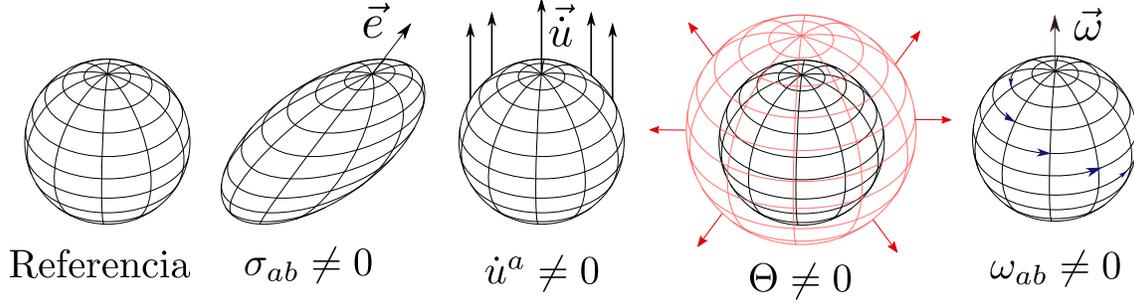


Figura 1.2: **Intepretación de los vectores cinemáticos para una congruencia.** Consideramos como referencia una congruencia inercial con una sección espacial en forma de esfera. La presencia de cizalladura σ_{ab} produce deformaciones de los ejes de simetría espaciales de la esfera, cambiando su forma. La presencia de aceleración \dot{u}^a en una dirección hace que la esfera se mueva en una dirección preferencial produciendo también dilatación temporal entre sus partes (indicado con un sombreado). Si el escalar de expansión Θ es no nulo, entonces la esfera crecerá en tamaño sin perder sus ejes de simetría. Finalmente si la vorticidad ω_{ab} es no nula, la esfera rotará diferencialmente sobre un eje de rotación determinado por el vector de vorticidad

Las ecuaciones de evolución en términos de estos tensores comparten propiedades similares a las ecuaciones de Maxwell (Costa y Natario 2014). En la aproximación de campo débil, estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo de Minkowski (Costa y Natário 2015; Mashhoon 2003).

1.2.1. Tétradas y marcos de referencia

Las teorías que usamos para representar la dinámica de sistemas físicos no incluyen la noción a priori de observador o aparato de medida (Bunge 1973). Para realizar una predicción concreta acerca de una cierta propiedad debemos construir un modelo de medición que incluya explícitamente un mecanismo para medir dicha propiedad⁴. El observador, o aparato de medida, también constituye un objeto físico con lo cual debemos modelarlo dentro de nuestras teorías. En Relatividad, las congruencias tipo tiempo sirven para representar estos sistemas o marcos de referencia en un espacio-tiempo arbitrario.

Los sistemas de referencia quedan determinados por una base ortonormal en cada punto de la congruencia, $\{\mathbf{e}_{\hat{a}}(p)\}$, donde se cumple $\mathbf{g}(\mathbf{e}_{\hat{a}}, \mathbf{e}_{\hat{b}}) = \eta_{ab}$. La componente temporal de la base se asocia a la tetravelocidad de la congruencia, $\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}(p)$. Las bases ortonormales definidas sobre congruencias son convenientes para representar observadores ya que modelan el comportamiento local de *relojes y reglas* en un espacio-tiempo arbitrario⁵. En el entorno de un punto p , la base siempre se puede asociar a un sistema de coordenadas Cartesiano $\{x^a\}$, que denominamos coordenadas normales de Riemann, donde $\mathbf{e}_a(p) = \partial_a(p)$ (ver Apéndice A). Esto no se puede extender globalmente a todo el espacio-tiempo si la curvatura es no nula. En cada punto, las bases están relacionadas por una transformación de Lorentz que conservan la ortonormalidad; es decir, cada sistema de referencia localmente se puede conectar con una

⁴En los modelos de medición se debe incluir usualmente un conjunto de teorías auxiliares a la teoría que representa la propiedad que nos interesa.

⁵Un reloj es un sistema físico que posee una propiedad periódica bien definida, i.e. un reloj atómico. Una regla es un sistema que posee una propiedad isomórfica a una geodésica espacial.

transformación de Lorentz. Dado un vector $\mathbf{p} = p^{\hat{a}}\mathbf{e}_{\hat{a}}$ que representa una dada propiedad, las componentes $p^{\hat{a}}$ son los valores de esa propiedad en el marco de referencia. Por ejemplo, si \mathbf{p} es el momento de una partícula, entonces $p^{\hat{0}} = -\mathbf{g}(\mathbf{e}_{\hat{0}}, \mathbf{p}) = -u_a p^a$ es su energía en el sistema de referencia representado por $\{\mathbf{e}_{\hat{a}}\}$. Una tetravelocidad se puede descomponer en términos de una base ortonormal de manera similar que en Relatividad Especial:

$$\mathbf{u} = \Gamma(\mathbf{e}_{\hat{0}} + v^{\hat{i}}\mathbf{e}_{\hat{i}}), \quad (1.22)$$

donde $\Gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ es el factor de Lorentz, y $v^2 = v^{\hat{i}}v_{\hat{i}}$ es la norma espacial de la velocidad.

Cuando el espacio-tiempo admite un vector de Killing, t^a , tipo tiempo, $t^a t_a < 0$, la carga conservada asociada puede entenderse como *energía*. Las simetrías del espacio-tiempo determinan un sistema de referencia preferencial: si se posee un vector de Killing tipo tiempo t^a , entonces podemos definir una congruencia con el tetravector $U^a := t^a/||t||$, donde cada punto corresponde a un sistema de referencia con tetravelocidad U^a . En este sistema de referencia preferencial, que solemos llamar *estacionario*, la energía es conservada. Esto puede verse fácilmente para el caso de una partícula geodésica con momento p^a y una congruencia de Killing U^a tipo tiempo. La energía medida por este sistema es $E = -p^a U_a$. Esta energía no es necesariamente una constante espacio-temporal ya que U^a difiere del vector de Killing por el factor de redshift $||t||$. Si en infinito la aceleración del sistema estacionario tiende a cero, entonces $||t|| \rightarrow 1$, y $U^a \rightarrow t^a$, con lo cual:

$$E_{\infty} = -p^a U_a|_{\infty} = -p^a t_a, \quad (1.23)$$

i.e. la energía conservada es la energía medida un sistema estacionario en infinito, $p^a \nabla_a E_{\infty} = 0$. La energía medida por un sistema estacionario de Killing en cualquier punto del espacio es entonces $E = E_{\infty} ||t||$. Finalmente, podemos ver que E no cambia en la dirección del observador estático, $U^a \nabla_a E = 0$, ya que $t^a \nabla_a (||t||^2) = 0$. La congruencia de Killing, U^a , permite formular un marco de referencia con balances de energía bien definido. Esto es no trivial ya que el espacio-tiempo es curvo. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos una congruencia estacionaria de Killing $U^a = \partial_t/\sqrt{1-2M/r}$ en un espacio-tiempo de Schwarzschild. Si un fotón con energía e_A es emitido desde un sistema de referencia $U_A = U^a(r = 100 M)$ y recibido por un sistema de referencia en $U_B = U^a(r = 50 M)$, la energía del fotón en este nuevo sistema será mayor por el factor de *redshift* gravitacional $e_B = e_A \sqrt{1-2M/r_A}/\sqrt{1-2M/r_B}$. La diferencia en energía del fotón entre estos dos sistemas referencias no implica que el campo gravitatorio cedió 'localmente' energía al fotón, sino que la energía como propiedad es diferente en el sistema de referencia A y el sistema B. La diferencia entre estos sistemas de referencia sí surge como consecuencia de la curvatura del espacio tiempo — observadores adaptados a estos sistemas verán correr el tiempo de sus relojes a un ritmo diferente. Si el sistema refleja el fotón, el sistema A lo recibirá con la misma energía; esto no ocurre si seleccionamos otros marcos de referencia. En un contexto Newtoniano donde el espacio-tiempo puede reducirse a una fuerza gravitatoria, podemos interpretar esto en términos de potenciales y decir que un sistema gana o pierde energía potencial gravitatoria entre diferentes puntos, pero la energía se conserva.

Con el ejemplo previo remarcamos que las simetrías del espacio-tiempo nos permiten formular leyes de conservación, pero dado que este es curvo, no podemos transportar trivialmente las propiedades de un sistema físico entre diferentes puntos del espacio. De manera similar ocurre en un espacio-tiempo plano si dos sistemas de referencia tienen una velocidad relativa — el fotón emitido en un sistema sufrirá un corrimiento Doppler en el otro.

1.3. Dinámica de la materia

En cosmología nos interesa la dinámica de sistemas macroscópicos, como gases compuestos de muchas partículas, y la dinámica de campos físicos. Para tratar con sistemas de muchas partículas es natural adoptar una descripción estadística de las componentes microscópicas a través de la teoría cinética (Dodelson y Schmidt 2020; Thorne y Blandford 2017). Podemos modelar unificadamente de esta manera sistemas de fluidos (i.e. colisionales, en equilibrio) y sistemas no colisionales. En el primer caso podemos utilizar ecuaciones de estado y las leyes de la termodinámica para determinar la dinámica, mientras que en el caso fuera del equilibrio debemos resolver las ecuaciones de Boltzmann-Maxwell. Consideremos la función de distribución $f(x, p)$, definida sobre el espacio de fases que determina el número total de partículas. La distribución sigue la ecuación de Maxwell-Boltzmann:

$$df/dt \equiv p^a \nabla_a f - \Gamma_{bc}^a p^b p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} = C[f], \quad (1.24)$$

donde $C[f]$ es el término colisional que determina cómo interactúa un tipo de partícula con las demás (dictado por el modelo estándar), y la derivada total d/dt está determinada por la métrica del espacio-tiempo. Una vez obtenida la distribución, podemos definir momentos como la densidad de corriente (0-momento):

$$J^a := m \int p^a f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.25)$$

que define la densidad de masa en reposo $J^0 = \rho$, y un 1-momento dado por el *tensor de energía-impulso*:

$$T^{ab} := \int p^a p^b f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.26)$$

que cumple la ecuación

$$\nabla_a T^{ab} = \int p^a C[f] \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (1.27)$$

A partir del tensor simétrico T_{ab} podemos definir varias cantidades importantes descomponiendo el tensor en base a una congruencia:

$$T_{ab} := \mu u_a u_b + q_a u_b + q_b u_a + p h_{ab} + \pi_{ab}, \quad (1.28)$$

donde μ es la densidad de energía relativista, que para un fluido ideal se puede escribir $\mu = \rho h$ donde h es la entalpía, p es la presión relativista isotrópica, q_a es el flujo de energía o densidad de momento, y π_{ab} es el tensor de esfuerzo anisotrópico (que puede representar por ejemplo viscosidad). La relación entre estas cantidades está dada por ecuaciones de estado

y leyes termodinámicas si consideramos un fluido (en equilibrio local), o se pueden obtener directamente de la definición en (1.26) para un sistema en general si resolvemos la ecuación de Boltzmann-Maxwell. Para fluidos, donde $C[f] = 0$, la corriente de masa y el tensor de energía-impulso siguen leyes de conservación local dado Ec. (1.27). Un fluido ideal se define como un sistema que tiene un tensor de energía impulso con $\pi_{ab} = 0$ y $q_a = 0$.

En ausencia de una descripción microscópica detallada, podemos utilizar una representación efectiva (clásica) de la materia utilizando directamente campos tensoriales. La dinámica de estos campos se puede modelar con un Lagrangiano, $\mathcal{L}(\nabla\psi_{(l)}, \psi_{(l)}, g_{ab})$, es decir, una función escalar local de los campos, sus derivadas, y la métrica del espacio-tiempo. Las ecuaciones se obtienen partir de variaciones estacionarias de la acción, $\delta S_m = 0$, en una región Ω :

$$S_m = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\nabla\psi_{(l)}, \psi_{(l)}, g_{ab}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.29)$$

de donde obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange del campo. A partir de la acción también podemos obtener el tensor de energía-impulso T^{ab} del campo ⁶. En un espacio-tiempo arbitrario de fondo es posible mostrar que si la acción es invariante ante difeomorfismos y se cumplen las ecuaciones de movimiento (*on-shell*), se llega naturalmente a un tensor simétrico que cumple $\nabla_a T^{ab} = 0$ y está definido como:

$$T^{ab} := 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ab}} + g^{ab} \mathcal{L} - \nabla_c G^c, \quad (1.30)$$

donde G^c es un tensor que aparece cuando el Lagrangiano depende también de la conexión afín (ver Saravi (2004)). Cuando el espacio-tiempo posee simetrías, i.e. existe un vector de Killing, ξ^a , que cumple $\mathcal{L}_{\xi} g_{ab} = 0$, podemos formar una corriente conservada $J^a = T^{ab} \xi_a$, $\nabla_a J^a = 0$, que a su vez da lugar a una carga conservada \mathcal{Q} (Poisson 2004a). Este resultado es el teorema de Noether en su forma relativista y covariante (Noether 1918; Kosmann-Schwarzbach 2011).

El tensor de energía-impulso tiene una profunda relación con el concepto de espacio-tiempo. Para ver esto, consideremos un espacio-tiempo dinámico; tomando una variación de la acción de materia con respecto a la métrica, $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$, en una región compacta y suponiendo que se cumplen las ecuaciones de movimiento, el tensor de energía-impulso queda naturalmente definido como

$$T^{ab} := -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ab}}. \quad (1.31)$$

Esta es la definición del tensor de energía-impulso que aparece en Relatividad General al variar la acción conjunta de Einstein-Hilbert con materia. Es posible mostrar que esta definición es equivalente a la definición (1.30) anterior que no utiliza la variación de la métrica (ver Saravi (2004)). Con esto podemos apreciar que (a) el concepto de energía-impulso está ligado a las propiedades del espacio-tiempo y no puede entenderse como una propiedad intrínseca de la materia (Lehmkuhl 2011), (b) todo sistema material posee un tensor de energía-impulso, y (c) en las ecuaciones de Einstein, el espacio-tiempo interactúa con la materia *solo* a través del tensor de energía-momento; esto último puede entenderse como un principio de equivalencia fuerte.

⁶Para el caso donde el sistema es una partícula, se puede seguir un razonamiento similar aunque el tensor de energía impulso se debe extender al sentido de las distribuciones.

Cuando analicemos las ecuaciones de Einstein de manera general consideraremos un tensor de energía impulso genérico. Nos interesará, sin embargo, enfocarnos en sistemas realistas; para ello, podemos imponer condiciones de energía sobre el tensor T_{ab} que caracterizan de manera invariante el comportamiento de la materia. Existen varios tipos de condiciones que definimos a continuación; consideremos un tensor de energía impulso T_{ab} , un campo vectorial v^a tipo tiempo, y un campo vectorial nulo k^a , totalmente arbitrarios:

- **WEC** $T_{ab}v^av^b \geq 0$: condición débil de energía (*weak energy condition*). Para un tensor que representa un fluido ideal esto equivalente a $\rho \geq 0$ y $p + \rho > 0$.
- **NEC** $T_{ab}k^ak^b \geq 0$: condición nula de energía (*null energy condition*). Para un tensor que representa un fluido ideal esto equivale a $p + \rho > 0$.
- **SEC** $(T_{ab} - (1/2)Tg_{ab})v^av^b \geq 0$: condición fuerte de energía (*strong energy condition*). Para un tensor que representa un fluido ideal esto equivale a $p + \rho > 0$ y $3p + \rho > 0$
- **DEC** Dado $\mathcal{F}^a = -T_b^av^b$, se cumple $\mathcal{F}^a\mathcal{F}_a \leq 0$: condición dominante de energía (*dominant energy condition*). La materia fluye por curvas nulas o tipo tiempo. Para un tensor que representa un fluido ideal esto equivale a $\rho > |p|$.

Suponiendo estas condiciones y las ecuaciones de Einstein nos puede ayudar a determinar propiedades de cómo se comporta el espacio-tiempo en situaciones generales.

1.4. Dinámica del espacio-tiempo

Los sistemas materiales que describimos en la sección anterior evolucionan *sobre* el espacio-tiempo. El espacio-tiempo, según la teoría de la Relatividad General, no es solo una estructura formal que presuponen las teorías: es un sistema material en sí (Combi 2022). Es un sistema distinguido en el sentido que interactúa con todo otro sistema y su descripción es geométrica. Esto implica que el espacio-tiempo determina la estructura cinemática (inercial) de las teorías físicas, i.e. establece la métrica y las derivadas covariantes que aparecen en las ecuaciones de movimiento de toda teoría. La dinámica del espacio-tiempo y su interacción con la materia se puede derivar de un principio de mínima acción. Consideremos la acción total definida en un volumen \mathcal{V} espacio-temporal dada por:

$$S = S_H[\mathbf{g}] + S_M[\mathbf{g}, \mathbf{T}] + S_B[\mathbf{g}], \quad (1.32)$$

donde definimos la acción de Hilbert como

$$S_H[\mathbf{g}] := \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.33)$$

siendo $R := R_{ab}g^{ab}$ el escalar de Ricci, la acción de frontera de Gibbons-Hawking como

$$S_B[\mathbf{g}] := \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \epsilon K \sqrt{h}d^3x, \quad (1.34)$$

definida en la frontera $\partial\mathcal{V}$ que puede ser tipo tiempo ($\epsilon = -1$) o tipo espacio ($\epsilon = 1$), donde K es la traza de la curvatura extrínseca, y h es el determinante de la métrica inducida sobre

la frontera. Finalmente, tenemos $S_M[\mathbf{g}, \mathbf{T}]$ como la acción de materia. Variando la acción total con respecto a la métrica sobre el volumen, obtenemos:

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} (G_{ab} - 8\pi T_{ab}) \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4x \quad (1.35)$$

donde el término de frontera es necesario para cancelar el término de frontera que surge de la acción de Hilbert (Poisson 2004b) y donde definimos el *tensor de Einstein*;

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \quad (1.36)$$

Las ecuaciones de Einstein surgen entonces de tomar el extremo de la acción junto con el término de frontera para una variación de la métrica no nula, con lo cual obtenemos

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.37)$$

las ecuaciones de la Relatividad de Einstein (Einstein 1915). Las ecuaciones (1.37) son seis ecuaciones no-lineales de segundo orden para el tensor métrico g_{ab} que posee diez componentes. El sistema está subdeterminado por la invarianza ante difeomorfismos, i.e. la libertad de elegir un sistema de coordenadas. Es posible mostrar que el sistema de ecuaciones de Einstein, junto con condiciones iniciales adecuadas, posee soluciones únicas bien comportadas y estables (Foures-Bruhat 1952). Existen diversas maneras de resolver estas ecuaciones dependiendo del modelo físico que intentamos representar. Si suponemos que existen ciertas simetrías globales en nuestro modelo, entonces podemos utilizar un sistema de coordenadas adaptado a estas simetrías y calcular directamente las componentes del tensor de Einstein. Por ejemplo, suponiendo un modelo esférico y estático en vacío, la métrica se puede escribir en coordenadas diagonales dependientes solo de la coordenada radial; introduciendo esta métrica en las ecuaciones de Einstein se obtiene directamente la solución de Schwarzschild.

La elección de un sistema de coordenadas o *gauge* particular también es útil cuando estudiamos perturbaciones a una estructura de fondo, e.g. en los regímenes Post-Minkowskiano o Post-Newtoniano (Blanchet 2014), donde se suelen utilizar coordenadas armónicas, o en cosmología, donde las perturbaciones producidas por la materia se estudian en *gauges* Newtonianos o comóviles (Ma y Bertschinger 1995; Bardeen 1980). Para obtener soluciones a la métrica en base a simetrías locales o perturbativas pero sin una estructura fija de fondo, se suele utilizar el método de semi-tetradas o descomposición 1 + 3, particularmente usados en cosmología relativista (Ellis y van Elst 1999; Clarkson 2007); en este método, las soluciones se obtienen descomponiendo las ecuaciones con respecto a una congruencia específica. Finalmente, en el régimen dinámico no-lineal de las ecuaciones, estas se deben resolver de manera numérica. Para ello se utiliza la descomposición ADM o 3 + 1 de las ecuaciones de Einstein (Arnowitt et al. 2008). En esta descomposición las ecuaciones de Einstein se dividen naturalmente entre ecuaciones de restricción (*constraints*) y ecuaciones de evolución, tal como ocurre con las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de evolución se pueden expresar de forma hiperbólica utilizando por ejemplo la formulación BSSN, que permiten, junto a una elección conveniente de gauge, utilizar algoritmos numéricos estables y encontrar soluciones aproximadas por métodos computacionales (Baumgarte y Shapiro 2010).

Ahora discutiremos la formación de horizontes en la teoría de la Relatividad General, una de sus predicciones más extremas e interesantes de la teoría. Necesitaremos para ello

analizar la geometría de superficies e hipersuperficies; introducimos los conceptos necesarios para entender el trabajo que realizaremos en el resto de los capítulos.

1.5. Horizontes y superficies atrapadas

Si la curvatura en una región del espacio-tiempo es muy grande, los rayos de luz pueden quedar atrapados allí sin poder escapar a infinito. Esto ocurre, por ejemplo, en el colapso de materia, cuando una estrella masiva agota su combustible y la densidad central crece sin nada que pueda frenar el colapso. Se forma entonces una región desconectada causalmente del resto del Universo: un agujero negro.

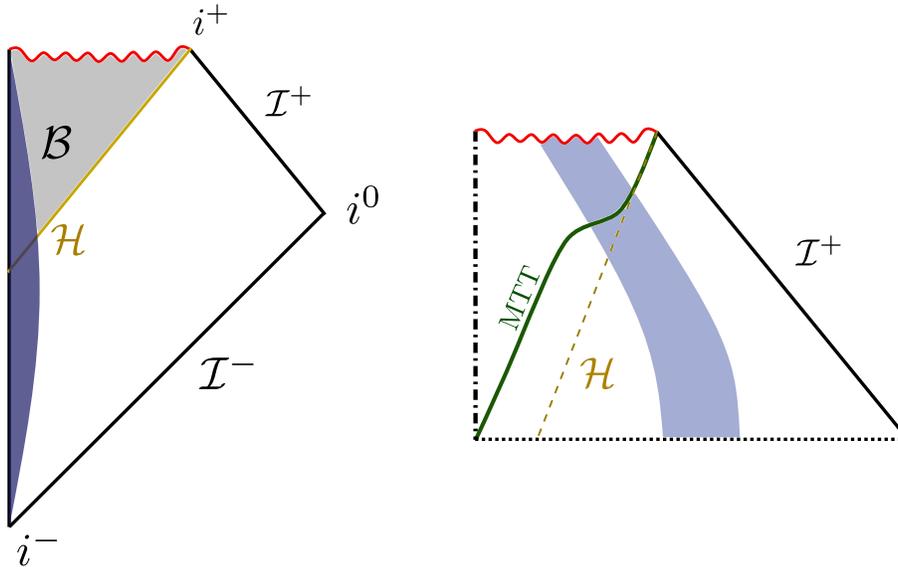


Figura 1.3: (Izquierda) Representación de un diagrama conforme para un colapso de materia (en azul) que forma un agujero negro. (Derecha) Diagrama conforme de materia cayendo a un agujero negro pre-existente. Nótese como el horizonte de eventos (\mathcal{H}) está presente en una región alejada del horizonte atrapado local, MTT, en donde la curvatura es grande. En este escenario, el observador no tiene manera de saber que está dentro del horizonte de eventos. Solamente a tiempos posteriores la superficie atrapada crece de repente como para tragar al observador cuyo destino estaba predestinado mucho antes.

Los agujeros negros son los objetos más simples del Universo ya que solo bastan tres parámetros para describirlos en equilibrio: su masa, su carga, y su momento angular (Misner et al. 1973a). Estos sistemas son ubicuos en la naturaleza; alrededor de su profundo pozo de potencial, la materia circundante puede formar un flujo de acreción, liberando energía térmica y cinética con una eficiencia más grande que las encontradas en reacciones termonucleares. Para definir rigurosamente un agujero negro, consideremos un modelo de espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ asintóticamente plano, i.e. que aproxima a una métrica de Minkowski para distancias grandes. Este espacio-tiempo contiene entonces una subvariedad en infinito, \mathcal{I}^+ que denominamos infinito nulo (ver siguiente capítulo). El pasado causal de esta región está denotado como $J^-(\mathcal{I}^+)$. Un agujero negro se define como la región de la variedad $\mathcal{B} := \mathcal{M} - J^-(\mathcal{I}^+)$, donde los rayos de luz no pueden llegar al infinito nulo. El agujero tiene un borde, *el horizonte de eventos*, definido como la superficie 3-dimensional $\mathcal{H} := \partial J^-(\mathcal{I}^+)$.

El horizonte de eventos, si es una superficie suave, es una superficie nula (Hawking y Ellis 1973) y teleológica, es decir, necesitamos la historia completa del espacio-tiempo para determinar \mathcal{H} . Ninguna propiedad local del espacio-tiempo puede determinar si un sistema cruzó o no el horizonte de eventos. Un horizonte de eventos se puede formar incluso en regiones sin curvatura del espacio-tiempo, como en el caso del espacio-tiempo dinámico de Vaidya o una bola de material cayendo a un agujero pre-existente (Booth 2005) (ver Figura 1.3). El horizonte de eventos siempre crece en área (Bardeen et al. 1973) y es acausal ya que es afectado por toda la historia del espacio-tiempo (Thorne et al. 1986); esto impide formular leyes de balance entre flujos de energía entrante y su área de manera local. En cosmología, como discutiremos en detalle en el próximo capítulo, no tenemos un espacio-tiempo asintóticamente plano, con lo cual la definición global de agujero negro debe ser generalizada.

Por otra parte, nos interesa tratar a un agujero negro como un objeto físico local embebido en su entorno. Necesitamos entonces una caracterización (cuasi)local de agujero negro. En modelos numéricos de la ecuaciones de Einstein, e.g. en simulaciones de agujeros negros binarios, esto es muy importante ya que no tenemos la posibilidad de seguir la evolución global del espacio-tiempo *ad-eternum*. Hayward (1994) sentó las bases de un nuevo enfoque para tratar un agujero negro de manera local en base a superficies atrapadas, concepto introducido por Penrose (1965a) en sus teoremas de singularidad. A partir del trabajo seminal de Hawyward, Ashtekar y colaboradores desarrollaron el concepto de horizonte aislado (Ashtekar et al. 1999) y luego de horizonte dinámico (Ashtekar et al. 2015b). Esta caracterización local de un agujero negro es de gran importancia en relatividad numérica ya que permite localizar y caracterizar sus propiedades en escenarios dinámicos y en una región finita del espacio-tiempo. Por otra parte, estas superficies atrapadas también aparecen en escenarios cosmológicos y analizaremos sus propiedades en el Capítulo 5. Para caracterizar superficies atrapadas, debemos desarrollar las propiedades geométricas de superficies en dos y tres dimensiones. En la siguiente sección introducimos las definiciones básicas de estas superficies que luego utilizaremos a lo largo de esta tesis; seguimos la notación del excelente trabajo de Gourgoulhon (2005) y Gourgoulhon y Jaramillo (2006).

1.5.1. Geometría de 2-superficies cerradas y 3-hipersuperficies

Consideremos una hipersuperficie 3-dimensional $\mathcal{H} \in \mathcal{M}$ en un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ que está foliada⁷ por una familia de superficies cerradas 2-dimensional $\{\mathcal{S}_t\}$ tipo espacio (ver Figura 1.4). Existe entonces una métrica \mathbf{q} con signatura $(+, +)$, no degenerada, sobre \mathcal{S}_t inducida por la métrica espacio-temporal \mathbf{g} , con lo cual podemos descomponer ortogonalmente el espacio tangente de cada punto de la variedad $\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_p(\mathcal{S}_t) \oplus \mathcal{T}_p(\mathcal{S}_t)^\perp$. La métrica espacial \mathbf{q} con componentes q_{ab} sirve para construir un proyector \mathbf{q}^* con componentes q_b^a que toma tensores en el espacio tangente $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ y los proyecta sobre $\mathcal{T}_p(\mathcal{S}_t)$.

Analicemos ahora la geometría extrínseca de las superficies cerradas $\{\mathcal{S}_t\}$. Consideremos para ello una superficie \mathcal{S}_t fija. Dado un vector \mathbf{v} normal a \mathcal{S}_t en todo punto, podemos definir el tensor de *deformación* de \mathcal{S}_t a lo largo de \mathbf{v} como

$$\theta_{ab}^{(v)} = q_a^c q_b^d \nabla_c v_b. \quad (1.38)$$

⁷Por foliación entendemos que en cada punto $p \in \mathcal{H}$ solo pasa una superficie \mathcal{S}_t .

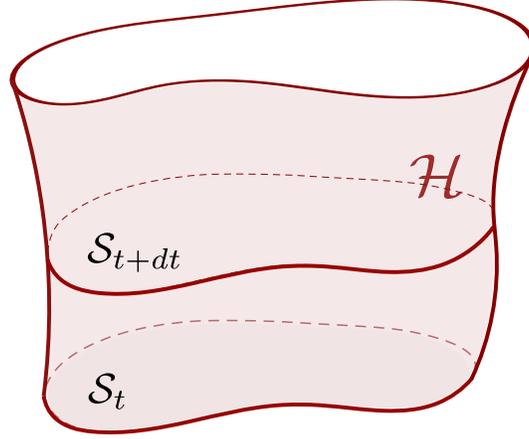


Figura 1.4: Representación de una hipersuperficie \mathcal{H} foliada por superficies cerradas 2-dimensionales \mathcal{S}_t . En el gráfico, estas superficies están representadas por curvas en vez de superficies y la dirección vertical puede ser una dirección temporal, espacial o nula, dependiendo de la signatura de la hipersuperficie.

Este tensor se denomina de deformación porque cuantifica los cambios de la superficie 2-dimensional a través de la hipersuperficie y se puede escribir como la derivada de Lie de la métrica espacial inducida a lo largo del vector \mathbf{v} , $\theta_{ab}^{(v)} \equiv \frac{1}{2}q_{ac}(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{q})_b^c$. Notemos que este tensor, definido sobre la superficie 2-dimensional es similar al tensor de deformación espacial que aparece en una congruencia tipo tiempo. La expansión se puede escribir como la traza de este vector, que también representa el crecimiento del área para la superficie (ver Figura 1.5):

$$\theta^{(v)} = q^{ab}\theta_{ab}^{(v)} \equiv \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \log \sqrt{q} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta A' - \delta A}{\epsilon \delta A}, \quad (1.39)$$

y con esto podemos definir el tensor de cizalladura:

$$\sigma_{ab}^{(v)} = \theta_{ab}^{(v)} - \frac{1}{2}q_{ab}\Theta^{(v)}. \quad (1.40)$$

El espacio normal a la superficie tiene una métrica inducida de signatura $(-, +)$ que podemos escribir en términos de vectores unitarios \mathbf{u} y \mathbf{e} , donde $u^a u_a = -1$, $e^a e_a = 1$ y $u^a e_a = 0$. Alternativamente, podemos escribir esta base con vectores nulos \mathbf{l}, \mathbf{k} , donde tomamos la normalización $l^a k_a = -1$. La elección de estos vectores no es única y podemos cambiarlos con una transformación de *boost* en una dirección normal a la superficie. La métrica inducida en la superficie se puede construir a partir de estos vectores normales unitarios como:

$$q_{ab} = g_{ab} + u_a u_b - e_a e_b \equiv g_{ab} + l_a k_b + k_a l_b, \quad (1.41)$$

Los vectores nulos se pueden escribir en términos de vectores tipo-espacio y tipo tiempo como:

$$l^a := \frac{E}{\sqrt{2}}(u^a + e^a), \quad k^a := \frac{1}{E\sqrt{2}}(u^a - e^a), \quad (1.42)$$

donde E es una función arbitraria positiva y donde denominamos como vector saliente (*outgoing*) a l^a , ya que $l^a e_a > 0$, y entrante (*ingoing*) a k^a , ya que $k^a e_a < 0$.

Ahora definamos el *tensor de forma* o segunda forma fundamental \mathbf{K} de rango (1,2); dado dos vectores \mathbf{w} y \mathbf{v} tangentes a la superficie \mathcal{S}_t , tenemos la descomposición $u^a \nabla_a v^b = u^a q_a^c \nabla_c v^b + \mathcal{K}_{ac}^b u^a v^c$, que define al tensor de forma como:

$$\mathcal{K}_{bc}^a = q_a^d q_b^f \nabla_f q_d^a \equiv -(k^a \theta_{bc}^{(l)} + l^a \theta_{bc}^{(k)}), \quad (1.43)$$

donde la última identidad la podemos expresar en términos de \mathbf{u} y \mathbf{e} . Este tensor, a diferencia de la curvatura extrínseca K_{ab} definida en 3 dimensiones (Baumgarte y Shapiro 2010), no determina completamente la geometría extrínseca de la superficie. La segunda forma fundamental de la superficie involucra los tensores de deformación normales a \mathcal{S}_t pero no el cambio entre estos vectores normales. Para cuantificar este cambio, podemos definir las 1-formas:

$$\Omega_a^{(l)} = \frac{q_a^b}{(k^c l^c)} k_f \nabla_b l^f, \quad \Omega_a^{(k)} = \frac{q_a^b}{(k^c l^c)} l_f \nabla_b k^f. \quad (1.44)$$

Para vectores unitarios (1.42) con $E = 1$, tenemos las relaciones $\Omega_a^{(l)} = \Omega_a^{(u)}$ y $\Omega_a^{(k)} = -\Omega_a^{(u)}$.

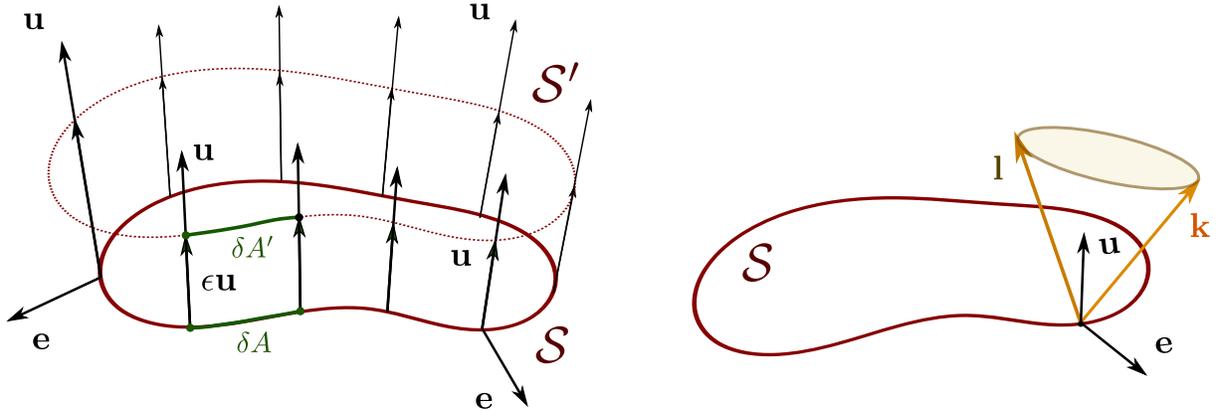


Figura 1.5: (Izquierda) Evolución de una superficie \mathcal{S} a lo largo de un vector \mathbf{u} . (Derecha) Los vectores unitarios normales a \mathcal{S} dados por \mathbf{u} y \mathbf{e} , definen vectores nulos \mathbf{l} y \mathbf{k} también normales a la superficie.

1.5.2. Horizontes atrapados: definiciones fundamentales

Con los conceptos de geometría que introducimos en la sección anterior, podemos definir el importante concepto de superficie atrapada. Consideremos primero rayos de luz que atraviesan una esfera embebida en el espacio-tiempo de Minkowski. Los rayos de luz que salen de esta esfera (caracterizados por \mathbf{l}) se expanden ($\theta^{(l)} > 0$) hacia infinito, mientras que los rayos que entran (caracterizados por un vector \mathbf{k}) convergen — ver panel izquierdo de la Figura 1.6. Esto no ocurre necesariamente si la curvatura del espacio-tiempo es suficientemente grande: los rayos de luz que salen de la esfera pueden en cambio converger y quedar atrapados en la región. Esto ocurre en los agujeros negros y por lo tanto podemos buscar definirlos en términos cuasilocales, caracterizando los rayos de luz. Como veremos a continuación, existen una gran cantidad de definiciones con significados similares en la literatura para caracterizar superficies según sus propiedades ópticas. Para evitar confusiones utilizaremos los acrónimos

en inglés e indicaremos la traducción pertinente. Comencemos definiendo una superficie atrapada:

Superficie atrapada (TS) Una superficie con topología \mathcal{S}^2 es una superficie atrapada si sus vectores normales nulos cumplen $\theta^{(l)} < 0$ y $\theta^{(k)} < 0$.

Superficie anti-atrapada (ATS) Una superficie \mathcal{S} tipo espacio y cerrada es una superficie antiatrapada, si sus vectores normales nulos cumplen $\theta^{(l)} > 0$ y $\theta^{(k)} > 0$.

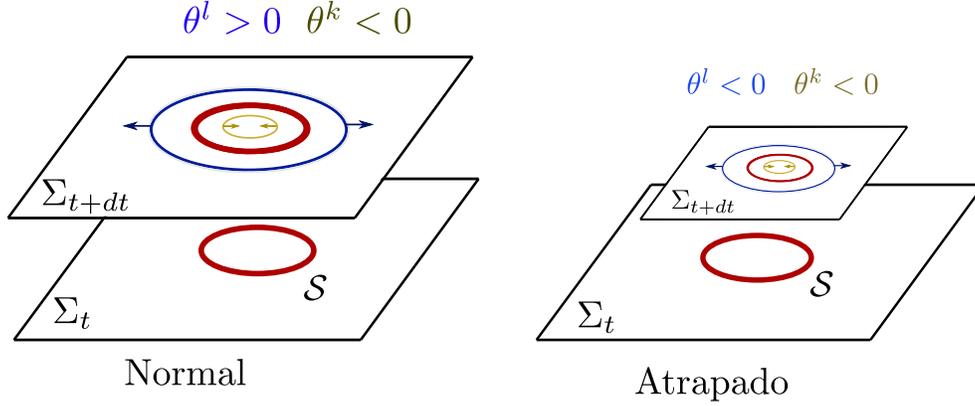


Figura 1.6: (Izquierda) Región normal del espacio-tiempo: los rayos de luz que son emitidos sobre la esfera hacia afuera aumentan su área en su evolución, mientras que los rayos de luz que son emitidos hacia dentro disminuyen su área. (Derecha) Región atrapada del espacio-tiempo: los rayos de luz que salen y entran de una esfera disminuyen su área en su evolución, e.g. dentro de un agujero negro. Representación inspirada en (Senovilla y Garfinkle 2015)

Estos conceptos claves en la relatividad moderna fueron introducidos por Penrose (1965a), y luego usados por Hawking y Penrose (1970), para demostrar los famosos teoremas de existencia de singularidades: si hay superficies atrapadas en una hipersuperficie de Cauchy y valen las condiciones de energía (NEC), entonces hay geodésicas nulas incompletas en el futuro (ver también (Hawking y Ellis 1973)). Dentro de un agujero negro tenemos TS mientras que en un universo en expansión podemos encontrar, fuera del radio de Hubble, ATS. Cuando un escalar de expansión (saliente o entrante) es nulo, entonces la superficie se denomina marginal:

Superficie salientes marginalmente atrapada (MOTS) Si podemos determinar una dirección saliente \mathbf{l} , y se cumple $\theta^{(l)} = 0$, definimos una superficie \mathcal{S}^2 saliente marginalmente atrapada (*marginally outer trapped surface*, MOTS). Si tenemos una MOTS en donde también tenemos $\theta^{(k)} < 0$, entonces definimos una superficie *futura* saliente marginalmente atrapada.

Definiciones análogas siguen si intercambiamos $k \rightarrow l$ (superficies entrantes atrapadas) y $\theta^{(k)} < 0 \rightarrow \theta^{(l)} > 0$ (superficies entrantes pasado atrapadas).

A partir de MOTS (2 dimensionales) podemos construir una hipersuperficie (3 dimensional) foliadas por estas superficies en forma de tubo que denominamos tubos marginalmente

atrapados (MTT). Los MTT son suaves y puede mostrarse que existen si las MOTS son estables (Andersson et al. 2005). Es posible mostrar que las MOTS siempre yacen dentro del horizonte de eventos si este existe y coinciden con una sección transversal de este mismo en equilibrio (Hayward 1994; Booth 2005). En cosmología trabajaremos también con el concepto de superficie marginalmente anti-atrapada, que en la literatura se suele llamar superficie *entrante* marginalmente atrapada, ya que el escalar de expansión que es cero es el de los rayos de luz entrante. A partir de estas definiciones podemos formular el concepto de horizonte aparente. En la literatura, existen dos conceptos diferentes que se llaman por este nombre: el horizonte aparente introducido originalmente en Hawking y Ellis (1973), y el horizonte aparente utilizado en la literatura de relatividad numérica (Schnetter et al. 2006; Dreyer et al. 2003), que es sinónimo de MTT. Ambos conceptos están relacionados pero no son equivalentes.

Horizonte aparente (Hawking y Ellis 1973) Consideremos una hipersuperficie espacial Σ de Cauchy de una foliación en un dado espacio-tiempo asintóticamente plano. Definimos la región atrapada \mathcal{T}_Σ como el conjunto de puntos donde pasa una superficie atrapada TS totalmente contenida en Σ , es decir una intersección de la región atrapada total en el espacio-tiempo. Una componente conexa de la frontera de \mathcal{T}_Σ se define como el horizonte aparente a la Hawking y Ellis. Si este cumple condiciones de regularidad, el horizonte aparente es una MOTS.

Esta definición es poco práctica ya que involucra buscar la frontera de un conjunto de puntos y además requiere condiciones asintóticamente planas. Los horizontes aparentes pueden ser discontinuos y además, para un dado slice Σ la superficie más externa que cumple $\theta^{(l)} = 0$ no siempre coincide con un horizonte aparente. En la literatura a veces se usa como sinónimo el MOTS más externo para denominar un horizonte aparente, pero estos son conceptos distintos. Es posible mostrar que existen foliaciones en espacio-tiempos con agujeros negros donde no hay horizontes aparentes (Wald y Iyer 1991).

Basados en estas definiciones podemos tratar de caracterizar un *horizonte* como una hipersuperficie de 3 dimensiones foliada por MOTS, es decir un MTT. Los MOTS (2D) son siempre superficies cerradas tipo espacio. Los MTT (3D) pueden tener cualquier signatura en principio. Si consideramos un MTT tipo luz en equilibrio, es decir que no hay materia/radiación atravesándolo, tenemos un horizonte no expansivo:

Horizonte no expansivo (NEH) Un horizonte no expansivo (*non-expansive horizon*, NEH) es una superficie H de tres dimensiones nula en la cual $\theta^{(l)} = 0$ donde l^a es normal a H y en donde $-T_a^b l^a$ es causal y dirigido al futuro. Si además imponemos que $\mathcal{L}_l \Omega^{(l)} = 0$, el NEH es un horizonte débilmente aislado. Esto permite definir propiedades como la masa y el momento angular contenidos.

Como solo depende de las cantidades sobre H , un NEH puede tener un entorno dinámico alrededor de él. Estos horizontes no-expansivos poseen varias propiedades interesantes, son independientes de la foliación, y cumplen la primer ley de la termodinámica (Ashtekar et al. 2000, 1999, 2002). Los horizontes de agujeros negros estacionarios son NEH, como también el horizonte cosmológico de de Sitter. Si queremos ahora incluir superficies atrapadas y

anti-atrapadas fuera del equilibrio, debemos renunciar a la condición de superficie nula. Para un agujero negro, podríamos pensar que un MTT bastaría para representar un horizonte. Sin embargo, hay ejemplos de espacio-tiempos en los cuales podemos encontrar MTTs pero ninguna superficie atrapada dentro de estos (Senovilla 2003). Debemos agregar una condición que asegure que haya superficies atrapadas apenas entramos al MTT; es decir, necesitamos asegurar que ante la mínima deformación de un MOTS estamos en una superficie atrapada. Para ello, seguimos la idea introducida por Hayward de horizonte atrapado:

Horizonte atrapado (Hayward 1994) Un tubo de superficies salientes (entrantes) atrapadas, MTT, es un horizonte atrapado H si $\theta^{(k)} \neq 0$ y existe una foliación dual nula en un entorno de H (i.e. una extensión de l^a y k^a) en la cual $\mathcal{L}_k \theta^{(l)} \neq 0$. Podemos especificar el carácter de este horizonte de la siguiente manera:

- $\theta^{(l)} = 0, \theta^{(k)} < 0, \mathcal{L}_k \theta^{(l)} < 0$: Horizonte atrapado futuro saliente. Ejemplo: agujeros negros.
- $\theta^{(k)} = 0, \theta^{(l)} < 0, \mathcal{L}_l \theta^{(k)} > 0$: Horizonte atrapado pasado entrante. Ejemplo: esfera de Hubble en FLRW.
- $\theta^{(k)} = 0, \theta^{(l)} > 0, \mathcal{L}_l \theta^{(k)} < 0$: Horizonte atrapado pasado saliente. Ejemplo: agujero blanco
- $\theta^{(l)} = 0, \theta^{(k)} < 0, \mathcal{L}_k \theta^{(l)} > 0$: Horizonte atrapado futuro entrante. Ejemplo: esfera de Hubble en universo en contracción.

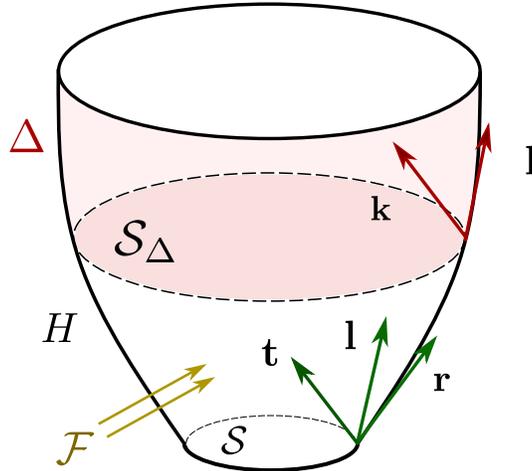


Figura 1.7: Representación de un horizonte atrapado (FOTH) que comienza siendo un horizonte dinámico H tipo espacio foliadas por superficies 2 dimensionales cerradas S que cumplen $\theta^{(l)} = 0$, con flujos \mathcal{F} entrantes, y vector tangente espacial r . El horizonte evoluciona a un horizonte aislado no expansivo Δ con vector tangente l .

Los horizontes de agujeros negros se asocian a un *horizonte futuro atrapado saliente* (FOTH), i.e. se cumple (a) $\theta^{(l)} = 0$, i.e. los haces de luz salientes a la superficie son tangenciales y quedan congelados allí, (b) $\theta^{(k)} < 0$, los rayos entrantes convergen al centro y (c) $\mathcal{L}_k \theta^{(l)} < 0$, es decir que sobre la dirección entrante, la expansión de rayos salientes decrece, con lo cual hay superficies atrapadas “justo” dentro de la superficie.

Un concepto muy cercano al de FOTH es el de horizonte dinámico (Ashtekar y Krishnan 2003) (DH), que se define simplemente como un MTT tipo-espacio. Los DH pueden representar agujeros negros fuera del equilibrio que, por ejemplo, están emitiendo ondas gravitacionales o acretaando materia de su entorno. Imponiendo que el MTT es tipo espacio permite definir leyes de conservación de flujos gravitacionales sobre el horizonte dinámico que cuantifican cuánto crece o disminuye su área (Ashtekar y Krishnan 2004; Gourgoulhon y Jaramillo 2006). En efecto, dado que el DH está foliado por MOTs y estas superficies cumplen $\theta^{(l)} = 0$ y $\theta^{(k)} < 0$, es posible mostrar que el área de los DH siempre crece. Es posible mostrar además que los DH cumplen la siguiente ley de balance para el radio areal:

$$\frac{R_2 - R_1}{2} = \frac{1}{16\pi} \int_{\Delta H} T_{ab} t^a \xi_{(R)}^b d^3 H + \frac{1}{16\pi} \int_{\Delta H} N_R \left(|\sigma|^2 + 2|\zeta|^2 \right) d^3 H, \quad (1.45)$$

donde $|\sigma|$ es la norma de la cizalladura y $|\zeta|$ la norma de la uno forma asociada al vector $\xi_{(R)}^b$ que atraviesa la membrana. Eligiendo otro vector ξ tenemos otra ley de conservación, i.e. hay infinitas leyes de conservación. Los DH y los FOTHs son equivalentes localmente si se cumple la condición de energía nula y la condición $\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{(l)ab} + 8\pi T_{ab} l^a l^b \neq 0$. En efecto, se puede mostrar en ese caso que la signatura del MTT está determinada en general por el signo de $\mathcal{L}_k \theta^{(l)}$ (Booth y Fairhurst 2007). En situaciones dinámicas, el horizonte dinámico puede estabilizarse y tender al equilibrio, convirtiéndose en un horizonte aislado (Ashtekar y Krishnan 2004). Los horizontes atrapados tipo espacio (dinámicos) y tipo luz (aislados) son conceptos idóneos para representar localmente un agujero negro ya que son superficies que solo pueden ser atravesadas en un sentido; como vemos de la ecuación (1.45), esto lleva a que el horizonte solo puede incrementar su área.

En cosmología nos encontramos, en cambio, horizontes anti-atrapados: superficies que delimitan regiones normales y regiones anti-atrapadas, en las cuales los rayos de luz salientes y entrantes con respecto a la superficie divergen. Los horizontes cosmológicos los caracterizaremos como horizontes atrapados entrantes ya que cumplen $\mathcal{L}_{l,k} \theta^{k,l} > 0$, i.e. el escalar de expansión crece en la otra dirección nula. Podemos considerar horizontes cosmológicos futuros, donde $\theta^l = 0, \theta^k < 0$, y horizontes cosmológicos pasados, donde $\theta^l < 0, \theta^k = 0$. La diferencia entre estos es sutil y la discutiremos en el Capítulo 5. Notemos por ahora que la condición $\mathcal{L}_{l,k} \theta^{k,l} > 0$ implica, *si se cumple la condición de energía dominante*, que el horizonte cosmológico es tipo tiempo. Esto implica que la superficie atrapada puede ser atravesada en ambos sentidos y no es un horizonte propiamente dicho, excepto en el caso donde la superficie es nula, i.e. en el espacio-tiempo de de Sitter. Estas superficies se denominan membranas tipo tiempo en vez de horizontes.

Acrónimo	Nombre ($\theta^+ = 0$)	Dim	θ^-	$\mathcal{L}_+\theta^-$	Comentario
NEH	Horizonte no expansivo (tipo luz)	3	-	-	energy condition
MOTS	Superficie saliente marginalmente atrapada	2	-	-	topología cerrada
MOTT	Tubo saliente marginalmente atrapado	3	-	-	foliada por MOTSs
MTS	Superficie saliente marginalmente atrapada	2	< 0	-	topología cerrada
MTT	Tubo marginalmente atrapado	3	< 0	-	foliada por MTSs
TH	Horizonte atrapado	3	$\neq 0$	$\neq 0$	foliada por MOTSs
FITH	Horizonte futuro entrante atrapado	3	< 0	> 0	foliada por MTSs
FOTH	Horizonte futuro saliente atrapado	3	< 0	< 0	foliada por MTSs
DH	Horizonte dinámico (tipo espacio)	3	< 0	-	foliada por MTSs
TLM	Membrana tipo tiempo	3	< 0	-	foliada por MTSs

Cuadro 1.1: Resumen de las definiciones presentadas de superficies y horizontes.

— \diamond —

1.6. Cosmología relativista

La cosmología científica se ocupa del Universo a gran escala y su conexión con la física local. El Universo como sistema físico difiere de otros objetos que podemos estudiar de manera controlada (en un laboratorio) o repetida (observando muchos sistemas del mismo tipo), ya que existe uno y solo un universo (Bondi 1960; Ellis 1984; McCrea 1970). A su vez, nuestras observaciones están restringidas a lo que podemos ver en nuestro cono de luz pasado (Kristian y Sachs 1966), con lo cual los modelos globales que construyamos necesitan suposiciones adicionales que están más allá del acceso observacional directo.

Para construir un modelo del Universo, necesitamos al menos tres ingredientes: a) un modelo de espacio-tiempo con métrica pseudo-Riemanniana, b) un modelo local para la materia, representada por un conjunto de campos tensoriales $\{\Phi\}$, y finalmente c) un modelo para el movimiento promedio de la materia a gran escala en el espacio-tiempo que representamos con una congruencia fundamental con ttravelocidad \mathbf{u}_c . Describiremos con más detalle a qué nos referimos con promedio en el siguiente capítulo. El aspecto esencial de esta congruencia, también conocida como flujo de Hubble, es que debe estar en expansión, al menos en algún intervalo de su historia, para corresponderse con las observaciones astronómicas.

Un modelo cosmológico queda determinado entonces esquemáticamente como:

$$\mathbb{U} = \langle \mathcal{M}, \mathbf{g}, \{\Phi\}, \mathbf{u}_c \rangle. \quad (1.46)$$

Supondremos que la métrica del espacio-tiempo está regida por las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, y que la materia está representada por campos macroscópicos. Para analizar la dinámica de expansión en la congruencia fundamental, introducimos ahora un factor de escala $a(\tau)$, definido por su relación con el escalar de expansión:

$$\frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} := \frac{1}{3}\Theta(\mathbf{u}). \quad (1.47)$$

Utilizando esta definición y las ecuaciones de Einstein, la ecuación de Raychaduri-Ehlers relaciona la aceleración porcentual del factor de escala con el contenido de materia y propiedades cinemáticas de la congruencia:

$$3\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)} = -2(\sigma^2 - \omega^2) - \nabla_a \dot{u}^a + 4\pi(\rho + 3p) - \Lambda. \quad (1.48)$$

Estas ecuaciones se simplifican enormemente si consideramos un modelo isotrópico y homogéneo (ver próxima sección). En el caso general, debemos también tener en cuenta las otras ecuaciones dinámicas de la congruencia para la cizalladura y la vorticidad, que establecen restricciones adicionales a las posibles soluciones.

La ecuación de Raychaduri permite mostrar que los modelos cosmológicos en GR no son en general completos ya que poseen *singularidades*, i.e. el modelo de espacio-tiempo posee patologías en regiones donde aparecen divergencias no evitables. En efecto, para un universo que está en expansión en un tiempo t_0 — considerando una congruencia geodésica, no-rotacional, y que cumple las condiciones de energía — existe una singularidad espacial para un tiempo propio finito, donde $a(\tau) \rightarrow 0$ (o $\sigma \rightarrow \infty$), ver [Raychaudhuri \(1955\)](#). La singularidad de estos modelos puede ser eliminada si negamos alguna de las hipótesis del teorema, por ejemplo, incluyendo vorticidad, aceleración, o violando las condiciones de energía en algún régimen. A partir del trabajo de [Penrose \(1965a\)](#) y [Hawking y Penrose \(1970\)](#), sin embargo, se puede mostrar estudiando las propiedades globales del espacio-tiempo que existen restricciones muy fuertes para construir modelos cosmológicos realistas sin singularidades ([Hawking y Ellis 1973](#)). En particular, la existencia del fondo cósmico de microondas muestra que los rayos de luz convergen en el pasado, lo cual, por los teoremas de Penrose-Hawking implica que existe un borde o singularidad en el espacio-tiempo si se cumplen las condiciones de energía para la materia.

En un universo en expansión y evolución⁸, las distancias espaciales son cada vez más pequeñas a tiempos tempranos. Esta característica básica de los modelos cosmológicos lleva a un universo temprano caliente, o *Hot Big Bang*, ([Alpher et al. 1948](#)). El gran cuerpo de evidencia observacional que apoya la existencia de un Big Bang es variado: i) el diagrama de Hubble, que mide la expansión de galaxias, ii) la abundancia de elementos livianos generados en la etapa conocida como nucleosíntesis de Big Bang, iii) la existencia del llamado fondo cósmico de microondas, y muchos otros.

1.6.1. Observaciones cosmológicas

La principal manera de conocer la dinámica del Universo en expansión es a través de ondas electromagnéticas que viajan desde distancias lejanas hasta nuestro sistema de referencia. Estas ondas EM pueden tratarse con muy buena aproximación en el límite de óptica geométrica, en el cual el frente de onda, caracterizado por un tetravector \mathbf{k} , se mueve como una geodésica tipo-luz. La curvatura del espacio-tiempo modifica la trayectoria de estas geodésicas, curvándolas y amplificándolas ante la presencia de inhomogeneidades. A su vez,

⁸El universo puede estar en expansión pero no en evolución si se crea materia constantemente como en el modelo del *Steady-state Universe* de [Bondi y Gold \(1948\)](#). El modelo fue rápidamente desacreditado por el conteo de objetos en radio como los cuásares, que mostraban que había más fuentes en el pasado ([Kragh 1999](#))

rayos de luz emitidos y recibidos entre puntos de la congruencia fundamental cambiarán su frecuencia. Para cuantificar esto, definimos el factor de corrimiento al rojo o *redshift* como:

$$1 + z := \frac{\nu_e}{\nu_o}, \quad (1.49)$$

donde la frecuencia observada (emitida), se define como la proyección del vector de onda a la congruencia en ese punto $\nu_o := (u_a k^a)_o$. Esta ecuación puede relacionarse con la ecuación de Raychaduri para geodésicas tipo-luz. Para una congruencia fundamental geodésica y sin cizalladura, obtenemos la conocida relación (Ellis et al. 2012):

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (1.50)$$

A partir de esta ecuación vemos que los rayos de luz observados a un tiempo $t_o > t_e$ (i.e. $a(t_e) < a(t_o)$), emitidos en el pasado, llegan a nuestro sistema de referencia con frecuencias más bajas $\nu_o = \nu_e/(1 + z)$, es decir, se corren al rojo⁹. Este efecto resulta de la expansión y la dinámica de la congruencia cosmológica, de manera análoga al efecto Doppler entre dos sistemas en movimiento en un espacio-tiempo plano. En 1929, Hubble descubrió que galaxias distantes aparecen corridas al rojo, como si tuvieran una velocidad de recesión proporcional a la distancia, $v = H_0 R$; a partir de esta relación, conocida hoy en día como ley de Hubble-Lemaître, se puede construir el *diagrama de Hubble* para galaxias y obtener H_0 , denominada constante de Hubble, cuyo valor Hubble estimó como $H_0^{\text{Hubble}} \sim 500$ km/s/Mpc, casi diez veces más grande que el valor actual de $H_0 = 67,1$ km/s/Mpc (reportado por (Aghanim et al. 2020)). Desde esta primer evidencia observacional del Universo en expansión, la cosmología a alcanzado altos niveles de precisión observacional en los últimos años (ver Figura 1.8), lo que lleva a contrastar nuestros modelos con detalle.

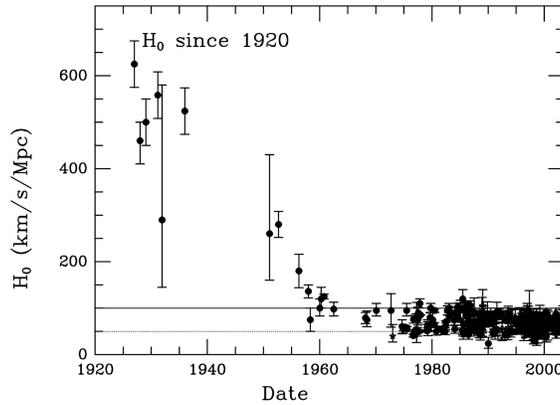


Figura 1.8: Medidas de la constante de Hubble a lo largo de la historia. Extraído de Harrison (2001)

La expansión dinámica del universo introduce también *horizontes*, superficies que separan diferentes regiones del espacio-tiempo según el comportamiento de las geodésicas tipo-luz

⁹Es interesante preguntarnos si el corrimiento al rojo puede explicarse alternativamenete como un fenómeno de “luz cansada”, donde los rayos de luz interactúan con la materia y van cambiando su longitud de onda. La baja densidad de materia observada, sin embargo, prescribe esta posibilidad (Weinberg 2008).

(ver Figura 1.9). Podemos distinguir entre ellos el *horizonte de eventos* cosmológico como la distancia $\chi_{\text{HE}}(t)$ que puede viajar la luz desde un tiempo t hasta $t \rightarrow t_{\text{final}}$, i.e. todo lo que podemos llegar a ver de nuestro universo (Rindler 1956):

$$\chi_{\text{HE}}(t) = c \int_t^{t_{\text{fin}}} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.51)$$

y el *horizonte de partículas*, como la distancia $\chi_{\text{HP}}(t)$ recorrida por la luz desde $t = 0$ (el Big Bang) hasta un tiempo t , i.e. todo el universo observable a un tiempo t :

$$\chi_{\text{HP}}(t) = c \int_{t=0}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.52)$$

También es útil introducir el *horizonte de Hubble*, definido crudamente como la superficie donde la velocidad de recesión de los cuerpos se equipara a la velocidad de la luz. En métricas espacialmente planas, esta superficie está dado por el radio de Hubble $R_H = 1/H(t)$. Este concepto cuasi-local es a veces confundido con el concepto global de horizonte de partículas, pero es importante notar que este horizonte no separa regiones causales. Fotones emitidos afuera de la esfera de Hubble pueden llegar al observador una vez que la esfera evoluciona y crece en tamaño. Formalmente la esfera de Hubble es un horizonte atrapado en el sentido de Hayward (1994): una superficie cerrada atrapada, donde la convergencia de los rayos de luz se detiene (ver Sección 1.5) El comportamiento de estos horizontes depende de la evolución de materia del Universo; analizaremos estos horizontes en cosmología en el Capítulo 5.

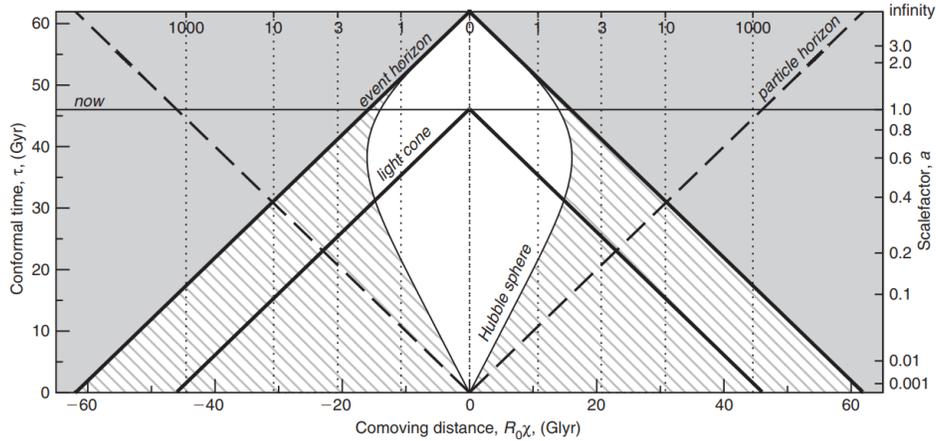


Figura 1.9: Diagrama de regiones causales en un Universo de Λ CDM. Extraído de Davis y Lineweaver (2004)

Además de los límites causales que impone la dinámica de la expansión, no podemos recibir rayos de luz emitidos a tiempos muy cercanos al Big Bang porque la opacidad del plasma caliente en ese entonces era muy grande para dejar escapar la luz. Para temperaturas del plasma de > 1 eV, dada la gran densidad de fotones, estos permanecen acoplados mediante interacciones de dispersión con electrones libres. A pesar de que los electrones pueden formar átomos de hidrógeno con protones libres a estas energías, estos son rápidamente ionizados por los fotones y la radiación permanece acoplada. Cuando el universo se expande y la

temperatura del plasma baja a < 1 eV, este proceso de ionización deja de ser efectivo y los electrones pueden combinarse eficientemente para formar hidrógeno neutro. La tasa de interacción entre fotones y electrones entonces disminuye drásticamente y los fotones pueden escapar. Los fotones que escapan, aproximadamente a un *redshift* $z^* = 1100$, viajan y permean todo el Universo formando el llamado *fondo cósmico de microondas* o CMB por sus siglas en inglés, descubierto por Penzias y Wilson (Penzias y Wilson 1965).

El CMB tiene un espectro de cuerpo negro con temperatura de $T = 10^4$ K que se corre al rojo a medida que el Universo evoluciona y es detectado en nuestro marco de referencia con una temperatura de $T = 2,728$ K. La precisión con la cual se ha medido las propiedades del CMB en los últimos 25 años por misiones como FIRAS, *planck*, o WMAP, ha permitido establecer que el universo temprano era extremadamente uniforme, y que las pequeñas fluctuaciones observadas ($\delta T/T = 10^{-5}$) son compatibles con la formación y evolución de la estructura. El CMB constituye el observable más importante y mejor estudiado de la cosmología moderna.

1.7. Λ CDM: el modelo estándar cosmológico

Hasta ahora, hemos considerado un modelo muy general para describir la evolución y expansión del Universo pero no hemos construido ningún modelo cosmológico específico para realizar predicciones cuantitativas. Dado que nuestras observaciones indican que el CMB es aproximadamente homogéneo, y la distribución de materia actual es también homogénea *en promedio* a gran escala > 100 Mpc, podemos construir un modelo de espacio-tiempo muy sencillo si suponemos que (a) el espacio-tiempo también es homogéneo en promedio, y (b) el espacio-tiempo es isotrópico, es decir, que ningún lugar en el universo es especial (principio Copernicano). De estos dos supuestos podemos construir la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que constituye la base fundamental para el modelo estándar de la cosmología actual, el modelo concordante o Λ CMB, por sus ingredientes fundamentales: una constante cosmológica no nula en las ecuaciones de Einstein, y materia oscura fría (*cold dark matter*).

1.7.1. Métrica isotrópica y homogénea

Para construir el espacio-tiempo de FLRW, dada una congruencia fundamental con una tetravelocidad \mathbf{u} , supondremos que las propiedades de la congruencia *en todo punto* son invariantes ante el grupo de rotaciones $O(3)$ (isotropía). Se puede demostrar que esto implica, a su vez, que todas las propiedades definidas en cortes espaciales ortogonales a la congruencia son invariantes (homogeneidad). Esto implica, equivalentemente que el espacio-tiempo tiene seis vectores de Killing asociados a estas simetrías. Dada la isotropía, la congruencia fundamental no puede tener propiedades dependientes de la dirección y por lo tanto

$$\omega_{ab} = \sigma_{ab} = \dot{u}^a = 0. \quad (1.53)$$

Como la congruencia es geodésica y sin vorticidad, podemos definir una base coordenada tal que $u_a = -\nabla_a t$, donde t es el tiempo cósmico que globalmente define cortes espaciales homogéneos (Ellis et al. 2012). La ecuación de Raychaduri (1.19) para este escenario es

entonces:

$$3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4\pi(\rho + 3p) + \Lambda. \quad (1.54)$$

A su vez, si aplicamos este grupo de simetría al tensor de energía-impulso, este no puede tener gradientes espaciales ni dependencias anisotrópicas con respecto a la congruencia fundamental, con lo cual podemos descomponerlo simplemente como

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p g_{ab}, \quad (1.55)$$

donde $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$. La ecuación de conservación $\nabla_a T^{ab} = 0$ nos dicta la evolución de la densidad:

$$\dot{\rho} + 3\Theta(p + \rho) = 0. \quad (1.56)$$

La geometría espacial de este modelo se puede escribir en coordenadas adaptadas a la congruencia fundamental si descomponemos la métrica como $g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}$, donde h_{ab} es la métrica de un 3-espacio homogéneo. Utilizando las Ecs. (1.53), se puede mostrar que en general, la métrica puede escribirse como:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2 \right), \quad (1.57)$$

donde $k = -1, 0, 1$ indica que el 3-espacio homogéneo es abierto, plano, o cerrado respectivamente. De aquí podemos ver explícitamente que el factor de escala controla el crecimiento de la distancia física R entre dos puntos de la congruencia fundamental, $R = a(t)r$. Podemos conseguir una ecuación adicional integrando (1.54) y usando (1.56):

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a(t)^2}. \quad (1.58)$$

que se denomina ecuación Hamiltoniana o *constraint*. En los modelos tipo FLRW utilizaremos la nomenclatura de Hubble donde el escalar de expansión está designado como $H(t) \equiv 3\Theta(t)|_{\text{FLRW}} = \dot{a}(t)/a(t)$. Las Ecs. (1.56)(1.58)(1.54) determinan la dinámica del espacio tiempo de FLRW. Para cerrar este sistema debemos indicar cuál es la topología global del 3-espacio ortogonal a la congruencia mediante el parámetro k y el contenido de materia en la densidad y la presión. La relación entre ρ y p depende del tipo de materia que consideremos. Las componentes de la materia, la constante cosmológica, la curvatura, y su contribución a la expansión se pueden comparar considerando densidades de energía adimensionales; por la Ec.(1.58), si dividimos por $H(t)^2$, obtenemos

$$\Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (1.59)$$

donde

$$\Omega = \frac{8\pi\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k := \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.60)$$

Es útil también definir una densidad crítica¹⁰ del universo $\rho_{\text{cr}} = 2H^2/8\pi$ a partir de la cual siempre podemos definir la densidad adimensional $\Omega_A = \rho_A/\rho_{\text{cr}}$, para alguna componente

¹⁰Para un modelo sin constante cosmológica, ρ_{cr} define el punto entre un universo en contracción y otro en expansión. La densidad crítica actual del Universo es de 5 átomos aproximadamente

de materia A . Descomponiendo las contribuciones a la densidad de las diferentes especies del modelo Λ CDM tenemos:

$$\Omega = \Omega_b + \Omega_{\text{mo}} + \Omega_\gamma + \Omega_\nu, \quad (1.61)$$

para “bariones” (núcleos y electrones) (b), materia oscura (mo), fotones (γ) y neutrinos (ν). Conociendo la contribución de ciertas componentes podemos restringir el contenido de energía de las demás componentes al tiempo de observación t_0 . Las observaciones astronómicas pueden determinar densidades ρ y no directamente Ω , con lo cual debemos primero conocer $H(t)$ por otros medios. Es usual utilizar la parametrización h de la constante de Hubble H_0 como $h := H_0 \times 9,8 \cdot 10^{11}$ años, y expresar las densidades observadas como $\Omega h^2 \propto \rho$. Los valores observados para la constante de Hubble determinan que $h \approx 0,7$.

La densidad de fotones se puede calcular a partir de observaciones del espectro del CMB. Considerando que este es un cuerpo negro casi perfecto, tenemos que $\rho \propto T^4$, y con la temperatura medida obtenemos $\Omega_\gamma h^2 = 2,47 \cdot 10^{-5}$ (Aghanim et al. 2020). La densidad de bariones es difícil estimar sumando la cantidad de masa observable directamente ya que el gas ionizado es difícil de observar (Mossa et al. 2020). La abundancia de elementos generados en el universo temprano, especialmente el Deuterio, sí es posible de estimar, constituyendo un marcador para la densidad de bariones (Fields et al. 2020). A escalas extragalácticas (con corrimiento al rojo $z \sim 2 - 3$), la luz de los cuásares es absorbida por regiones ricas en estos elementos livianos, y bajo suposiciones básicas de nucleosíntesis, se puede estimar $\Omega_b h^2 = 0,0222(5)$ (Steigman 2006). Este resultado es consistente con medidas del CMB por *Planck*, que bajo algunas hipótesis del modelo estándar, determinan $\Omega_b h^2 = 0,0225(3)$ (Aghanim et al. 2020).

El 80 % de la densidad de masa medida en el universo es, sin embargo, de origen desconocido. En el modelo Λ CDM se supone que existe un tipo de materia *oscura*, no incluida en el modelo estándar de partículas, que interactúa solamente con el espacio-tiempo y que puede aglutinarse eficientemente, i.e. materia fría. Hay muchas maneras de medir la densidad de materia oscura a partir de observaciones de estructura a diferentes escalas: en cinemática de galaxias y cúmulos (e.g. Zwicky (1937); Tyson et al. (1990)); en curvas de rotación (e.g. Volders (1959); Rubin et al. (1980)); y por lensing gravitacional (e.g. Clowe et al. (2006)). Todas estas observaciones muestran $\Omega_{\text{mo}} \approx 0,3$. Para que se cumpla la restricción Hamiltoniana (1.58) necesitamos tener en cuenta necesariamente la contribución de la constante cosmológica. A partir de observaciones de distancias de luminosidad de supernovas tipo Ia, se determinó que el universo se expande aceleradamente y por lo tanto, que un modelo tipo FLRW es incompatible con $\Lambda = 0$ (Perlmutter et al. 1999; Riess et al. 1998). Si suponemos además que la curvatura espacial es cero, entonces este valor es $\Omega_\Lambda \approx 0,7$. La presencia de una constante cosmológica es también consistente con la formación de estructura en el universo en base a mediciones del BAO y anisotropías del CMB (Rubin y Hayden 2016).

Una manera útil de expresar la Ec. (1.54) es a través del parámetro de desaceleración:

$$q(t) := -\frac{1}{H(t)^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.62)$$

Suponiendo una relación efectiva entre la densidad y la presión $p = \omega(t)\rho$, tenemos:

$$q(t) = \frac{3}{2}\Omega(\omega + \frac{1}{3}) - \Omega_\Lambda. \quad (1.63)$$

Esta relación determina si el universo está acelerado o desacelerado. De la misma manera, estimando $q(t)$, e.g. observando supernovas, podemos obtener una relación entre Ω_Λ y Ω .

1.7.2. Formación estructura y condiciones iniciales

Hemos dado un breve resumen de la dinámica global del universo en el modelo concordante. La otra parte importante del modelo es el tratamiento de las fluctuaciones que dan lugar a la estructura que vemos hoy en día. Estas fluctuaciones tienen su origen en el Universo temprano, producidas por un mecanismo que todavía desconocemos, y representan las condiciones iniciales del modelo. La idea más popular para tratar estas fluctuaciones es la inflación: un período corto de rápida expansión acelerada provocado por un agente desconocido, modelado, por ejemplo, como un campo escalar denominado inflatón (Guth 1981). Un período inflacionario puede dar lugar a perturbaciones adiabáticas (generadas por el inflatón) que luego aparecen manifiestas en el CMB. Un período corto inflacionario de expansión acelerada puede explicar por qué regiones que ahora parecen estar desconectadas estuvieron en contacto a tiempos muy tempranos (el llamado problema del horizonte, Baumann (2009)). Existen muchos modelos específicos de inflación y aún hoy en día se debate el poder predictivo de este mecanismo. Una predicción robusta de muchos modelos de inflación es la generación de ondas gravitacionales primordiales que pueden generar modos de polarización B en el CMB. En los próximos años, colaboraciones como QUBIC podrán observar si estos modos están presentes en el CMB utilizando interferómetros bolométricos en longitudes de ondas milimétricas, y poner así restricciones importantes al Universo temprano (Hamilton et al. 2022).

Una suposición fundamental del modelo concordante es que la métrica global es siempre aproximadamente FLRW y las inhomogeneidades, producidas por las fluctuaciones primordiales, evolucionan sobre este fondo en expansión. Esta es una hipótesis fuerte del modelo, pero ofrece una capacidad predictiva muy amplia con pocos parámetros libres. Con una métrica de fondo fija de FLRW, g_{ab}^{FLRW} , la métrica exacta se puede escribir como:

$$g_{ab} = g_{ab}^{\text{FLRW}} + \epsilon_{ab}, \quad (1.64)$$

donde $|\epsilon_{ab}| < 1$ son las perturbaciones. En este enfoque, necesariamente debemos elegir un gauge específico donde representar nuestras perturbaciones y asegurarnos de controlar los grados de libertad de gauge. Es útil para ello descomponer las perturbaciones en componentes irreducibles, determinadas por potenciales escalares, vectoriales, y tensoriales. Las cantidades físicamente relevantes pueden construirse luego con invariantes ante transformaciones de gauge (Bardeen 1980; Kodama y Sasaki 1984). Cada tipo de perturbación tiene su propia ecuación de evolución; dentro de estas, las perturbaciones escalares son las que determinan el crecimiento de estructura. En el llamado gauge Newtoniano, las perturbaciones escalares a la métrica se pueden escribir como:

$$ds^2 = -\left(1 + 2\Psi(\mathbf{x}, t)\right)dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}\left(1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)\right)dx_i dx_j. \quad (1.65)$$

Bajo la suposición que las perturbaciones se mantienen pequeñas, las ecuaciones de Einstein perturbadas se pueden resolver a orden lineal ¹¹. Con esta estructura de fondo, las

¹¹Las perturbaciones crecen del orden de 10^{-4} en regiones densas como cúmulos de galaxias, pero estamos descartando implícitamente que las derivadas de estas perturbaciones puedan crecer; comentamos sobre esto en el siguiente capítulo

diferentes componentes de la materia evolucionan acorde a la ecuación de Boltzmann en este espacio-tiempo perturbado, ya sea con distribuciones en equilibrio (e.g. Bose-Einstein o Fermi-Dirac) o teniendo en cuenta los términos colisionales en situaciones fuera del equilibrio. La ecuación de Boltzmann para la distribución queda a su vez acoplada con las ecuaciones de Einstein, que determinan la evolución de los potenciales, a través de la definición del tensor de energía impulso en términos de los momentos de la distribución, ver Ec. (1.26).

Por ejemplo, para partículas masivas no colisionales como la materia oscura, la ecuación de Boltzmann está dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E}{ap} \hat{p}^i \partial_i \Psi \right] p \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (1.66)$$

Integrando sobre los momentos, $\sim d^3p/(2\pi)^3$, obtenemos la ecuación a primer orden en las perturbaciones en términos de la densidad de ρ y la velocidad u^i del fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(\rho u^i)}{\partial x^i} + 3[H + \dot{\Phi}] \rho = 0, \quad (1.67)$$

que a su vez podemos escribir en términos del contraste, $\rho = \hat{\rho}(1 + \delta)$, como:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + 3\dot{\Phi} = 0. \quad (1.68)$$

Una ecuación adicional para la velocidad u^j se puede obtener integrando la ecuación de Boltzmann a 0-momentos, $\sim d^3p p/(2\pi)^3$, resultando en:

$$\frac{\partial u^j}{\partial t} + H u^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0. \quad (1.69)$$

Si suponemos que la materia es 'fría' podemos desechar todos los términos de orden $(p/E)^k$ con $k > 2$ y estas dos ecuaciones bastan para cerrar el sistema. Estos sistemas suelen resolverse en términos del tiempo conforme, en el espacio de Fourier, y quedan expresados como:

$$\delta' + iku + 3\Phi' = 0, \quad (1.70)$$

$$u' + \frac{a'}{a} u + ik\Psi = 0. \quad (1.71)$$

Las soluciones completas se encuentran integrando todo los modos de la solución. Para el acople con el espacio-tiempo, usamos la distribución para definir el tensor de energía-impulso y resolver las ecuaciones de Einstein. A primer orden, las ecuaciones de Einstein para los potenciales escalares, con la contribución de fotones, son:

$$k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \left(\Phi' - \frac{a'}{a} \Psi \right) = 4\pi G a^2 [\rho \delta + \text{términos de radiación}], \quad (1.72)$$

y

$$k^2(\Psi + \Phi) = 0 + \text{términos cuadrupolares de radiación}. \quad (1.73)$$

A partir de condiciones iniciales, e.g dadas por inflación, estas ecuaciones determinan el crecimiento lineal de estructura en el universo. En general estas se resuelven numéricamente,

pero se pueden estudiar límites analíticos y semi-analíticos en ciertos regímenes, por ejemplo si los modos son más grandes que las escalas del horizonte, o más pequeños que el horizonte. Las soluciones muestran que en la época de radiación, las perturbaciones crecen de forma logarítmica y luego pasan a crecer proporcionales al factor de escala. Esto se puede comparar con las observaciones utilizando trazadores de la materia como los cúmulos de galaxias y así construir de manera estadística un espectro de potencias que se puede contrastar con las perturbaciones del modelo (teniendo cuidado con otros efectos observacionales como el llamado bias). A partir de esto se pueden analizar propiedades como las oscilaciones bariónicas acústicas y efectos de lensing de la estructura por el CMB (efecto Sunyaev-Zeldovich), para medir distancias y la tasa de expansión como función del redshift.

1.7.3. Problemas abiertos del modelo estándar

Las perturbaciones de materia finalmente empezarán a colapsar y virializarse de pequeñas escalas a escalas más grandes, i.e. de manera jerárquica. Si *suponemos* que el universo sigue bien descrito por la métrica de FLRW en todas partes, estas perturbaciones siguen siendo pequeñas con respecto a la métrica de fondo y la parte gravitatoria puede ser descrita por potenciales Newtonianos. La manera más popular entonces de estudiar estas estructuras no-lineales es a través de simulaciones Newtonianas de N-cuerpos que ocurren en el fondo en expansión. Mostramos en el Apéndice B cómo analizar un colapso esférico no lineal en gravedad Newtoniana.

A medida que más sistemas colapsan y forman estructuras, aumenta la cantidad de huecos (*voids*) en el espacio, que poseen localmente una métrica diferente al espacio-tiempo de FLRW. Muchas de las interpretaciones de observaciones actuales dependen de suponer que la métrica es aproximadamente FLRW en cada región local. Aunque supongamos que el principio Copernicano es verdadero, y que el universo a gran escala es estadísticamente isotrópico y homogéneo, esto no implica necesariamente que el espacio-tiempo sea FLRW. Otros efectos relacionados a la curvatura pueden influir tanto local como globalmente. Para responder rigurosamente a esta pregunta debemos analizar formalmente como llegar a una descripción global a partir de estructuras locales. Es posible que efectos no-lineales de las ecuaciones de Einstein produzcan variaciones a la tasa de expansión no triviales que se alejan drásticamente del modelo de FLRW. A su vez, una vez que se forma estructura, debemos también entender cuáles son las condiciones de contorno en los sistemas locales (e.g. en el sistema solar) que nos permiten resolver las ecuaciones del campo gravitatorio aisladamente; estas condiciones de contorno no pueden estar, rigurosamente, a distancias arbitrariamente grandes del sistema ya que en el universo dinámico, el espacio-tiempo allí no es plano, ni vacío. Nos ocuparemos de esto en el siguiente capítulo de la tesis, donde discutiremos en detalle el segundo problema: cómo analizar la influencia del espacio-tiempo en expansión global sobre sistemas locales aislados.

2

Interacción global-local y local-global en cosmología

— \diamond —

Discutimos el problema de las escalas en cosmología, es decir, nos preguntamos de qué manera influyen los sistemas locales a la dinámica global del Universo, y viceversa, cómo influye la dinámica global a la física local. En la primer parte del capítulo analizamos el problema local \rightarrow global, definiendo el concepto de modelo de Universo promedio y qué entendemos por fluido cosmológico. Discutimos las diferencias entre modelo homogéneo e inhomogéneo, y las suposiciones de homogeneidad implícitas en el modelo Λ CDM. Analizamos de qué manera las inhomogeneidades pueden afectar la interpretación de nuestras observaciones cosmológicas a gran escala en lo que se conoce como el problema de la reacción inversa. En la segunda parte del capítulo analizamos el problema global \rightarrow local discutiendo la definición de sistema gravitatorio aislado. Mostramos que para sistemas inmersos en un Universo en expansión aparecen una variedad de problemas conceptuales interesantes para caracterizar sus propiedades ya que no existen condiciones asintóticamente planas.

— \diamond —

2.1. Introducción

El Universo está formado por diferentes subsistemas ligados gravitacionalmente, como cúmulos de galaxias, estrellas, y agujeros negros. La dinámica en estos sistemas está regida por las ecuaciones de Einstein, tal como muestra un abundante cuerpo de evidencia en el sistema solar, en púlsares binarios, y en fusiones de objetos compactos. A su vez, el rango de escalas en el cual domina la interacción gravitatoria es muy amplio: desde escalas de \sim km en agujeros negros estelares, a escalas de \sim Gpc para el Universo en expansión. Las ecuaciones de Einstein son no lineales, con lo cual el acople entre pequeñas y grandes escalas en el espacio-tiempo es altamente no trivial. La relación entre escalas puede analizarse de dos modos fundamentales: de manera local \rightarrow global (el aspecto emergente, o *bottom-up*), o de manera global \rightarrow local (el aspecto convergente o *top-bottom*).

- El aspecto emergente refiere al análisis de la dinámica global del Universo a partir de las estructuras pequeñas que lo conforman. Dado que la materia en el Universo no

es homogénea a escalas < 100 Mpc y redshifts bajos $z < 0,2$, necesitamos establecer como afectan estas inhomogeneidades a las propiedades que observamos a gran escala. En el modelo estandar cosmológico se supone que la métrica de fondo es siempre FLRW, pero es importante remarcar que esto se postula a priori en el modelo. Es posible que el Universo sea fundamentalmente inhomogéneo en ciertas regiones del espacio-tiempo, e.g. cerca de grandes *voids* donde la curvatura es negativa, lo cual implicaría que algunas predicciones del modelo Λ CDM, como la necesidad de introducir una constante cosmológica no nula, necesiten ser revisadas.

- El aspecto convergente, mucho menos discutido en la literatura, refiere al análisis de la dinámica local de sistemas que están embebidos en el Universo en expansión (Ellis 2002; Ellis y Sciamia 1972). El primer problema importante a resolver en este contexto es simplemente cómo definir un sistema relativista aislado o desacoplado de la expansión. En Relatividad General, los sistemas aislados se definen naturalmente en base a condiciones de contorno asintóticamente planas en infinito, donde se pueden establecer unívocamente las propiedades del sistema gravitatorio como la masa y el momento. Si el Universo está en expansión, debemos redefinir este concepto y encontrar uno equivalente, posiblemente cuasilocal en vez de global, i.e. en una región finita extendida, que nos permita establecer cuándo un sistema está aislado de la expansión y extraer sus propiedades. Esto tiene implicaciones importantes para tratar sistemas gravitacionales como agujeros negros, cuya definición misma es teleológica.

En este capítulo discutiremos estos dos aspectos en conjunto. En la primer parte discutimos diferentes enfoques para modelar el efecto de las inhomogeneidades a la dinámica cosmológica global, definiendo el concepto de reacción inversa o *backreaction*, y alguna de las controversias que aparecen en la literatura. En la segunda parte, analizamos los problemas de definir sistemas locales relativistas y aislados en un universo en expansión. Esto nos permite discutir las diferentes maneras en las cuales el estado dinámico global del Universo afecta a la física local; en particular, presentamos una lista de problemas abiertos que motivarán los siguientes capítulos de la tesis. Finalmente, en la tercer parte, revisamos las métricas (inhomogeneas) más relevantes que modelan sistemas locales en un Universo en expansión.

— \diamond —

2.2. Dinámica global: de pequeñas a grandes escalas

Mediante observaciones del CMB, tenemos muy buena evidencia que la materia en el Universo es homogénea e isotrópica $\sim 3,8 \times 10^5$ años después del Big Bang (Planck-Collaboration 2020). Si suponemos válido el principio Copernicano, por definición, cualquier otro observador observará el CMB de manera isotrópica. Con estas hipótesis, el teorema de Ehlers et al. (1968) muestra que la métrica en esa región del espacio-tiempo es necesariamente FLRW (ver también la generalización de Stoeger et al. (1995)). Luego del desacople de fotones y el plasma, inestabilidades gravitacionales a partir de pequeñas fluctuaciones producen estructuras complejas que forman la *red cósmica*, e.g., burbujas de muy baja densidad, filamentos, nudos, paredes, y cúmulos.

El rol de Λ en la formación de estructura

Es interesante notar que la etapa en donde el Universo comienza a acelerarse coincide con la época de formación no-lineal de estructura compleja ($z \sim 0,27$). En Λ CDM, esto ocurre debido a que la constante cosmológica Λ tiene precisamente el valor $\Lambda = 1,1056 \times 10^{-52} m^{-2}$. El aparente *ajuste fino* del valor de Λ que da lugar a esta coincidencia sugiere que la aceleración aparente del Universo está relacionada con la formación de estructura.

La constante cosmológica es la modificación más sencilla a las ecuaciones de Einstein. La introducción de esta constante siempre ha sido considerada *ad-hoc* y poco natural en el marco de la Relatividad General, lo cual ha llevado a buscar interpretaciones alternativas para explicar su presencia, especialmente en cosmología. Por ejemplo, se ha propuesto que la constante es una manifestación de (a) un campo dinámico, la “quintessencia”, con propiedades exóticas (Zlatev et al. 1999), (b) la energía de vacío de los campos cuánticos (Carroll 2001), o (c) un efecto aparente inducido por gradientes de curvatura en el Universo inhomogéneo (Wiltshire 2007b). Notemos, sin embargo, que la constante cosmológica puede ser simplemente una constante de la naturaleza que aparece como modificación a las ecuaciones de Einstein (Bianchi y Rovelli 2010)

En el modelo cosmológico estándar, la evolución de estructura siempre evoluciona sobre una métrica de fondo de FLRW. Las inhomogeneidades con tamaños característicos comparables al horizonte de Hubble son tratadas de manera relativista pero su evolución es lineal; por otro lado, las estructuras a pequeñas escalas evolucionan de manera no lineal cuando su densidad de contraste $\delta \rightarrow 1$, pero poseen campos gravitacionales débiles y son casi exclusivamente modeladas por simulaciones Newtonianas de N-cuerpos sobre un fondo fijo de FLRW (Kim et al. 2011). Es claro que este modelo ofrece un excelente ajuste a las observaciones, pero es importante preguntarnos si la suposición de un fondo efectivo de FLRW a todo tiempo está justificado cuando el Universo comienza a ser inhomogéneo a escalas considerables.

El problema de cómo ajustar el espacio-tiempo de nuestro Universo inhomogéneo actual con una métrica de FLRW fue planteado por primera vez por Ellis y Stoeger (1987). En vez de *suponer* a priori una métrica de fondo, podemos tratar de construir una métrica global del Universo como un promedio efectivo de lo que ocurre a escalas locales. Consideremos para ello un operador que actúa como un promedio sobre las propiedades físicas, $\hat{P} = \langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$, en un volumen espacial \mathcal{D} . Si tomamos promedios sobre volúmenes cómoviles cada vez más grandes, estadísticamente la densidad de la materia en el Universo es cada vez más homogénea, con lo cual el promedio nos da la densidad de fondo $\langle \rho(t, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{D}} \approx \hat{\rho}(t)$. Esta densidad de masa siempre es conservada en el tiempo a medida que el Universo evoluciona. La curvatura promedio del espacio-tiempo, sin embargo, no tiene una ecuación análoga de conservación ya que las ecuaciones de Einstein son no-lineales y la derivada de los promedios no conmuta, $\partial_t \langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \partial_t \Psi \rangle_{\mathcal{D}} \neq 0$. Suponiendo que el Universo comienza con curvatura espacial igual a cero, la evolución del promedio de la curvatura no asegura que esta se mantenga nula. El Universo actual está dominado en volumen por *voids* y, por lo tanto, la curvatura promedio es negativa. El modelo cosmológico global construido como un promedio de estructuras locales puede entonces, en principio, no converger a un modelo plano de FLRW. El posible impacto de la formación de estructura en la expansión global se conoce como reacción inversa, o

backreaction en inglés.

En las siguientes secciones revisaremos este problema con más detalle. Primero, analizamos qué suposiciones estamos realizando al estudiar el universo como un fluido en Relatividad General (Wiltshire 2011). Luego, presentamos dos enfoques muy diferentes para analizar el problema de *backreaction*, perturbativo y no perturbativo. Mostramos luego cómo son las ecuaciones dinámicas cuando tomamos promedios de las variables cosmológicas sin suponer un fondo de FLRW y cómo estas podrían dar lugar a una aceleración efectiva positiva sin introducir Λ .

2.2.1. El fluido cosmológico y escalas promedios

Cuando estudiamos la dinámica relativista del Universo, modelamos el contenido de materia en el tensor de energía-impulso, T_{ab} , como si fuera un fluido, usualmente polvo y radiación. Un fluido es una descripción efectiva (*coarse-grained*) de la materia, donde suponemos que existe una escala en donde la estructura microscópica se puede tratar de manera promedio o emergente¹. La dinámica de un sistema emergente se debe tratar con una teoría efectiva que surge a partir de una teoría “microscópica” más fundamental. Como ejemplos conocidos podemos nombrar la termodinámica, que emerge a partir de la mecánica estadística, y la teoría electromagnética de medios, que emerge a partir de promediar las ecuaciones de Maxwell y el comportamiento promedio de cargas.

En cosmología, lo que representamos como fluido posee un rango amplio de escalas características: desde galaxias, donde el fluido está constituido por componentes estelares, a filamentos, donde las galaxias mismas representan los elementos de fluido cosmológico. Las estructuras no-lineales más grandes son los *voids*, con tamaños característicos de $\sim 40h^{-1}$ Mpc (Hoyle y Vogeley 2002). Esto implica que para describir estadísticamente un fluido homogéneo en el Universo actual debemos tomar *promedios* más grandes que estas escalas. Además, los elementos de fluido cosmológico van a cambiar su carácter a lo largo de la evolución del Universo ya que los cúmulos colapsan y se fusionan mientras que los *voids* crecen en tamaño. La principal dificultad que introduce esta descripción efectiva en cosmología radica en que las ecuaciones de Einstein son mucho más difíciles de tratar cuando tomamos promedios. En el Universo temprano podemos aplicar sin ambigüedad las ecuaciones de Einstein ya que las escalas de homogeneidad del plasma caliente son muy pequeñas. Cuando comienza la formación de estructura sin embargo, la definición de partícula en nuestro modelo debe cambiar ya que en el colapso gravitación las geodésicas se cruzan. Es entonces cuando necesitamos describir nuestro fluido como un promedio de materia tomado a escalas relativamente grandes. En Relatividad General, esto implica necesariamente que debemos tener en cuenta la curvatura efectiva de cada región, lo cual puede (o no) tener un efecto no trivial en la dinámica global. Esquemáticamente, podemos establecer la siguiente jerarquía en la descripción métrica del espacio-tiempo:

$$\left. \begin{array}{l} g_{\mu\nu}^{\text{estelar}} \rightarrow g_{\mu\nu}^{\text{galaxia}} \rightarrow g_{\mu\nu}^{\text{cumulo}} \rightarrow g_{\mu\nu}^{\text{paredes}} \\ \vdots \\ g_{\mu\nu}^{\text{void}} \end{array} \right\} \rightarrow g_{\mu\nu}^{\text{Universo}}. \quad (2.1)$$

¹Debemos considerar dos escalas, una microscópica y otra donde los gradientes no sean grandes

En esta perspectiva libre de estructuras de fondo, no podemos suponer a priori que el espacio-tiempo del Universo se comporta en promedio como una métrica FLRW a todo tiempo. La materia es estadísticamente homogénea a partir de cierta escala, pero la curvatura espacial del espacio-tiempo localmente no se conserva al tomar promedios y puede cambiar la dinámica en promedio cuando se forman estructuras (Buchert y Räsänen 2012). Los modelos basados en perturbaciones de FLRW ignoran necesariamente esta contribución de la geometría ya que en este caso, la curvatura se describe por un solo parámetro k que sigue la conservación $k \sim \text{constante}$.

En escalas de cúmulos y galaxias los campos gravitatorios son débiles y la influencia local de la curvatura es usualmente despreciada en los modelos (e.g. en simulaciones de N cuerpos). La aproximación Newtoniana exige un espacio de fondo Minkowskiano y Euclídeo, lo cual elimina de facto cualquier contribución de la geometría a la dinámica (Buchert 2018; Ehlers 2019). La generalización de esta aproximación Newtoniana a geometrías más generales puede tener efectos apreciables locales (Vigneron 2022). Incluso si la gravitación Newtoniana es válida localmente, el marco de referencia inercial en una región cerca de una sobredensidad difiere del marco de referencia inercial en una región subdensa, e.g. el tiempo propio pasa más lento en la región densa (ver Figura 2.1). La relación entre estos marcos de referencia es altamente no trivial y puede ser relevante para entender las observaciones cosmológicas (Wiltshire 2007a).

2.2.2. Efectos globales de las inhomogeneidades: *backreaction*

El Universo parece ser estadísticamente homogéneo a escalas $\mathcal{L}_h > 100 - 300 h^{-1}$ Mpc de acuerdo a los últimos resultados observacionales obtenidos por, e.g. el *wiggleZ* (Scrimgeour et al. 2012). Físicamente, esta es la escala de la onda acústica más grande en el CMB y además coincide con 2-3 veces la escala \mathcal{L}_v de los *voids* observados. Esta escala de homogeneidad estadística marca la transición de un régimen no-lineal donde tenemos una varianza alta de la densidad $\delta\rho/\rho$ a un régimen suave y delicado donde la evolución cosmológica está bien definida por un único parámetro de Hubble.

Para analizar si estas inhomogeneidades pueden afectar a la dinámica global, comencemos considerando una métrica de fondo suave que varía lentamente, $\langle g_{ab} \rangle$, y una componente ϵ_{ab} superpuesta que representa variaciones rápidas sobre este fondo. La métrica exacta, g_{ab} , solución a las ecuaciones de Einstein, está dada por:

$$g_{ab} = \langle g_{ab} \rangle + \epsilon_{ab}. \quad (2.2)$$

Denotemos R a la escala de curvatura de fondo, $|R_{bcd}^a[\langle g \rangle_{ab}]| \sim 1/R^2$, y L a la escala característica de las perturbaciones, donde consideramos $R \gg L$. Este escenario puede modelar, por ejemplo, la propagación de ondas gravitacionales sobre un espacio-tiempo plano o pequeñas estructuras formándose en un espacio-tiempo en expansión. Para los casos relevantes en cosmología, los potenciales crecen hasta $|\epsilon_{ab}| \sim \Phi \sim 10^{-4}$ cerca de cúmulos de galaxias. La derivada de estas perturbaciones, relacionadas con el contraste de densidad δ , no están en principio acotadas y pueden contribuir a la curvatura del espacio-tiempo significativamente, alterando la dinámica de geodésicas. De manera general, consideremos la expansión del tensor de Ricci con respecto a la métrica exacta (2.2):

$$R_{ab}[\langle g_{ab} \rangle + \epsilon_{ab}] = R_{ab}^{(0)} + R_{ab}^{(1)} + R_{ab}^{(2)} + R_{ab}^{(+3)}, \quad (2.3)$$

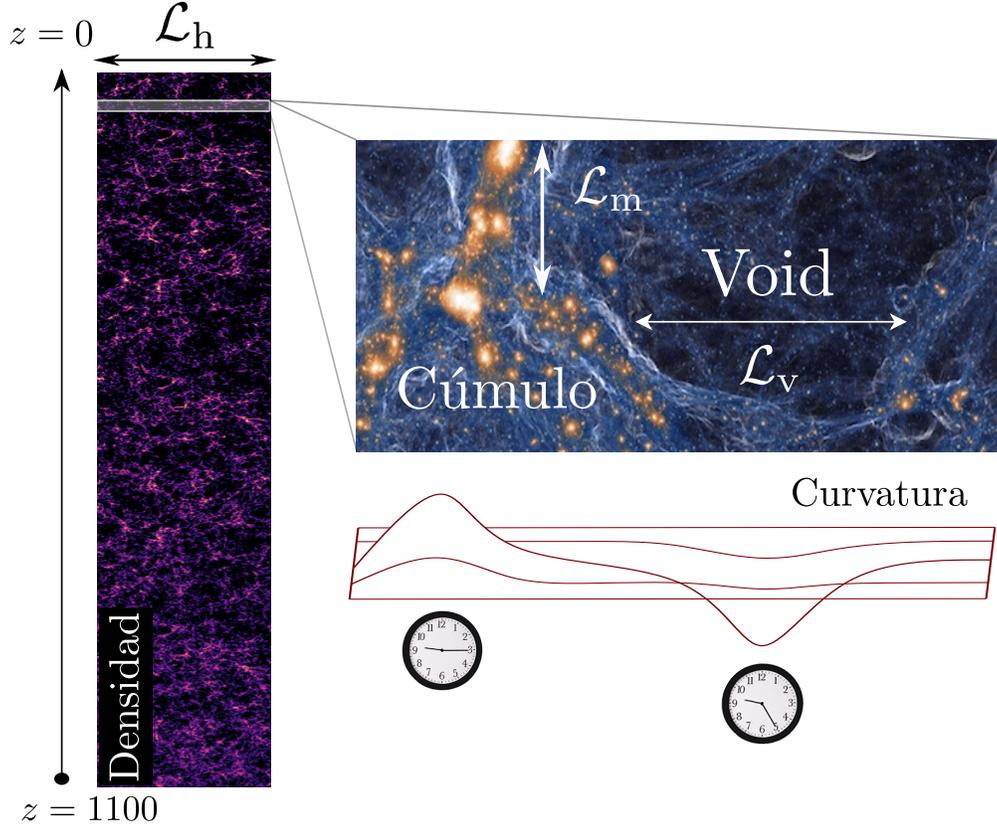


Figura 2.1: **Esquema de la red cósmica y escalas en el Universo.** A partir de pequeñas fluctuaciones sobre un medio de densidad homogénea, observadas en el CMB ($z = 1100$), el Universo evoluciona formando estructura. En la época actual ($z = 0$), la densidad de la materia es homogénea sólo a escalas espaciales mayores a $\mathcal{L}_h \sim 100$ Mpc. La estructura está dominada por voids, con escalas características de $\mathcal{L}_v \sim 40$ Mpc, rodeados de paredes y filamentos de materia con escalas características más pequeñas a medida que colapsan \mathcal{L}_m . La curvatura de estos voids es negativa y por lo tanto se expanden más rápido que las regiones más densas. El tiempo propio (representado por reloj) en estas regiones pasa más rápido que en regiones de densidad y esto tiene efectos en la evolución de la energía de fotones. Notemos finalmente que la curvatura promedio del espacio-tiempo no es nula estrictamente. (Imágenes obtenidas en simulaciones cosmológicas. Crédito: V.Springel, Max-Planck Institut für Astrophysik)

donde $R_{ab}^{(0)} = R^{ab}[\langle g_{ab} \rangle]$ y $R_{ab}^{(i)}$ denota el término en el tensor de Ricci de orden (i) en ϵ_{ab} . Utilizando las ecuaciones de Einstein, obtenemos una ecuación efectiva para la métrica de fondo $\langle g_{ab} \rangle$ dada por:

$$G_{ab}^{(0)} \equiv R_{ab}^{(0)} - \frac{1}{2} \langle g \rangle_{ab} R^{(0)} = 8\pi T_{ab}^{\text{eff}}, \quad (2.4)$$

donde $T_{ab}^{\text{eff}} = T_{ab} - G_{ab}^{(1)} - G_{ab}^{(2)} - G_{ab}^{(+3)}$ es un tensor efectivo de energía-impulso que posee las contribuciones no-lineales de las perturbaciones en los términos $G_{ab}^{(i)}$. El problema de la reacción inversa consiste en analizar si esta contribución puede afectar significativamente la dinámica de la métrica de fondo $\langle g_{ab} \rangle$.

En el contexto cosmológico, la métrica de fondo representa una métrica efectiva promedio a gran escala con un tamaño característico de curvatura igual al radio de Hubble, $R = 1/H \approx 5$ Gpc. Para resolver la dinámica de esta métrica, la primer dificultad que debemos afrontar es cómo tomar promedios de cantidades tensoriales. Esta operación no está naturalmente definida

en geometrías pseudo-Riemannianas, con lo cual es posible tomar diferentes prescripciones. La segunda dificultad es que las ecuaciones de Einstein son no-lineales y la operación de promediado no conmuta con productos de derivadas. Para ver esto, consideremos un tensor de energía-impulso inhomogéneo que bajo una dada operación de promediado $\langle T_{ab} \rangle_{\mathcal{D}}$, sobre una región $\mathcal{D} \approx 100$ Mpc, es aproximadamente homogéneo. Las ecuaciones de Einstein para la métrica promedio no son equivalentes a las ecuaciones locales ya que:

$$\langle G_{ab}[g_{ab}] \rangle_{\mathcal{D}} = G_{ab}[\langle g_{ab} \rangle_{\mathcal{D}}] + \delta G_{ab} = \langle T_{ab} \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (2.5)$$

Si la materia es localmente isotrópica en todo punto (como en el Universo temprano), entonces la solución a la métrica sería exactamente la métrica de FLRW. Sin embargo, para resolver la dinámica promedio a gran escala en el Universo actual, debemos tener en cuenta el término δG_{ab} para resolver la dinámica global del universo. Este término puede considerarse, como vimos anteriormente (ver Ec. (2.4)), como una contribución efectiva al tensor de energía-impulso en las ecuaciones de Einstein para la métrica de fondo. Para resolver cuán grande es la influencia de las inhomogeneidades en la dinámica global del espacio-tiempo, podemos distinguir entre enfoques perturbativos o no perturbativos, es decir, dependientes o independientes del fondo respectivamente.

En el enfoque perturbativo, partimos suponiendo que la métrica de fondo tiene simetría FLRW y nos preguntamos si el efecto de las inhomogeneidades puede crecer de manera apreciable sobre este fondo. Este problema fue tratado rigurosamente en [Ishibashi y Wald \(2005\)](#), y luego con más generalidad en [Green y Wald \(2014, 2013, 2016\)](#) y [Baumann et al. \(2012\)](#) usando métodos similares. Ambos enfoques parten de postular que la métrica está dada por $g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + \epsilon_{ab}$, donde $g_{ab}^{(0)}$ tiene simetría FLRW, y definen una operación de promediado o suavizado basados en un núcleo f^{ab} que varía lentamente en una región de homogeneidad \mathcal{D} . Descomponiendo la ecuación de Einstein como en (2.4), nos interesa mostrar si el tensor de energía-impulso T_{ab}^{eff} que incluye las contribuciones no-lineales del espacio-tiempo puede cambiar la dinámica del fondo $g_{ab}^{(0)}$.

[Green y Wald \(2014\)](#) muestran a partir de condiciones relativamente generales² que el tensor efectivo T_{ab}^{eff} tiene traza nula y cumple las condiciones de energía. Green y Wald concluyen entonces que las inhomogeneidades no puede actuar como una constante cosmológica sobre el fondo y que estos términos son despreciables, $|T_{ab}^{\text{eff}}| = |G_{ab}^{(0)} - T_{ab}^{(0)}| \ll 1/R^2$. En otras palabras, bajo estas hipótesis, las inhomogeneidades no pueden explicar la expansión acelerada del Universo. Por otra parte, [Baumann et al. \(2012\)](#) considera una expansión post-Newtoniana del tensor de energía-impulso efectivo y muestra, utilizando técnicas de teorías efectivas, que las escalas pequeñas de estructuras virializadas no contribuyen a la dinámica global. Ambos enfoques muestran entonces que no puede existir una “cascada inversa” catastrófica de escalas pequeñas a grandes que afecten la dinámica global. En estos trabajos sigue estando la hipótesis de un fondo con simetría FLRW. Las conclusiones de estos teoremas se restringen entonces a una forma “débil” de reacción inversa, i.e. las inhomogeneidades no pueden crecer si la métrica de fondo es FLRW, ver la discusión y controversia en [Buchert et al. \(2015\)](#) y [Green y Wald \(2015\)](#).

²Green y Wald toman como hipótesis (i) que la derivada primera de ϵ_{ab} está acotada y (ii) que el tensor de energía-impulso de la materia cumple las condiciones de energía.

En vez de analizar la evolución de una métrica de fondo, el enfoque más general para tratar este problema consiste en encontrar una representación efectiva o promedio del espacio-tiempo que reproduzca las observaciones cosmológicas sin suponer estructuras de fondo a priori (Clarkson et al. 2011; Buchert y Räsänen 2012). Esto puede introducir cambios cualitativos, por ejemplo, en la propagación de fotones. Para entender las diferencias entre una descripción efectiva (tipo FLRW) y una descripción local, consideremos la evolución de las geodésicas tipo-luz descritas por una tetravelocidad \mathbf{k} con expansión $\theta := \nabla_a k^a$ y cizalladura σ , dada por las ecuaciones de Sachs:

$$k^a \nabla_a \theta = -R_{ab} k^a k^b - \frac{1}{2} \theta^2 - 2\sigma^2. \quad (2.6)$$

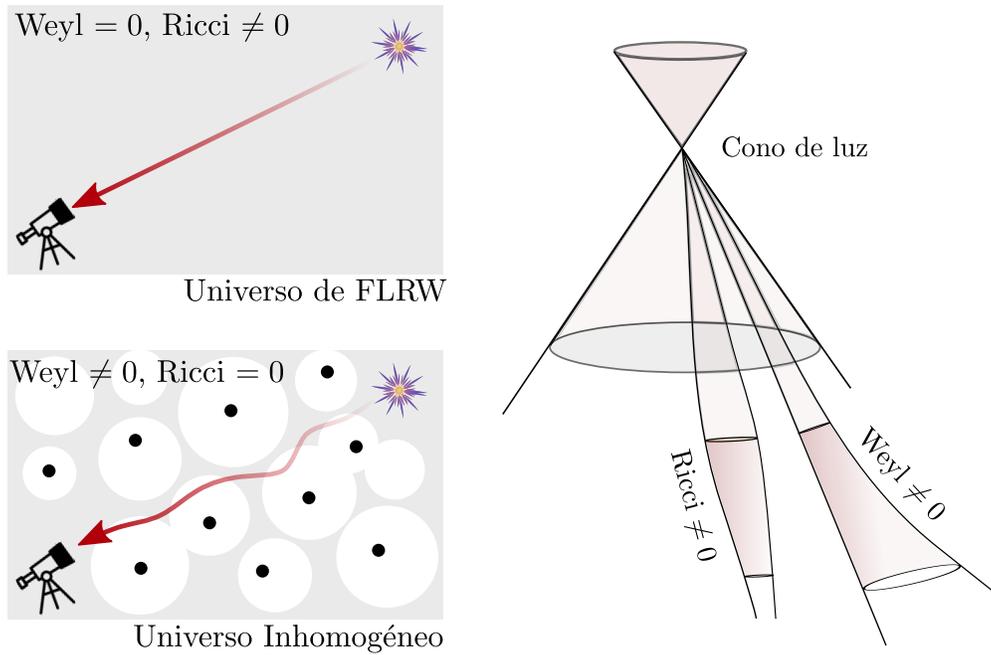


Figura 2.2: (Derecha) La propagación de la luz ante curvatura local de Ricci y curvatura de Weyl es cualitativamente diferente. La curvatura de Ricci tiende a focalizar los rayos de luz positivamente, mientras que la curvatura de Weyl (a primer orden) actúa como un lente atisgmático, con focalización positiva en un plano y negativa en el otro (Penrose 2005). (Izquierda) En modelos globales cosmológicos tipo FLRW suponemos que en promedio los haces de luz se mueven en un medio uniforme con curvatura de Ricci no nula. En realidad, la situación es similar al panel de abajo, donde los haces de luz se mueven casi en vacío con Ricci nulo y estructuras gravitacionales con curvatura de Weyl no nula.

En un universo descrito localmente por la métrica de FLRW, el tensor de Weyl es cero y por lo tanto $\sigma = 0$. Por otro lado, en el Universo inhomogéneo, la evolución de rayos de luz ocurre principalmente en vacío con $R_{ab} = 0$ y con la presencia de estructuras gravitatorias que implican un tensor de Weyl distinto de cero, $\sigma \neq 0$. Tomar una descripción promedio del espacio-tiempo directamente con una métrica de FLRW implica entonces pasar de un escenario microscópico (con tensor de Weyl eléctrico $E_{ab} \neq 0$) a otro macroscópico (con $E_{ab} = 0$), lo cual puede introducir diferencias cualitativas en los modos de propagación de la luz, ver Fig. 2.2.

El primer paso para resolver este problema es encontrar una prescripción adecuada para la operación de promedios sobre el espacio-tiempo. Los métodos propuestos más conocidos son la gravedad macroscópica de Zalaletdinov (1992) (ver también Coley et al. (2005)), que sigue ideas similares a las aplicadas en electrodinámica de medios, y el método de promedios escalares de Buchert. Este último es el más utilizado en la literatura y es interesante describirlo en más detalle (Buchert et al. 2018). Dada una cantidad escalar Ψ , podemos definir su promedio en una región \mathcal{D} como:

$$\langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \Psi \sqrt{-g} d^3 X, \quad (2.7)$$

y la expansión local como:

$$\langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}} := \frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}}. \quad (2.8)$$

Es fácil ver que la evolución de la cantidad promedio y el promedio de la evolución de una cantidad escalar no conmutan. Tomando por ejemplo la densidad, el conmutador es:

$$\langle \dot{\rho} \rangle - \dot{\langle \rho \rangle} = \frac{\dot{S}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}}, \quad \text{donde} \quad S_{\mathcal{D}} := \int \frac{\rho - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \sqrt{-g} d^3 X, \quad (2.9)$$

donde $S_{\mathcal{D}}$ es una medida de la entropía relativa. Podemos obtener así ecuaciones promediadas análogas a las de Friedman para un factor de escala definido como el volumen en donde tomamos el promedio, $V_{\mathcal{D}}(t)$, normalizado con el volumen inicial que consideramos,

$$a_{\mathcal{D}}(t) := \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}_i}} \right)^{(1/3)}, \quad (2.10)$$

Tomando promedios de las ecuaciones de Raychaduri, las ecuaciones de Friedmann, y las ecuaciones de conservación de la densidad obtenemos:

$$3 \left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda + \frac{3k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} = -\frac{1}{2} (W_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}}); \quad (2.11)$$

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = Q_{\mathcal{D}}; \quad (2.12)$$

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} \dot{a}_{\mathcal{D}} + 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = 0. \quad (2.13)$$

donde aparece un nuevo término que definimos como el *backreaction* cinemático, $Q_{\mathcal{D}}$:

$$Q_{\mathcal{D}} := \frac{2}{3} \langle (\Theta - \langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (2.14)$$

El promedio espacial del Ricci, $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$ reemplaza la curvatura constante de las ecuaciones de Friedmann. Lo escribimos como un nuevo término de *backreaction* que captura la desviación del promedio a un modelo con curvatura constante, $W_{\mathcal{D}} := \langle R \rangle_{\mathcal{D}} - 6k_{\mathcal{D}_i}/a_{\mathcal{D}}^2$. De estas ecuaciones vemos que aún en el caso en que el $\Lambda = 0$, si el término cinemático de backreaction es suficientemente grande (es decir, para una varianza grande de expansión), la aceleración efectiva del Universo puede ser positiva incluso si la aceleración de expansión de todas las regiones locales es negativa.

El formalismo de promediados de Buchert no está libre de dificultades técnicas y conceptuales. En primer lugar, no es claro cómo interpretar observacionalmente las cantidades del formalismo y usualmente se necesitan hipótesis adicionales para hacerlo (Buchert y Räsänen 2012; Heinesen y Buchert 2020). Las ecuaciones escalares de Buchert no constituyen un sistema cerrado, con lo cual debemos suplementarlas con otras condiciones para resolverlas; por ejemplo, se pueden (a) construir modelos fenomenológicos como en Wiltshire (2007b), donde la aceleración del Universo aparece como un efecto aparente de la presencia de promediar regiones densas y vacío, o modelar las inhomogeneidades como un fluido efectivo que se comporta como un campo escalar (Buchert et al. 2006). El formalismo de Buchert tampoco puede incorporar efectos de vorticidad y cizalladura que son necesarios para modelar la etapa de viralización de estructuras a pequeña escala, con lo cual solo puede tratar escalas grandes.

La implementación en los últimos años de simulaciones cosmológicas en Relatividad General sin utilizar aproximaciones Newtonianas (Macpherson et al. 2017) ha permitido analizar mejor los posibles efectos de la curvatura local encontrando variaciones locales al flujo de Hubble del orden del 10% pero ningún efecto apreciable a gran escala (Macpherson et al. 2018). En la actualidad, el consenso de la comunidad cosmológica apunta a que los efectos de *backreaction* no pueden explicar la expansión acelerada del Universo. Los efectos relativistas de curvatura, sin embargo, son importantes de entender para realizar predicciones compatibles con observaciones cosmológicas cada vez más precisas. Algunas de los problemas abiertos del modelo Λ CDM como la discrepancia de la constante de Hubble medida por *planck* y supernovas tipo Ia (Di Valentino et al. 2021) pueden tener su origen en estos efectos relativistas (Heinesen y Buchert 2020). Futuros satélites como *Euclid* podrán poner mejores cotas al origen de la aceleración (Amendola et al. 2018).

— \diamond —

2.3. Dinámica local: de grandes a pequeñas escalas

Hemos discutido en la sección anterior cómo la física en pequeñas escalas puede (o no) influir en la dinámica global cosmológica y los desafíos conceptuales que surgen por la no linealidad de las ecuaciones de Einstein. Discutiremos ahora la contracara de este problema. Como el Universo es un sistema interconectado, lo que ocurre en nuestro entorno, está determinado por las condiciones de contorno que impone la evolución cosmológica. Las condiciones iniciales de nuestro Universo, en efecto, determinan cómo son las propiedades locales que observamos en nuestra galaxia. Un ejemplo notable de esto es la abundancia de elementos livianos — hidrógeno y helio — que surge como resultado de la nucleosíntesis de Big Bang de la expansión del Universo temprano y determina en parte la evolución estelar.

La formación de un sistema gravitatorio local procede del colapso gravitatorio de fluctuaciones primordiales en el Universo. A escalas suficientemente pequeñas, suponemos que los sistemas se desacoplan de la expansión y siguen su propia dinámica. Para modelar estos sistemas gravitatorios, e.g. agujeros negros, consideramos usualmente que estos están aislados de su entorno cosmológico. El espacio-tiempo, sin embargo, es una entidad continua y extendida, con lo cual la interacción gravitatoria sigue hasta infinito. Las condiciones de contorno para un cuerpo gravitatorio deben tener en cuenta entonces la región del espacio-tiempo que lo

rodea, incluso si este puede considerarse en cierto sentido aislado. Definir conceptualmente un sistema aislado es el primer paso para entender la posible influencia de la expansión sobre sistemas locales. Con ello, podemos entender cómo caracterizar las propiedades de este sistema. En las siguientes secciones describimos el problema en detalle e introducimos alguno de los problemas abiertos que trataremos en los siguientes capítulos.

2.3.1. Sistemas relativistas aislados

Para modelar sistemas aislados, tanto relativistas como Newtonianos, debemos imponer condiciones iniciales de contorno adecuadas que reflejen la ausencia de interacciones externas. En la gravitación Newtoniana, la interacción gravitatoria está representada por un solo campo escalar ϕ_N determinado por la ecuación (elíptica) de Poisson:

$$\Delta\phi_N = 16\pi\rho. \quad (2.15)$$

El campo escalar no posee evolución temporal, i.e. es instantáneo, y está determinado localmente por la densidad de la materia junto a condiciones de borde del potencial. Los sistemas aislados se modelan usualmente imponiendo condiciones de decaimiento en infinito, $\phi_N(r \rightarrow \infty) = 0$. Estas condiciones, sin embargo, no se pueden imponer en un contexto cosmológico ya que ρ no tiene soporte compacto, ni tenemos razones para suponer que existe un borde espacial en el Universo. Esta es la principal razón por la cual Newton no aplicó su teoría al Universo como un todo, y una teoría cosmológica solo aparecería con la Relatividad General de Einstein (Ellis y Gibbons 2013, 2015). En simulaciones cosmológicas Newtonianas de formación de estructura, la dinámica global de fondo está fija y el potencial está sujeto a condiciones de borde periódicas, i.e. la dinámica local se estudia en un entorno local del Universo (Buchert 2018).

En Relatividad General las condiciones de contorno son mucho más difícil de tratar dado el aspecto geométrica y libre de estructuras de la teoría. A diferencia de la teoría Newtoniana, las ecuaciones de Einstein se dividen en ecuaciones hiperbólicas de evolución, y ecuaciones de restricción o *constraints*, dados en el formalismo 3 + 1 como:

$${}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} + K^2 - 16\pi\rho = 0, \quad D_j(K^{ij} - h^{ij}K) = 8\pi S^i, \quad (2.16)$$

donde K_{ij} es la curvatura extrínseca, ${}^{(3)}R$ el escalar de Ricci sobre la métrica espacial h_{ab} y S^j la densidad de momentos del tensor de energía-impulso. La Relatividad General posee invarianza ante difeomorfismos, a diferencia de la gravitación Newtoniana, lo cual produce una libertad de gauge que complica el análisis de las condiciones de borde.

Para entender cómo definir un sistema aislado relativista, vale la pena distinguir dos tipos de condiciones inicial que podemos imponer para determinar la evolución del espacio-tiempo: condiciones de Cauchy (Hawking y Ellis 1973; Friedrich y Rendall 1999) y condiciones iniciales de contorno (Friedrich y Nagy 1999). En el problema de Cauchy, se busca analizar la estabilidad y existencia de soluciones fijando la métrica y sus derivadas en una hipersuperficie espacial Σ (de Cauchy) de manera que se cumplan los *constraints*. Fijando condiciones de gauge adecuadas es posible mostrar que las ecuaciones de Einstein se pueden formular de manera fuertemente hiperbólica y presentan soluciones estables (Choquet-Bruhat y Geroch 1969). Por otro lado, el problema de valores iniciales de contorno trata la existencia y estabilidad

de soluciones a partir de valores iniciales prescriptos en una hipersuperficie espacial \mathcal{S} que intersecta una superficie tipo-tiempo \mathcal{T} donde se imponen condiciones de borde. Esto es particularmente importante para la resolución numérica de las ecuaciones de Einstein donde el dominio de la simulación es finito y la estabilidad depende sensiblemente de elegir las condiciones de contorno. Estas dos maneras de resolver las ecuaciones de Einstein reflejan a su vez dos estrategias para modelar un sistema relativista aislado.

En un sentido global, un espacio-tiempo contiene un sistema aislado si la métrica es asintóticamente plana, i.e. si existe una hipersuperficie donde, dado un sistema de coordenadas conveniente, la métrica satisface:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \mathcal{O}(1/r), \quad (2.17)$$

cuando $r \rightarrow \infty$, donde r es una coordenada espacial, y η_{ab} es una métrica de Minkowski. La dirección espacial puede considerarse tanto en dirección de geodésicas tipo luz (asintóticamente Minkowski en infinito nulo) o en dirección de geodésicas espaciales (asintóticamente Minkowski en infinito espacial, i^+). Esta noción puede precisarse de manera geométrica y libre de coordenadas utilizando las técnicas conformes introducidas por Penrose (1965b) y desarrollos por parte de (Bondi et al. 1962), Sachs (1962) y otros. La idea básica para definir un espacio asintóticamente plano es imponer condiciones de borde en infinito que posean propiedades análogas al espacio-tiempo de Minkowski. Para construir una condición de borde en infinito en un espacio-tiempo físico $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{g}})$, consideremos una variedad \mathcal{M} con un borde \mathcal{I} , y una métrica conforme (“no física”) g . Diremos que $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{g}})$ es **asintóticamente Minkowski** en infinito nulo si (Ashtekar 2014; Frauendiener 2004):

- 1 Existe una función suave Ω en \mathcal{M} tal que $\mathbf{g} = \Omega^2 \hat{\mathbf{g}}$ en $\hat{\mathcal{M}}$, donde $\Omega = 0$ en \mathcal{I} y $\nabla_a \Omega \neq 0$ en \mathcal{I} .
- 2 La frontera \mathcal{I} tiene topología $S^2 \times R$.
- 3 $\hat{\mathbf{g}}$ cumple las ecuaciones de Einstein y el tensor de energía impulso rescaleado $\Omega^{-2} T_{ab}$ tiene un límite en \mathcal{I} .
- 4 Las curvas integrales de $\nabla_a \Omega$ son completas en \mathcal{I} .

Mediante estas técnicas conformes podemos entonces tratar al infinito como una superficie en un espacio-tiempo conforme (no físico) y poner así condiciones de borde en el espacio-tiempo físico. Con estas condiciones, \mathcal{I} es una superficie 3-dimensional nula que posee una métrica q_{ab} degenerada con signatura $(0, +, +)$ y un vector normal $n^b = g^{ab} \nabla_a \Omega$. La estructura se mantiene si tenemos en cuenta reescalos del tipo $(q_{ab}, n^b) \rightarrow (\omega^2 q_{ab}, \omega^{-1} n^b)$. Estos reescalos también se pueden pensar como difeomorfismos que cambian la dirección del ángulo en el cual las geodésicas tipo luz se acercan al infinito. En otras palabras, la métrica de Minkowski que se obtiene en infinito depende de la dirección angular. No tenemos entonces un único grupo de simetrías de Poincaré en \mathcal{I} si no la unión (infinita) de todos estos grupos de simetrías.

Este es el grupo de Bondi-Mezger-Sachs (BMS) y se define formalmente como el grupo que preserva la clase de equivalencia de (q_{ab}, n^b) ante reescalos. La rica estructura geométrica de \mathcal{I} y el grupo BMS en espacio-tiempos asintóticamente planos permiten definir consistentemente nociones de energía, momento lineal, y momento angular. La estructura asintótica permite

también definir de manera invariante y en el régimen no-lineal, la presencia de radiación gravitacional a partir del comportamiento del tensor de Weyl. Utilizando la conexión D inducida en \mathcal{I} se puede obtener el tensor *news* de Bondi, N_{ab} , que caracteriza los modos radiativos en \mathcal{I} .

2.3.2. Sistemas relativistas embebidos en un Universo en expansión

Todo sistema físico posee un entorno, i.e. es parte del Universo. Es claro entonces que ningún sistema gravitatorio cumple estrictamente las condiciones asintóticas detalladas arriba. En cosmología esto es particularmente problemático ya que el tensor de energía-impulso no decae suficientemente rápido para establecer condiciones asintóticamente planas. En una métrica de FLRW, por ejemplo, el límite a \mathcal{I} de $\Omega^{-2}T_{ab}$ diverge (Bonga y Prabhu 2020). Ante la ausencia de un fondo asintóticamente plano no es claro cómo definir un sistema aislado ni cómo definir sus propiedades gravitacionales. Como consecuencia del principio de equivalencia, no existe un tensor de energía-impulso gravitacional local conservado (Szabados 2004). La interacción gravitacional se manifiesta mediante fuerzas tidales y *frame-dragging*, con lo cual el intercambio de energía entre el espacio-tiempo y otros sistemas ocurre de manera cuasilocal.

Los flujos de energía y momento están bien definidos y caracterizados en el infinito nulo para un sistema asintóticamente plano. Si queremos enfocarnos en un entorno, debemos analizar los flujos de energía gravitacional a través de superficies cerradas *finitas* que rodeen al sistema. El problema es que la construcción de estas superficies no es única; tampoco existe una única manera de construir el flujo de energía gravitacional en un espacio-tiempo general. En la literatura encontramos diferentes propuestas para definir la energía gravitacional cuasilocal pero ninguna ofrece una solución general al problema. La excepción a esto es cuando la superficie es un agujero negro (más precisamente una superficie marginalmente atrapada); en ese caso, Ashtekar y Krishnan (2003) demostraron que existe un balance bien definido entre el crecimiento del agujero y los flujos de energía gravitacionales y de materia. *En el Capítulo 5 de esta tesis, investigaremos varias maneras de cuantificar la energía gravitacional en cosmología y sus propiedades.*

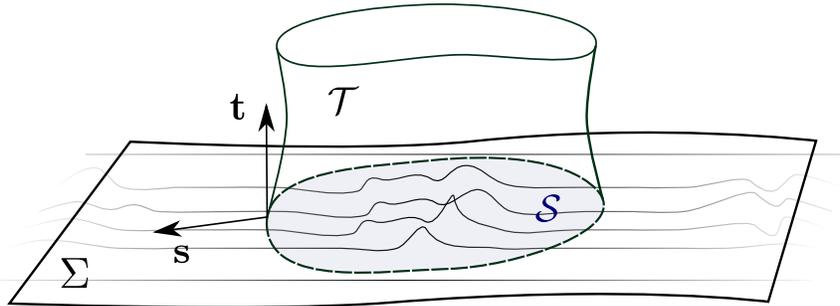


Figura 2.3: Representación de una hipersuperficie espacial Σ perpendicular a una congruencia tipo-tiempo t que define una membrana \mathcal{T} . Esta membrana contiene una región $S \in \Sigma$ que posee una curvatura no nula. Para resolver el problema de valores iniciales de contorno se debe especificar el campo en S e imponer condiciones de contorno en $\mathcal{T} \cap S$.

Si queremos distinguir entre un sistema y su entorno debemos recurrir a una caracterización cuasilocal del sistema y reemplazar el infinito nulo \mathcal{I} por un superficie finita que actúe, a

efectos prácticos, como un infinito efectivo (Ellis 2002, 1984). La idea consiste en encontrar una membrana tipo-tiempo, \mathcal{F}_I , que llamaremos el “infinito-finito” que separe un sistema local de su entorno a partir de condiciones de contorno apropiadas sobre la membrana (ver Figura 2.3). Para construir esta superficie, podemos adoptar los siguientes criterios:

- a) \mathcal{F}_I debe rodear al sistema de interés a una distancia espacial r_* mayor a su tamaño característico.
- b) En un entorno de \mathcal{F}_I , debe existir un sistema de coordenadas pseudo-Minkowskianas tal que $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$, i.e. la superficie debe estar en un entorno aproximadamente plano,
- c) el flujo de materia y radiación a través de \mathcal{F}_I debe estar limitado.

A partir de estas condiciones, podemos formular el problema de valores iniciales de contorno para el sistema y evaluar su evolución, como discutimos en la sección anterior. Por otro lado, las escalas de la superficie \mathcal{F}_I dependen del tamaño del sistema y el tamaño del entorno que estemos considerando. Por ejemplo, para el sistema solar, el infinito-finito se ubica aproximadamente en las nubes de Opik-Oort, donde la interacción gravitatoria del Sol (más los planetas) decrece significativamente pero todavía el resto de sistemas (e.g. alfa centauri se encuentra lejos).

En un contexto cosmológico, todo sistema local está permeado por la radiación del CMB, con lo cual para cumplir la condición (c) la velocidad del sistema con respecto al CMB no puede ser grande; de otra manera, los fotones tendrían una energía considerable y afectarían al sistema. Por otra parte, notemos que la expansión del Universo es fundamental para desacoplar la radiación recibida del CMB (y de todas las fuentes del Universo) de un sistema local ya que la intensidad observada decrece con respecto a la emitida como $I_{\text{obs}} \sim (1+z)^{-4} I_{\text{em}}$. La expansión resuelve la llamada paradoja de Olber: ¿por qué el cielo es oscuro de noche?³. La expansión es esencial para que la temperatura del CMB decrezca de ~ 5000 K, para la cual sería imposible la formación de vida, hasta los ~ 3 K que observamos hoy en día (Ellis 2002).

Los criterios anteriores para definir el infinito-finito son sólo de carácter heurístico y aproximados. Por ejemplo, Wiltshire (2011) ha propuesto una definición alternativa de infinito-finito en términos del valor promedio de la expansión, basado en el enfoque Buchert: el infinito-finito se ubica en la superficie exterior donde $\langle \Theta \rangle = 0$. Una desventaja de esta idea es que se necesita el conocimiento del espacio-tiempo en un volumen y no solamente en la frontera. *En el Capítulo 5 analizaremos cómo definir esta superficie para un sistema local esférico embebido en la expansión.*

Aunque ignoremos la presencia de todos los demás cuerpos, en un universo acelerado donde la constante cosmológica es no nula, la estructura del infinito nulo \mathcal{I} cambia radicalmente: en un espacio-tiempo asintóticamente de Sitter \mathcal{I} es una superficie tipo espacio y no una superficie

³En más detalle, la paradoja consiste en la siguiente aparente contradicción: si cada línea de nuestra visual termina en la superficie de una estrella, el cielo nocturno debería brillar en su totalidad ¿por qué es oscuro? La paradoja fue planteada primero por Loys de Chésasuz en 1744 y luego por Olbers en 1823. Lord Kelvin fue el primero en resolver esta paradoja mostrando que dado que las estrellas tienen un tiempo de vida finito y que están separadas por \sim años luz, estas fuentes luminosas no pueden llenar el cielo por completo. Este resultado sigue valiendo cuando tenemos en cuenta la expansión (Harrison 2001).

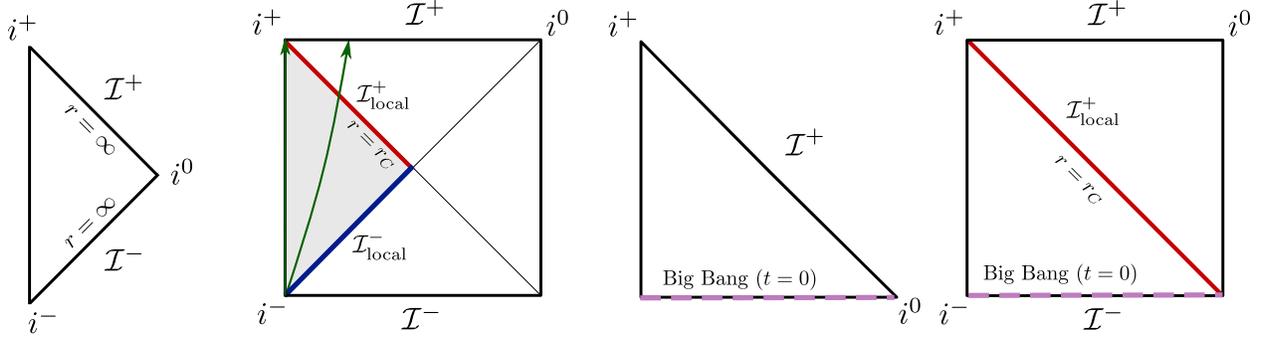


Figura 2.4: **Diagramas conformes** para (a) Minkowski, (b) de Sitter “eterno”, (c) FLRW (desacelerado) y (d) FLRW-de Sitter. En el diagrama (b) de Sitter, $\mathcal{I}_{\text{local}}^+$ corresponde al horizonte de eventos cosmológico, la zona gris es el espacio accesible al observador en el centro; la línea verde corresponde a la trayectoria de una partícula libre que se mueve inercialmente a una distancia del origen.

tipo luz como en un espacio-tiempo asintóticamente Minkowskiano. Esto es consecuencia de la existencia de un horizonte de eventos que separa el universo en distintas regiones causales para cada observador (Penrose 1964). En efecto, dos sistemas inerciales diferentes terminarán en dos puntos separados causalmente en infinito (ver curvas verdes en la Figura 2.4). En Minkowski, por el contrario, dado que \mathcal{I}^+ es tipo luz, los sistemas inerciales pasan por el mismo punto i^+ en infinito.

En de Sitter, dado que \mathcal{I} es una hipersuperficie espacial, el grupo de simetrías asintótico es todo el grupo de difeomorfismos y no el grupo BMS. Este grupo de simetrías en de Sitter es tan general que carece de la estructura necesaria para definir correctamente traslaciones temporales y por lo tanto para definir flujos de energía en infinito (Ashtekar et al. 2015a). En otras palabras, la constante cosmológica, pese a ser muy pequeña, introduce una discontinuidad fundamental entre el caso $\Lambda = 0$ y $\Lambda \neq 0$. El problema fue planteado por Penrose (Penrose 1964) hace décadas, pero ha suscitado un renovado interés en los últimos años a partir de los trabajos de Ashtekar et al. (2016, 2015c,a); Ashtekar y Bahrami (2019). En particular, la caracterización invariante de radiación gravitatoria y sus propiedades en un espacio-tiempo asintóticamente de Sitter es de gran interés en la nueva era de detectores de ondas gravitatorias que pueden observar eventos a distancias cosmológicas.

Una forma de lidiar con el problema es considerar una descripción cuasilocal en lugar de una descripción global. Dado un sistema inercial en de Sitter, existe una región del espacio-tiempo donde podemos definir un vector de Killing tipo-tiempo \mathbf{T} y por lo tanto coordenadas estáticas (la región gris en Fig. 2.4). Esta región está delimitada por un horizonte cosmológico (que coincide con el horizonte aparente), con radio r_C en coordenadas adaptadas al observador. El horizonte cosmológico $\mathcal{I}_{\text{loc}}^\pm$, a diferencia de \mathcal{I}^\pm es una superficie nula, con lo cual permite caracterizar propiedades del sistema contenido (Kolanowski y Lewandowski 2020), ya que separa causalmente la región interior del exterior. Formalmente, el horizonte cosmológico es un horizonte no-expansivo (NEH), cuyas propiedades formales permiten definir flujos de energía gravitacionales (Ashtekar et al. 2022a) e imponer condiciones de contorno; el grupo de simetría sobre esta superficie es una extensión 1-dimensional del grupo BMS (Ashtekar et al. 2022b).

Asintótica en de Sitter vs. Minkowski

Veamos un ejemplo de las diferencias básicas entre un espacio asintóticamente plano y otro asintóticamente de Sitter. La métrica de Minkowski se puede escribir en las llamadas coordenadas nulas, primero transformando la métrica a esféricas y luego transformando como a nuevas coordenadas $u = t - r$ y $v = t + r$. Haciendo otro cambio de coordenadas como $u, v = \tan(U), \tan(V)$, los valores asintóticos que toman los rayos de luz, dados por $u, v \rightarrow \infty$, pasan a segmentos finitos $|U|, |V| \rightarrow \pi/2$. La métrica en estas nuevas coordenadas es:

$$d\hat{s}^2 = \omega^{-2} \left(-dUdV + \frac{\sin(U - V)^2}{4} d\Omega^2 \right). \quad (2.18)$$

En estas coordenadas, la métrica es divergente para $\omega \rightarrow 0$, pero no así su transformación conforme $ds^2 = \omega^2 d\hat{s}^2$. En este espacio conforme, realizando un (último) cambio de coordenadas $T = U + V \in [-\pi, \pi]$, $R = V - U \in [0, \pi]$, tenemos:

$$ds^2 = \omega^2 d\hat{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin(R)^2 d\Omega^2. \quad (2.19)$$

Vemos con esto que que los rayos de luz en el infinito futuro, \mathcal{I}^+ , dados por $T = \pi - R$, forman una superficie 3-dimensional nula ya que $-dT^2 + dR^2 = 0$, y la métrica es entonces degenerada. La naturaleza de esta superficie es distinta en de Sitter.

La métrica de de Sitter en coordenadas globales es:

$$d\hat{s}^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right)^2 (d\chi^2 + \sin(\chi)^2 d\Omega^2). \quad (2.20)$$

Los rayos de luz en esta métrica llegan a infinito cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$. Realizando el reescalado conforme con $\omega = 1/\cosh(\tau/l)$ obtenemos:

$$d\hat{s}^2 \omega^2 = -\frac{l^2}{1 - \omega^2} d\omega^2 + l^2 (d\chi^2 + \sin(\chi)^2 d\Omega^2), \quad (2.21)$$

que está bien definida en $\omega = 0$. El infinito nulo \mathcal{I} , la superficie donde llegan los rayos de luz, definida acá en $\omega = 0$, es entonces tipo espacio.

Para métricas FLRW en universos desacelerados, sin constante cosmológica, no hay horizontes nulos, con lo cual esta estrategia cuasilocal no se puede reproducir. El infinito nulo, sin embargo, es una superficie tipo luz como en Minkowski. pero con un grupo de simetrías ligeramente diferente; en particular en FLRW no existe un álgebra de traslaciones espaciales en \mathcal{I} (Bonga y Prabhu 2020). *Discutiremos estas diferencias entre horizontes nulos en de Sitter y horizontes tipo-tiempo en el Capítulo 5.* En general, la existencia de horizontes cosmológicos depende del modelo global de universo. Los horizontes cosmológicos, si existen, dependen del sistema local considerado a diferencia del horizonte de eventos de un agujero negro, i.e. cada sistema local tiene su propio horizonte cosmológico. En modelos homogéneos para sistemas inerciales, estos horizontes están definidos naturalmente por integrales del factor de escala (ver Sección 1.6.1). Si consideramos un universo más realista con inhomogeneidades o sistemas locales en movimiento con velocidades peculiares, las propiedades del horizonte

cosmológico serán diferentes.

2.3.3. Estructura y entropía

En sistemas ligados embebidos en un entorno cosmológico, la curvatura del espacio-tiempo pasará a estar dominada por los grados de libertad locales de la métrica, representados por el tensor de Weyl. La curvatura de Weyl que no está determinada por la presencia local de materia y es cero en un universo homogéneo de FLRW, e.g. en el Universo temprano. Toda formación de estructura gravitacional está asociada al crecimiento de curvatura local de Weyl, proceso que alcanza su máximo en la formación de un agujero negro. Esto nos lleva naturalmente a relacionar el crecimiento de estructura con el concepto de entropía gravitacional (Wallace 2020). El estado inicial de nuestro Universo es bastante especial ya que para que se den los procesos termodinámicos irreversibles que vemos en nuestro entorno se necesita un estado inicial de baja entropía. El plasma primordial tiene que estar entonces fuera del equilibrio, lo cual es anti-intuitivo a primer instancia. En realidad, lo que se encuentra fuera del equilibrio es de hecho, el espacio-tiempo, i.e. es el espacio-tiempo que posee muy baja entropía inicialmente.

Aunque no conocemos todavía la microestructura del espacio-tiempo, Penrose (2005) conjeturó que el tensor de Weyl podría representar una medida macroscópica de la entropía gravitacional. Existen varias propuestas concretas para construir esta entropía (Clifton et al. 2013) y algunas conjeturas generales basadas en principios holográficos (Bousso 2002), pero no hay una respuesta totalmente satisfactoria en todos los escenarios, excepto en agujeros negros, donde la entropía del campo gravitacional está asociada a su área.

— \diamond —

Pasamos en la siguiente sección a analizar métricas concretas que representan sistemas inmersos en la expansión.

2.4. Métricas inhomogéneas en espacios-tiempos en expansión

Hemos discutido alguno de los problemas conceptuales para cuantificar y caracterizar el efecto de la dinámica del Universo sobre sistemas gravitatorios locales. En esta sección, presentamos soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que modelan un objeto embebido en la expansión. Pese a presentar simetrías, estas métricas son soluciones exactas no lineales y por lo tanto su interpretación física no es trivial. En particular, dada la ausencia de condiciones asintóticas Minkowskianas, es difícil establecer si una solución contiene o no un agujero negro en un sentido global. Comenzamos describiendo el caso más sencillo de un agujero negro para el caso de una constante cosmológica no nula y pasamos luego a describir su generalización más sencilla para un factor de escala arbitrario: la métrica de McVittie.

2.4.1. Agujero negro de Schwarzschild-de Sitter-Kotter y Kerr-de Sitter-Carter

Consideremos un espacio-tiempo que contiene una región $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ esféricamente simétrica sin materia, y con constante cosmológica no nula. A partir de las ecuaciones de Einstein es

posible mostrar a partir del teorema de Birkhoff (generalizado a $\Lambda \neq 0$) (Schleich y Witt 2010; Ellis y Goswami 2013; Hawking y Ellis 1973) que la solución en esta región tiene la forma encontrada por (Kottler 1918):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R} - H^2 R^2\right) dT^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R} - H^2 R^2\right)} dR^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (2.22)$$

Esta es la métrica de Kottler-Schwarzschild-de Sitter. La métrica tiene dos horizontes causales (Stuchlík y Hledík 1999) que podemos encontrar como solución de la ecuación:

$$g_{rr}^{-1} = 1 - \frac{2M}{R} - H^2 R^2 = 0 \quad (2.23)$$

donde, definiendo $\cos(\theta) = -3\sqrt{3}HM$, definimos $R_C := 2\sqrt{3}\cos(\theta/3)/H$ como el horizonte cosmológico y $R_{\text{BH}} = 2\sqrt{3}\cos(\theta/3 + 4\pi/3)/H$ el horizonte de agujero negro. Estas soluciones existen si la masa M es $27M^2H^1 < 1$, es decir si $R_C > R_{\text{BH}}$. Para masas mayores, la solución presenta una singularidad desnuda; el caso extremo se conoce como métrica de Nariai (1950). Esta métrica puede usarse como modelo de juguete para analizar los efectos de la expansión sobre un sistema compacto. En primer lugar, vemos que el horizonte del BH se “estira” por el efecto de la constante cosmológica, $R_{\text{BH}} > 2M$, mientras que el horizonte cosmológico se “achica” por la presencia atractiva del BH, $R_C < 1/H$. También podemos analizar la dinámica de partículas inerciales y cuantificar los efectos de la constante cosmológica con respecto al espacio-tiempo de Schwarzschild (Boonserm et al. 2020).

Las propiedades globales de la métrica muestran que se necesitan dos cartas coordenadas para cubrir el espacio-tiempo entero (Uzan et al. 2011), a diferencia del espacio-tiempo de Schwarzschild-Kruskal. Se puede mostrar que la métrica presenta infinitas regiones donde existe un vector de Killing tipo-tiempo. La métrica se puede extender para un agujero negro rotante como un caso particular de la familia de métricas de Plebansky, encontrada por Carter (2009).

En su forma de Kerr-Schild encontrada por Gibbons et al. (2005), la métrica de Carter-Kerr-de Sitter es

$$ds^2 = ds_0^2 + H(k_a dx^a)^2, \quad (2.24)$$

con la métrica de de Sitter en coordenadas rotantes:

$$ds_0^2 := \frac{\Delta_\theta}{\Xi}(1 - \Lambda r^3/3)d\tau^2 + \frac{\rho^2}{(r^2 + a^2)(1 - \Lambda r^3/2)} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Xi} \sin(\theta)^2 d\Psi^2, \quad (2.25)$$

y el co-vector nulo:

$$k_a dx^a = \frac{\Delta_\theta}{\Xi} d\tau + \frac{\rho^2}{(r^2 + a^2)(1 - \Lambda r^3/2)} dr - \frac{a \sin(\theta)^2}{\Xi} d\Psi. \quad (2.26)$$

La estructura global y los horizontes de esta métrica fueron analizados en detalle por Akcay y Matzner (2011), y comparten similitudes con el caso de Kottler: existe un horizonte cosmológico y un horizonte de agujero negro, como también una ergosfera.

2.4.2. Vacuola de Einstein-Strauss

La forma más simple de construir la métrica de un sistema local embebido en una métrica de FLRW es unir dos espacio-tiempos: uno externo con simetría FLRW y uno interno que representa la inhomogeneidad. Einstein y Straus (1945, 1946) presentaron el primer ejemplo de una métrica con estas características en simetría esférica, uniendo una métrica de FLRW con una métrica interior de Schwarzschild. Para unir estas métricas se pueden utilizar los métodos modernos de Israel (1966) basados en Darmois (1927) que establecen cómo tienen que ser las condiciones de diferenciabilidad a través la hipersuperficie de unión⁴. En simetría esférica, es natural unir dos métricas a través de una hipersuperficie esférica con un radio areal R . Las condiciones de diferenciabilidad en el caso esférico se reducen a exigir continuidad de cuatro escalares (Carrera y Giulini 2010b); en particular, el radio areal y la masa de Misner-Sharp, definida como la cantidad $M := (R/2)(1 + \nabla_a R \nabla^a R)$ deben ser continuos entre las dos partes de la métrica.

La vacuola de Einstein-Strauss queda definida entonces como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)dT^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{R}}dR^2 + R^2d\Omega^2, \quad \text{si } R < R_V(T), \\ &= -dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad \text{si } r = \frac{R}{a(t)} > \frac{R_V}{a(t)} = r_0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde el radio de unión R_V cumple por continuidad de la masa de Misner-Sharp, $M = (4\pi/3)R_V^3\rho(t)$; es decir, el radio se mueve a medida que la densidad evoluciona. Para un modelo cosmológico de polvo donde $a(t)\rho(t) = a_0^3\rho_0$, se puede ver que el radio evoluciona como $R_V = a(t)r_0$ donde $r_0^3 := M/((4\pi/3)a_0^3\rho_0)$. El radio de unión tiene una coordenada FLRW fija r_0 mientras en la métrica interior evoluciona en coordenadas propias siguiendo una geodésica. La superficie de separación con radio R_V en este modelo puede entenderse como una realización explícita de un infinito-finito, que describimos en la sección anterior, en donde se separa la influencia del Universo en expansión y la física local. Esta solución muestra que para el caso esféricamente simétrico la expansión no afecta al entorno local descrito por la solución de Schwarzschild, resultado que podemos entender como un corolario del teorema de Birkhoff.

La solución se puede extender para un número arbitrario de vacuolas en un espacio FLRW de fondo construyendo el llamado modelo de “queso suizo” (Biswas y Notari 2008). Este modelo es útil para investigar la propagación de la luz en un universo en expansión con inhomogeneidades gravitacionales más allá de un modelo perturbativo. También se puede extender utilizando un fondo no homogéneo, c.f. Bonnor (2000). El modelo de Einstein-Strauss tiene varias limitaciones como su inestabilidad ante perturbaciones y su simetría (Mars et al. 2013).

2.4.3. Agujeros negros cosmológicos en un fondo de FLRW

En un fondo con simetría de FLRW con un factor de escala arbitrario, una perturbación puntual con masa M está dada por la métrica $ds^2 = -(1 - 2M/r^2)dt^2 + a(t)^2(1 + 2M/r^2)d^3\vec{x}$.

⁴Para que la unión de dos métricas sobre una superficie Γ resulte en una métrica doblemente diferenciable se exige que la métrica y curvatura extrínseca sean continuas sobre Γ

Este es un modelo razonable para la métrica de un agujero negro si $r \gg 2M$. Supongamos, a diferencia de la vacuola de Einstein, que el plasma cosmológico continua con densidad uniforme a escalas del agujero ¿cómo es la métrica de un agujero negro embebido en este plasma que se expande? Suponiendo simetría esférica, la respuesta no es única porque $T^{ab} \neq 0$ y no vale el teorema de Birkhoff. La primer solución con estas características fue formulada por [McVittie \(1933\)](#). La solución representa una inhomogeneidad en un fondo de FLRW, construida a partir de la solución de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas y realizando la transformación $\vec{x} \rightarrow a(t)\vec{x}$, con lo cual obtenemos:

$$ds^2 = -\frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2}dt^2 + (1+\mu)^4 a(t)^2 d^2\vec{x}, \quad (2.28)$$

donde:

$$\mu = \frac{m}{2a(t)|\vec{x}|}, \quad (2.29)$$

y m es la masa de la fuente central. La métrica tiende a FLRW para $m, |\vec{x}| \rightarrow 0$ y a Schwarzschild de Sitter para $\dot{H}(t) = 0$. El tensor de energía-impulso de esta métrica corresponde a un fluido perfecto que cumple la ecuación de Friedmann uniforme para la densidad:

$$3H(t)^2 = 8\pi\rho(t), \quad (2.30)$$

mientras que la inhomogeneidad de la solución aparece en la presión:

$$8\pi p = -3H^2 - 2\frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}\dot{H}. \quad (2.31)$$

Si $\dot{H} \neq 0$, entonces la presión diverge en $a(t)r = m/2$ para un tiempo t finito. Esta superficie divergente no es solamente una singularidad de coordenadas, si no una singularidad de curvatura que aparece en el escalar de Ricci ([Carrera y Giulini 2010a,b](#)). Pese a su simplicidad, el análisis de la métrica de McVittie presenta numerosos desafíos. [Nolan \(1998\)](#) fue el primero en realizar un análisis detallado de las propiedades de esta métrica, completado/corregido por ([Kaloper et al. 2010](#)) y generalizado por [Carrera y Giulini \(2010a\)](#); [Nandra et al. \(2012\)](#) entre otros.

La característica global más importante de esta métrica es que posee un auténtico agujero negro si el factor de Hubble es constante y mayor que cero en $t \rightarrow \infty$. En ese caso, la superficie $a(t)r = m/2$ es tipo luz y regular en $t \rightarrow \infty$, constituyendo un horizonte de eventos. En el caso de un universo desacelerado donde $H \rightarrow 0$, la superficie $a(t)r = m/2$ es una singularidad tipo luz débil y la métrica no contiene un agujero negro. La métrica tiene dos horizontes aparentes, de agujero negro y cosmológico, que evolucionan en el tiempo y tienden a los horizontes de eventos y cosmológicos respectivamente para $t \rightarrow \infty$. La métrica de McVittie se puede generalizar para masas dependientes del tiempo suponiendo $m = m(t)$. Esta modificación requiere un flujo de calor, T^{0i} , no nulo en el tensor de energía-impulso y puede cambiar la estructura causal del espacio-tiempo ([Maciel et al. 2015](#)) dependiendo de $m(t)$ y $H(t)$.

La métrica de McVittie ha sido objeto de numerosas aplicaciones, análisis y controversia. Otras métricas similares de objetos 'puntuales' en un fondo de FLRW se pueden construir a partir de transformaciones conformes de soluciones estáticas de agujeros negros en donde la métrica cosmológica tiene la forma:

$$g_{ab} = \Omega(t, r)g_{ab}^{\text{Sch}}, \quad (2.32)$$

donde g_{ab}^{Sch} es la métrica estática de Schwarzschild. Estas soluciones no son equivalentes a la métrica de McVittie y se conocen como métricas de [Guha Thakurta \(1981\)](#), redescubierta para un fondo de Einstein-de Sitter por [Sultana y Dyer \(2005\)](#), y tratada en otros trabajos recientes ([Mello et al. 2017](#)).

2.4.4. Lemaitre-Tolman-Bondi

Si mantenemos la isotropía del espacio-tiempo y suponemos que el fluido cosmológico está compuesto por polvo sin presión, la solución más sencilla de las ecuaciones de Einstein está dada por la métrica de Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB). En coordenadas sincrónicas, tenemos:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(\partial_r R(t, r))^2}{1 + 2E(r)} dr^2 + R(t, r) d\Omega^2, \quad (2.33)$$

donde $R(t, r)$ es el radio areal del espacio-tiempo, que sigue una ecuación generalizada de Friedmann:

$$\partial_t R(t, r) = \pm \left(\frac{2m(r)}{R(t, r)} + 2E(r) + \frac{\Lambda R^2}{3} \right)^{1/2}, \quad (2.34)$$

$m(r)$ es la masa de Misner-Sharp, $E(r)$ es una función arbitraria que podemos expresar, sugestivamente, como $2E = -Kf(r)^2$ con $K = \pm 1, 0$, y la densidad obedece la ecuación

$$4\pi\rho = \frac{\partial_r m(r)}{R^2 \partial_r R}. \quad (2.35)$$

Si $\Lambda = 0$, la ecuación de $R(t, r)$ se puede integrar exactamente. Para $E \neq 0$ se obtiene:

$$R = h'(\eta)m(r)f^{-2}, \quad (2.36)$$

donde $h(\eta) = \eta - \sin \eta, \sinh \eta - \eta$ para $\text{signo}(E) = -1, +1$, queda determinado a partir de una función $t_B(r)$:

$$t - t_B(r) = \pm h(\eta)m(r)f^{-3}. \quad (2.37)$$

La solución queda determinada por tres funciones de r arbitrarias, $E(r)$, $m(r)$, y $t_B(r)$. La interpretación de estas tres cantidades es clara. La función $E(r)$ es la curvatura espacial generalizada, que determina además la energía local por unidad de masa del fluido cosmológico; la función $m(r)$ es la energía gravitacional, i.e. la masa de Misner Sharp; por último, la función $t_B(r)$ es el tiempo local en $R = 0$. Esta métrica generaliza entonces el momento del *big bang*, ya que si $t_B(r) \neq \text{constante}$, entonces el *big bang* no es simultáneo en el espacio.

Por su simplicidad, esta métrica tiene un abanico enorme de aplicaciones, desde formación de agujeros negros, cúmulos de galaxia, observaciones de supernova, y modelos de reacción inversa; ver referencias en [Ellis et al. \(2012\)](#). La métrica LTB permite construir modelos cosmológicos de manera directa a partir de cantidades observables como la luminosidad absoluta y la masa por unidad de fuente que determinan la geometría del espacio-tiempo con suposiciones mínimas.

El mayor interés en estos modelos LTB radica en su capacidad para explicar la expansión acelerada del Universo sin componentes oscuras. La presencia de estructuras no-lineales como grandes *voids* permiten ajustar observaciones de supernovas Ia y probar el principio Copernicano, i.e. cuán homogéneo es el Universo observado. Sin embargo, para que estos modelos sean confiables deben también ajustar otras observaciones como perturbaciones del CMB (Zibin, Moss and Scott, 2008, Clifton, Ferreira and Zuntz, 2009) y distribución de materia como el BAO.

3

Dinámica local de observadores cosmológicos



Analizamos la dinámica inercial en el entorno local de un observador que habita un Universo en expansión. Para ello, construimos un sistema de coordenadas que captura los efectos de curvatura locales y nos permite analizar lo que ocurre en su entorno. Comenzamos discutiendo el modelo homogéneo de FLRW y mostramos que la métrica en el entorno local de un observador inercial es esencialmente Newtoniana, i.e. no hay efectos relativistas locales. Mostramos que esta métrica no es un buen modelo para explorar efectos globales en escalas por debajo de la escala de viralización, e.g. en el sistema solar. Luego consideramos un modelo de FLRW con perturbaciones de materia y analizamos cómo influye la rotación de estas inhomogeneidades en la inercia de un sistema local. Mostramos que la rotación de materia induce rotación en los ejes de un sistema inercial por frame-dragging a través de un promedio pesado del momento angular de la materia circundante.



El principio de Mach es una hipótesis, acuñada por Einstein en 1918, que propone que “la inercia de un sistema está determinada por la influencia de todos los cuerpos que lo rodean”. Existen numerosas variantes a esta forma del principio, pero en su concepción más básica sabemos que es falso en Relatividad General: existen soluciones a las ecuaciones de Einstein en las cuales el movimiento geodésico de materia no está determinado por la presencia de otros cuerpos, e.g. la métrica de Goedel, donde la rotación local de sistemas inerciales no está provocada por rotación de la materia si no por la rotación global del Universo (Rindler 2009). Sí podemos distinguir, sin embargo, soluciones Machianas o no Machianas en donde el comportamiento de un sistema inercial está completamente determinado o no por la materia que lo rodea.

Las discusiones acerca del principio de Mach originadas en los albores de la RG resaltan la importancia de entender cómo es el entorno de un sistema inercial. Analizar los efectos locales de la curvatura es de suma importancia en aplicaciones prácticas; en efecto, para realizar observaciones y predicciones desde la Tierra necesitamos un modelo preciso para medir distancias y velocidades teniendo en cuenta el espacio-tiempo curvado. En cosmología los modelos que construimos del Universo sirven para hacer predicciones de lo que ocurre a gran escala, consistentes con observaciones sobre nuestro cono de luz pasado. A partir de estos modelos globales, podemos preguntarnos cuál es su validez y propiedades en escalas

más pequeñas; esto nos puede ayudar a entender conceptualmente cómo están contruidos estos modelos, sus alcances, y producir nuevas predicciones.

El objetivo de este capítulo es investigar cómo es la dinámica inercial de un sistema local que habita un espacio-tiempo cosmológico. Para ello, construiremos un sistema de coordenadas adaptado al entorno local de un observador, las llamadas coordenadas de Fermi, donde la métrica es plana con correcciones de curvatura a segundo orden. De esta manera, podemos cuantificar cómo son los efectos del espacio-tiempo a escalas $\mathcal{L} \ll \text{Riemann}^{-1/2}$, que en nuestro caso corresponden a escalas por debajo de la esfera de Hubble $\mathcal{L} \ll H^{-1}$. Estas coordenadas son importantes para interpretar mediciones de distancia y velocidad en el entorno local ya que se relacionan directamente con observables y por lo tanto fijan completamente el gauge (Dai et al. 2015). Las coordenadas han sido usadas en cosmología para modelos homogéneos con variadas aplicaciones, e.g. para calcular el bias del número de galaxias y los efectos de perturbaciones tidales (Baldauf et al. 2011; Pajer et al. 2013; Dai et al. 2015), para describir el colapso de materia a pequeñas escalas (Creminelli et al. 2010a), efectos de reacción inversa (Baumann et al. 2012) y para describir la dinámica local de sistemas Newtonianos en cosmología (Cooperstock et al. 1998).

En la primer sección analizamos propiedades formales de estas coordenadas para un Universo de FLRW y discutimos se relaciona esta construcción con la aproximación Newtoniana. Mostramos que la “fuerza cosmológica” que aparece en la ecuaciones geodésicas locales tiene una interpretación Newtoniana y no es una corrección relativista como se suele interpretar en la literatura. Mostramos que esta ecuación local es la misma que aparece en simulaciones Newtonianas de N cuerpos pero expresada en otras coordenadas. En la segunda sección analizamos un sistema local en un Universo inhomogéneo de FLRW perturbado por corrientes de materia. Mostramos que las perturbaciones vectoriales inducen *frame-dragging* en el marco de referencia local, y que la velocidad de rotación de estos marcos está determinada por una integral de las corrientes de materia. Por último, analizamos la dinámica local de un Universo inhomogéneo representado por una métrica LTB que describe un Universo que posee una gran *void*. Esta métrica es interesante porque a partir de efectos globales sobre fotones introduce un efecto aparente de expansión acelerada. Veremos, sin embargo, que a diferencia de un Universo con constante cosmológica no nula, no hay efectos locales introducidos por el void. Esto apunta a una posible predicción que ayude a distinguir efectos globales de locales en el Universo.

3.1. Entorno local en un espacio-tiempo homogéneo

En un modelo de FLRW, existe una congruencia fundamental homogénea e isotrópica caracterizada por la congruencia u^a . Esto implica, como vimos en el primer capítulo, que la congruencia tiene vorticidad y aceleración nulas; existe entonces una función potencial escalar t relacionada con el covector de la tetravelocidad, $u_a = -\nabla_a t$. Las superficies $t = \text{constante}$ son ortogonales al flujo de la congruencia y representan el tiempo cosmológico con cual se construye las coordenadas típicas de FLRW (ver Ec. (1.57)) donde cada punto (x, y, z) representa una curva de la congruencia. En cosmología, necesitamos entender cómo se definen distancias e intervalos temporales desde un marco de referencia local para calcular observables. Esto será útil para entender también cómo definir velocidades de sistemas alejados, el concepto

de espacio y expansión, la presencia de inhomogeneidades en escalas locales, y también la aproximación Newtoniana.

Consideremos un sistema de referencia, el “observador”, caracterizado por una tetravelocidad $\mathbf{u}(\tau)$ y una base espacial $\mathbf{e}_{(i)}$. Tomemos el caso de un universo de FLRW y ubiquemos al observador en el centro de coordenadas de la foliación cosmológica siguiendo el flujo cosmológico. Como la congruencia es inercial, el tiempo propio es el tiempo cosmológico $\Delta t = \Delta \tau$. Definir distancias y velocidades es más delicado ya que involucra una operación no local y por lo tanto requiere de especificaciones adicionales. Existen al menos dos maneras naturales de definir distancias cosmológica: (a) entre dos puntos de la foliación $t = \text{constante}$ y (b) entre dos puntos conectados por una geodésica.

Consideremos una métrica de FLRW plana ($k = 0$). La distancia física entre dos puntos de la foliación cosmológica está definida como

$$R = \int_t ds = \int \sqrt{g_{rr}} dr = a(t)r. \quad (3.1)$$

Podemos construir un sistema de coordenadas donde R es la coordenada espacial, con la transformación $dR = \dot{a}r dt + dr a(t)$, lo cual lleva a la métrica a la forma:

$$ds^2 = -(1 - H(t)^2 R^2) dt^2 - 2H(t) R dR dt + dR^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (3.2)$$

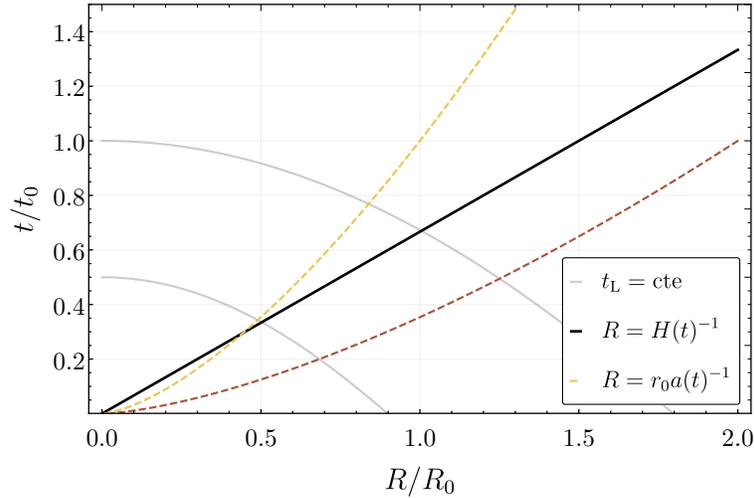


Figura 3.1: Diagrama espacio-temporal en coordenadas (t, R) para un Universo de Einstein-de Sittere. En líneas grises mostramos las superficies de simultaneidad $t_L = \text{constante}$ para un observador local; notemos cómo estas se tuercen al pasado. Dos sistemas inerciales separados comóviles al flujo de Hubble ($r = \text{constante}$) se muestran en líneas punteadas. Estos aumentan su distancia propia a medida que pasa el tiempo. En línea sólida, mostramos el radio de Hubble.

Los sistemas estacionarios en $R = \text{constante}$ tienen una tetravelocidad $u^a(t, R) = \delta_0^a / \sqrt{1 - H(t)^2 R^2}$, y deben permanecer acelerados para no ser arrastrados por la expansión¹. La aceleración, dada por $\dot{u}^a \dot{u}_a = (1 - H(t)^2 R^2)^{-1/2}$, se vuelve infinita para $R \rightarrow H(t)^{-1}$,

¹Notemos que como no hemos cambiado la coordenada temporal, la congruencia definida por la tetravelocidad $v_a = -(dt)_a$ es geodésica.

en la esfera de Hubble y en $R = 0$, la métrica es localmente Minkowskiana. Notemos que la distancia física R está bien definida solamente porque la vorticidad es nula, y por lo tanto existe una foliación global asociada.

Nos interesa ahora construir una foliación para la cual las nociones de distancia y velocidad estén asociadas con observables del marco de referencia local. Para ello, dado un sistema físico que se mueve con una tetravelocidad u^a , podemos construir una hipersuperficie de simultaneidad formada con geodésicas ortogonales a la dirección temporal del sistema. Las coordenadas locales asociadas a esta hipersuperficie son las llamadas coordenadas de Fermi (Manasse y Misner 1963; Ni y Zimmermann 1978; Poisson et al. 2011). En estas coordenadas locales, la métrica es localmente Minkowskiana con correcciones de curvatura de segundo orden para todo tiempo. Resumimos la construcción de este sistema en el siguiente cuadro y relegamos los detalles al Apéndice.

Coordenadas de Fermi

Consideremos una curva tipo-tiempo con tiempo propio τ . La curva $\gamma(\tau)$ transporta una tétrada $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_i\}$, donde su tetravelocidad \mathbf{u} representa el eje temporal y los tres vectores ortonormales \mathbf{e}_i forman el marco de referencia espacial en reposo. La evolución de la tétrada a lo largo de la curva se puede caracterizar por la derivada direccional:

$$u^a \nabla_a e_{\hat{a}}^b = -\Omega_c^b e_{\hat{a}}^c, \quad (3.3)$$

donde el tensor de aceleración

$$\Omega^{ab} = \dot{u}^a u^b - \dot{u}^b u^a + u_c \omega_d \epsilon^{cdab}, \quad (3.4)$$

cuantifica la velocidad angular ω^a y la aceleración del marco. Si $\Omega^{ij} = 0$, decimos que la tétrada sigue un transporte de Fermi-Walker (Mashhoon 2013). Para cada punto $Q(\tau)$ sobre la curva $\gamma(\tau)$, podemos formar una hipersuperficie a partir del conjunto de geodésicas espaciales ortogonales a \mathbf{u} . Utilizaremos estas geodésicas espaciales para construir las coordenadas de Fermi.

Dado un punto P en un entorno normal convexo de $\gamma(\tau)$, existe una única geodesica espacial con vector unitario ξ^a que une P y algún punto $Q(\tau)$ sobre la curva. Las coordenadas de Fermi (t_L, x_L^i) para el punto P están dadas por $t_L = \tau$ y $x_L^i = \sigma \xi^a e_{\hat{a}}^i$, donde σ es la distancia propia de la geodésica que un P y Q . La métrica del espacio-tiempo en estas coordenadas a lo largo de $\gamma(\tau)$ tiene la forma:

$$g_{00} = -(1 + \dot{u}_i x_L^i)^2 + (\epsilon_{ijk} \omega^j x_L^k)^2 - R_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}\hat{j}}(t_L) x_L^i x_L^j + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (3.5)$$

$$g_{0i} = \epsilon_{ijk} \omega^j x_L^k - \frac{2}{3} R_{\hat{0}\hat{j}\hat{i}\hat{k}}(t_L) x_L^j x_L^k + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (3.6)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{l}}(t_L) x_L^k x_L^l + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (3.7)$$

donde definimos:

$$R_{\hat{a}\hat{i}\hat{c}\hat{a}}(t_L) = R_{pqrs} e_{\hat{a}}^p e_{\hat{i}}^q e_{\hat{c}}^r e_{\hat{a}}^s. \quad (3.8)$$

La curvatura está evaluada en el origen y solo depende del tiempo local. La ecuación geodésica en estas coordenadas está dada por:

$$\frac{d^2 x_L^i}{dt^2} + R_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{j}} x_L^j + 2R_{\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{0}} v_L^k x_L^j + \mathcal{O}(v_L^2). \quad (3.9)$$

Si conocemos la métrica global del espacio-tiempo y seleccionamos un dado sistema de referencia, podemos utilizar las coordenadas de Fermi para analizar lo que ocurre en su entorno. Las propiedades derivadas en estas coordenadas geodésicas tienen la ventaja de que están directamente relacionadas con observables y por lo tanto es una manera natural de fijar el gauge del espacio tiempo (Dai et al. 2015). Las coordenadas de Fermi son ampliamente utilizadas para aplicaciones prácticas como geo posición y astrometría Bini et al. (2003); De Felice y Bini (2010) y también en detectores de ondas gravitacionales (Marzlin 1994).

Nuestro objetivo es utilizar esta construcción para analizar lo que ocurre en el entorno de un observador dada una métrica cosmológica. Comenzamos analizando el entorno local de un observador en la métrica de FLRW con las coordenadas de Fermi, obtenidas por primera vez por Cooperstock et al. (1998), discutiendo en particular algunas confusiones que han surgido en la literatura. Consideremos una tétrada $\{\mathbf{e}_{\hat{a}}\}$ asociada a un observador inercial en una métrica de FLRW, dada por

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u} = \partial_t, \quad \mathbf{e}_{\hat{i}} = \delta_{(j)}^i \partial_j (1 + \kappa r^2)/a(t). \quad (3.10)$$

Esta tétrada obedece naturalmente la ecuación de transporte de Fermi-Walker, $De_{\hat{i}}/dt = 0$, i.e. no rota localmente. Debemos calcular las componentes del tensor de Riemann en la métrica de FLRW en el origen de coordenadas y proyectarlas sobre la tétrada. Utilizando (8.15), la métrica en coordenadas de Fermi $(t_L, x_L^1, x_L^2, x_L^3)$ está dada por:

$$ds^2 = -\left[1 - (H(t_L)^2 + \dot{H}(t_L))r_L^2\right] dt_L^2 + \left[\delta_{ij} - \frac{1}{3}(H(t_L)^2 + \frac{k}{a(t_L)^2})f_{ij}\right] dx_L^i dx_L^j, \quad (3.11)$$

donde definimos $f^{ij} := (\delta^{ij} r_L - x_L^i x_L^j)$, que actúa como proyector a la coordenada radial $r_L := \sqrt{x_L^i x_{L,i}}$. Realizando un cambio de coordenadas x_L (topología Cartesianas) a coordenadas esféricas obtenemos la métrica:

$$ds^2 = -\left[1 - (H(t_L)^2 + \dot{H}(t_L))r_L^2\right] dt_L^2 + dr_L^2 + r_L^2 \left[1 - \frac{1}{3}(H(t_L)^2 + \frac{k}{a(t_L)^2})\right] d\Omega^2 + \mathcal{O}(Hr_L)^3. \quad (3.12)$$

que se puede obtener de coordenadas globales directamente por la transformación:

$$t = t_L + \frac{1}{2}H(t_L)r_L^2, \quad r = \frac{r_L}{a(t_L)}(1 + H(t_L)^2 r_L^2). \quad (3.13)$$

Esta es la métrica de un Universo de FLRW en expansión en coordenadas locales alrededor de un observador inercial. En la foliación $t = \text{constante}$, la componente radial $r_L = \text{constante}$ representa una curva geodésica. A primer orden, esta coordenada representa la distancia física entre congruencias $r_L \sim R \equiv ra(t)$, pero se desvía a segundo orden (ver Figura 3.1). Notemos que esta foliación, por la Ec. (3.13), se curva al pasado con respecto al tiempo cosmológico

t a medida que nos alejamos del observador central. Esto muestra que dos observadores cosmológicos alejados entre sí no comparten el mismo marco de referencia local aunque compartan el mismo tiempo propio. Podemos entender esto notando que la métrica de Fermi asociada al observador local es invariante ante rotaciones pero no ante traslaciones; en otras palabras, cada observador posee su propia foliación local en la cual los demás cuerpos celestes se alejan isotrópicamente de su centro. Este concepto es similar a la idea introducida por [Rindler \(1981\)](#) de espacio privado y espacio público de una métrica (ver también [Ellis y Elst \(1999\)](#)).

Las coordenadas de Fermi se pueden escribir de manera exacta si se especifica el factor de escala resolviendo la ecuación geodésica espacial ([Klein y Randles 2011](#)) y obteniendo la foliación entera para $t_L(t, r)$; la Ec. (3.13) es una aproximación a segundo orden de esto. Es posible mostrar que existen un conjunto transformaciones de coordenadas sobre la métrica que mantienen la forma $g_{ab} = \eta_{ab} + |R_{abcd}|\mathcal{O}(X^2)$, pero notamos que las coordenadas resultantes no serán en general geodésicas ([Ip y Schmidt 2017](#)). Por ejemplo, otra realización de un sistema tipo Fermi, presentado por ejemplo en [Baldauf et al. \(2011\)](#) utiliza en cambio coordenadas en donde la métrica se puede escribir de manera diagonal $g_{ab} = -(1 - qH^2|X_L|^2)dt_L^2 + (1 - (1/2)(H^2 + k/a)d^3X_L)$, pero aquí X_L no es una coordenada geodésica como r_L en (3.12). A primer orden en las coordenadas y a segundo orden en la métrica, los dos sistemas son equivalentes.

La dinámica de sistemas inerciales en estas coordenadas está dada por la ecuación geodésica (8.19). Para movimientos radiales, tenemos:

$$\frac{d^2 r_L}{dt_L^2} - (H^2 + \dot{H})(1 - 2\dot{r}_L^2)r_L = 0. \quad (3.14)$$

En un entorno local, la dinámica del Universo influye en cuerpos inerciales con una fuerza cosmológica proporcional a la distancia y dependiente de la aceleración, $\ddot{a}/a = H^2 + \dot{H}$. Notemos que no hemos tomado el límite Newtoniano todavía, solo hemos considerado un entorno lo suficientemente pequeño en donde la interacción gravitatoria es débil con respecto a la curvatura (en este caso, el radio de Hubble $\sim 1/H$). Este tipo de aproximación local se realiza por ejemplo en detectores de ondas gravitacionales, donde la solución es relativista. La aproximación Newtoniana es más restrictiva: necesitamos además que las velocidades sean pequeña o $c \rightarrow \infty$.

Considerando $|\dot{r}_L| \ll 1$ en las ecuaciones de movimiento, obtenemos la ecuación de movimiento Newtoniana en un entorno cosmológico:

$$\frac{d^2 x_L^i}{dt_L^2} = \frac{\ddot{a}(t_L)}{a(t_L)} x_L^i \equiv (H(t_L)^2 + \dot{H}(t_L))x_L^i, \quad (3.15)$$

donde $F^i = \ddot{a}(t_L)/a(t_L)x_L^i$ se denomina usualmente como “fuerza cosmológica”, una modificación a las ecuaciones Newtonianas de movimiento por la expansión del Universo. Esta expresión ha sido utilizada numerosas veces en la literatura relativista para investigar la influencia de la expansión en sistemas locales ([Carrera y Giulini 2010](#)). Incluso se ha aplicado a escalas del sistema solar, e.g. analizando cómo cambian las órbitas de sistemas ligados para distintas fases del Universo. Tomando un modelo cosmológico global Λ CDM, la fuerza cosmológica local estaría determinada, según este modelo, por el factor de escala global $a(t) \propto \sinh(t)^{2/3}$. Mostraremos ahora que este razonamiento es en general incorrecto.

Como discutimos en el capítulo anterior, el factor de escala global aparece como solución a las ecuaciones de Einstein promediadas en una región del espacio-tiempo en donde la materia cosmológica es homogénea. Si la escala local está por debajo de la escala de homogeneidad de la materia, entonces no podemos aplicar la ecuación (3.15) con el factor de escala global. De hecho, la fuerza cosmológica en está exclusivamente determinada por el contenido local de materia y tiene una interpretación puramente Newtoniana, i.e. la interacción gravitatoria está dada por potenciales que obedecen la ecuación de Poisson y no hay efectos de curvatura relativistas en el entorno local cosmológico. Para mostrar esto, mostramos ahora que la métrica local de FLRW corresponde exactamente a un espacio-tiempo en la aproximación Newtoniana. Consideremos para ello una métrica Minkowskiana con una perturbación Newtoniana:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Psi)r^2d^2\Omega + dr^2. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones de Einstein temporales (00) y diagonal (ii), con un fluido perfecto homogéneo y constante cosmológica no nula para esta métrica están dadas por:

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi(p - \frac{\Lambda}{8\pi}), \quad (3.17)$$

$$\nabla^2\Psi = 4\pi(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi}). \quad (3.18)$$

Las ecuaciones para la parte sin traza y las ecuaciones para la parte (0i) no las necesitaremos por ahora. En un entorno local, si los cambios del potencial son del orden del tiempo de Hubble, tenemos que $\ddot{\Phi} \sim (H^2 r_L^2)$, con lo cual podemos despreciar este término con respecto a $\nabla^2\Phi$ y obtenemos, combinando las Ecs. (3.17) y (3.18):

$$\nabla^2\Psi = 4\pi(\rho + 3p) - \Lambda, \quad (3.19)$$

Las soluciones para Ψ y Φ son, suponiendo condiciones de simetría esférica en todo el fluido y regularidad en el origen:

$$\Psi = \left(\frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}\right)\frac{r^2}{4}, \quad \Phi = \left(\frac{4\pi(3p + \rho)}{3} - \frac{1}{3}\Lambda\right)\frac{r^2}{2}. \quad (3.20)$$

donde $f(t, x)$ y $g(t, x)$ son funciones Ahora podemos comparar (3.16) con la aproximación local de FLRW. De esa manera identificamos los potenciales $\Phi = -(\dot{H} + H^2)r^2/2$ y $\Psi = (H^2 + k/a^2)r^2/6$, con lo cual recuperamos las ecuaciones de Friedmann:

$$H(t_L)^2 + \frac{k}{a(t_L)} = \frac{8}{3}\pi\rho + \Lambda, \quad \frac{\ddot{a}(t_L)}{a(t_L)} = -\frac{4}{3}\pi(3p + \rho) + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (3.21)$$

Las ecuaciones de Friedmann en el entorno local equivalen a resolver el potencial gravitatorio de una esfera de densidad de energía uniforme en expansión con la contribución de la constante cosmológica². Definiendo un potencial Newtoniano cuyo Laplaciano sea

²De esta manera, obtenemos de forma relativista el resultado clásico de Peebles (2015), que muestra que las ecuaciones de Friedmann son análogas a las de una esfera de densidad uniforme.

$\nabla^2\Phi_N = 4\pi(\rho + 3p)$ podemos separamos la contribución de la constante cosmológica. La ecuación de movimiento geodésico en la aproximación Newtoniana es:

$$\frac{d^2x_L^i}{dt_L^2} = -\nabla^i\Phi_N + \frac{\Lambda}{3}x_L^i. \quad (3.22)$$

En la aproximación local del modelo de FLRW, el efecto la expansión se manifiesta como una fuerza cosmológica $F^i = \ddot{a}/ax_L^i = -\nabla^i\Phi_N + \Lambda/3x_L^i$ generada por el potencial gravitatorio de una esfera de densidad homogénea contenida en un radio r_L , más la contribución de la constante cosmológica³. La fuerza cosmológica de esta manera surge por el contenido de materia local, lo cual puede no ser evidente si se escribe como $\ddot{a}(t_L)/a(t_L)x_L^i$ (Carrera y Giulini 2010). Si localmente no hay densidad de energía, el modelo predice que la fuerza es cero, i.e. no hay interacciones no locales en una métrica de FLRW; esto surge por la homogeneidad de la solución.

Con la métrica en coordenadas locales, podemos incluir consistentemente perturbaciones de pequeña escala dadas por un potencial $\delta\Phi$:

$$ds^2 = -\left[1 - (H^2 + \dot{H})r_L^2 - 2\Phi\right]dt_L^2 + dr_L^2 + r_L^2\left[1 - \frac{1}{3}\left(H(t_L)^2 + \frac{k}{a(t_L)^2}\right) + 2\Phi\right]d\Omega^2. \quad (3.23)$$

La perturbación puede ser, por ejemplo, producida por una partícula de masa M con $\Phi = M/r^2$ donde $M \ll 1/H$. La ecuación de movimiento para una partícula inercial en este espacio-tiempo es entonces:

$$\frac{d^2x_L^i}{dt_L^2} = \frac{\ddot{a}(t_L)}{a(t_L)}x_L^i - \frac{M}{r_L^3}x_L^i. \quad (3.24)$$

Utilizar la ecuación (3.24) para analizar los efectos de la expansión en nuestro sistema solar tomando M como la masa del sol y $a(t_L)$ el factor de escala cosmológico global no es correcto. El modelo solo sería apropiado si la materia (oscura) cosmológica fuera homogénea a estas escalas. La materia oscura, sin embargo, se agrupa en halos relativamente compactos, que podemos modelar, por ejemplo, con un perfil de densidad de Navarro-Frank-White (Navarro et al. 1997). Tomando un modelo NFW para la Vía Láctea, la densidad de materia oscura en la posición del sistema solar es $\rho \sim 10^{-24}$ (Pitjev y Pitjeva 2013). Esto difiere de la densidad promedio cosmológica, $\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}} \sim 10^{-30}$ gr/cm³, tomando una escala de homogeneidad $\mathcal{D} = 100$ Mpc. Es decir, la ecuación (3.24) podría usarse para modelar los efectos de la materia oscura galáctica en el sistema solar (Pitjev y Pitjeva 2013), pero no para probar los efectos de la expansión global. Aunque existen cotas sobre los efectos de la materia oscura galáctica sobre el sistema solar, el efecto es demasiado pequeño para ser detectado en el futuro cercano. Considerando modelos alternativos para representar los efectos de la materia oscura pueden cambiar estas conclusiones, por ejemplo, en teorías modificadas de la gravitación.

La constante cosmológica sí tiene un efecto a todas las escalas. La influencia de Λ en la dinámica de cuerpos inerciales, desde cúmulos al sistema solar, fue investigada en varios trabajos Nandra et al. (2012); Boonserm et al. (2020); Carrera y Giulini (2010b). En modelos

³Notemos que se cumple el principio de Mach en su sentido más estricto: el movimiento de cuerpos inerciales está determinado directamente por el contenido de materia, mientras que la curvatura espacial no modifica las ecuaciones de movimiento directamente

cosmológicos alternativos a Λ CDM, donde la aceleración del universo es provocada por otro agente, e.g. la presencia de grandes burbujas de baja densidad o campos oscuros (quintesenencia), la influencia local puede ser muy diferente (Creminelli et al. 2010b). Una estrategia para restringir el modelo cosmológico en este aspecto consiste en combinar observaciones locales, donde la constante cosmológica aparece como una fuerza repulsiva en la dinámica local, con observaciones globales donde la constante cosmológica produce un Universo acelerado. Mostraremos en la última sección que existen modelos cosmológicos que producen efectos a gran escala pero ningún efecto en la escala local.

3.1.1. Escalas de homogeneidad

Hemos mostrado que en el modelo de FLRW la fuerza cosmológica está determinada por la densidad de materia local y no por la expansión global. Esta conclusión es válida bajo las importantes restricciones de una métrica homogénea e isotrópica que a escala pequeñas es Newtoniana. El modelo a escalas muy pequeñas falla por que se asume homogeneidad donde la materia y el espacio-tiempo no lo son. Para escalas intermedias donde $L_{\text{hom}} \ll r_L \ll \mathcal{R}_{\mathcal{H}} = 1/H \sim 5$ Gpc, la dinámica está bien descrita por estas coordenadas y podemos utilizar la Ec. de movimiento (3.24). Este es el caso de las simulaciones Newtonianas de N-cuerpos, que simulan la formación de estructura en un cubo de dimensiones pequeñas con respecto al radio de Hubble, discretizando el espacio de fases de las perturbaciones, y suponiendo un fondo homogéneo. Las coordenadas utilizadas en la aproximación Newtoniana son exactamente las coordenadas geodésicas de Fermi (Ehlers 2019) y de esa manera tenemos un mapeo explícito entre la descripción relativista y la aproximación Newtoniana (ver también (Chisari y Zaldarriaga 2011)).

En la literatura, las ecuaciones Newtonianas utilizadas en simulaciones cosmológicas aparecen en diferentes formas y es útil compararlas con la versión (3.24), que suele aparecer en la literatura relativista (Carrera y Giulini 2010). Es usual trabajar en coordenadas comóviles, introduciendo el cambio de coordenadas $x_L^i = a(t_L)x^i$. Para una perturbación generada por una partícula puntual de masa M , las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\ddot{x}^i + 2H(t_L)\dot{x}^i = \frac{Mx^i}{a(t_L)^3x^3}. \quad (3.25)$$

En estas coordenadas vemos que si $M = 0$, entonces las partículas con velocidades iniciales $\dot{x} = 0$ se mantienen en $x^i = \text{constante}$, i.e. comóviles. Consideremos ahora una perturbación general, representada por potencial gravitatorio Φ , y una densidad total ρ en un fondo de FLRW local. En simulaciones Newtonianas de N cuerpos, es conveniente tomar como variable la perturbación al flujo de Hubble, definiendo la velocidad peculiar $v^i \equiv ar_L$ como $r_L^i = Hr_L^i + v^i$. Las ecuaciones de movimiento (3.25) para cada partícula ⁴ quedan expresadas como:

$$\dot{v}^i + H(t_L)v^i = -\frac{1}{a}\nabla^i\Phi, \quad (3.26)$$

donde

$$\nabla^2\Phi = 4\pi(\rho - \frac{1}{4\pi a}\ddot{a}) = 4\pi(\rho - \bar{\rho}), \quad (3.27)$$

⁴Para elementos de fluido las ecuaciones deben tratarse con la derivada total en el tiempo, $\dot{v}^i \rightarrow (\partial_t + v^i\nabla_i)v^j$

y donde $\bar{\rho} = (3/8\pi)(H^2 + k/a(t)^2)$. Notemos que ρ es la densidad total y el factor $\frac{\dot{a}}{a}$ es la densidad de fondo homogénea. Para N partículas discretas, la densidad total es $\rho = \sum m_i \delta(x^i - x_0^i) + \bar{\rho}$, y volvemos a obtener un término de fuerza como en el lado derecho de (3.25). En general es conveniente trabajar con la densidad total porque es una variable conservada, pero este desarrollo muestra explícitamente como entra la contribución del fondo. En algunas derivaciones de las ecuaciones de movimiento Newtonianas en cosmología, el fondo uniforme en expansión está incluido en el potencial Newtoniano, y esto ha llevado a confusiones en la literatura, donde se ha considerado la fuerza cosmológica de la ecuación (3.2), deducida a partir de Relatividad General, como un término “nuevo”. Como hemos visto, esta contribución está presente en las diferentes formas de las ecuaciones de movimiento utilizadas en simulaciones y es esencialmente Newtoniana.

3.2. Efectos de rotación en marcos de referencia locales

Abandonemos ahora la hipótesis de homogeneidad e isotropía, y consideremos la presencia de inhomogeneidades en el Universo, ¿cómo es la inercia de un sistema local en un espacio-tiempo inhomogeneo cosmológico? ¿qué ocurre si la materia en el Universo rota alrededor del sistema local? Según el principio de inercia de Mach, la rotación de marcos de referencia está determinada por el movimiento promedio de rotación de la materia circundante. En Relatividad General, la curvatura del espacio-tiempo induce efectos de *frame-dragging* cuando la materia rota. Estos efectos fueron investigados primero por [Lense y Thirring \(1918\)](#); [Lense \(1918\)](#), quienes mostraron que la rotación propia de un objeto (por ejemplo el Sol) produce un efecto de precesión sobre un objeto cercano (por ejemplo un planeta). Posteriormente, [Brill y Cohen \(1966\)](#) y [Lindblom y Brill \(1974\)](#) consideraron soluciones de esferas rotantes y mostraron que un marco inercial dentro de la esfera tiene una rotación que sigue *exactamente* la rotación de la esfera, sin ningún tipo de retraso temporal.

Aunque este tipo de efectos instantáneos son contraintuitivo en Relatividad General, debemos recordar que es compatible con el carácter no local de los *constraints* en las ecuaciones de Einstein, que se deben cumplir a todo tiempo ([Misner et al. 1973a](#))⁵. Estas soluciones obedecen de manera exacta el principio de Mach en la manera formulada por Einstein. En 1949, [Gödel \(1949\)](#) mostró, sin embargo, que existen soluciones en donde el principio de Mach no se cumple. En esta serie de famosos trabajos, Gödel presentó soluciones cosmológicas de las ecuaciones de Einstein en las cuales todo sistema inercial rota al unísono con una velocidad angular constante. Estas soluciones quiebran el principio de Mach en el sentido que la rotación presente no es relativa al movimiento de la materia: el universo entero está en rotación. La solución de Gödel también posee propiedades peculiares, como la existencia de curvas temporales cerradas, y no es un modelo realista para describir el Universo.

En esta sección nos interesa analizar de qué manera afecta la rotación en un Universo en expansión a la inercia de sistemas inerciales. Trabajos previos como en ([Bičák et al. 2004](#); [Schmid 2006, 2002](#)) trataron este problema en métricas FLRW perturbadas utilizando diferentes métodos y aproximaciones. [Lynden-Bell et al. \(1995\)](#) analizó los efectos de perturbaciones

⁵De manera similar, la parte “Coulombiana” del campo gravitatorio también es instantánea. Es importante notar, sin embargo, que esta parte del campo gravitatorio no puede propagar señales.

axisimétricas en una métrica de FLRW planas, mostrando, como en el trabajo de Brill, que los sistemas inerciales siguen la rotación de la materia instantáneamente. Más tarde, (Schmid 2002) mostró utilizando perturbaciones generales y un formalismo de tétradas que la velocidad angular de los marcos de referencia decae a partir de un radio particular; este trabajo fue generalizado a espacios curvos en (Schmid 2006), y re discutido por Bičák et al. (2004) analizando diferentes elecciones de *gauge*. Uno de los problemas principales para resolver este problema es el de encontrar un buen *gauge* para describir la dinámica local (lo que Bičák et al. (2007) llama un *gauge* “Machiano”). Como hemos discutido en la primer sección de este Capítulo, las coordenadas locales de Fermi ofrecen naturalmente un *gauge* adaptado a un sistema local. El objetivo de esta sección es encontrar las coordenadas locales para una métrica de FLRW con perturbaciones vectoriales. Con ello, analizaremos las restricciones de las ecuaciones de Einstein en el entorno de un observador inercial y obtendremos una expresión para la velocidad del marco local. Discutiremos también como cambia la dinámica de partículas en este caso.

Consideremos ahora que el Universo está descrito por una métrica de FLRW perturbada por la presencia de corrientes de materia que inducen vorticidad en el fluido cosmológico. Para describir esta métrica, recordemos que las perturbaciones cosmológicas se pueden desacoplar en tres sectores: perturbaciones escalares (densidad), perturbaciones vectoriales (vorticidad) y perturbaciones tensoriales (ondas gravitacionales). En esta sección nos centramos en perturbaciones puramente vectoriales. Siguiendo a Bardeen (1980), las perturbaciones vectoriales no cambian la foliación espacio-temporal ya que la componente $\delta g_{00} = 0$, i.e. no hay ambigüedad en el *gauge* temporal. La geometría sobre esa foliación también permanece no perturbada (ver también discusión en Sec III de Schmid (2006)).

La métrica de FLRW perturbada está entonces dada por

$$ds^2 = -dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.28)$$

donde β_i , el vector de *shift*, representa la perturbación de vorticidad, que cumple $\beta_i = a(t)^2 \delta_{ij} \beta^j$ y es solenoidal $\partial_i \beta^i = 0$. Debemos primero construir el marco de referencia local del observador cosmológico en base a un conjunto de tétradas $\{\mathbf{e}_{\hat{a}}\}$. Consideremos un observador inercial en el centro de coordenadas con una tetravelocidad $u^a = \delta_0^a$.

Dada la presencia de corrientes de materia, los ejes espaciales $\mathbf{e}_{\hat{i}}$ del marco de referencia local tenderán a rotar con respecto al espacio-tiempo de fondo. Supongamos que las perturbaciones ocurren en alguna región finita del espacio. En ese caso podemos construir un marco de referencia con ejes espaciales fijos con respecto a alguna dirección del fondo (homogéneo)⁶. De esa manera, la base ortonormal espacial $\mathbf{e}_{\hat{i}}$, y la cobase $\mathbf{e}^{\hat{i}}$, están definida en términos de la base coordenada global como:

$$\mathbf{e}_{\hat{i}} = \partial_0 \frac{\beta_j}{a(t)} + \partial_j \frac{1}{a(t)} \quad \mathbf{e}^{\hat{i}} = dx^i a(t), \quad (3.29)$$

donde se cumple $\langle \mathbf{e}^{\hat{i}}, \mathbf{u} \rangle = e^{\hat{i}}_a u^a = 0$. El movimiento de materia genera una rotación de los ejes con respecto al espacio de fondo. La rotación del sistema se puede caracterizar por el vector ω^a ; utilizando la Ec. (3.3), y teniendo en cuenta que la aceleración es cero, tenemos:

$$e_{f\hat{a}} u^d \nabla_d e_{\hat{c}}^f = -\eta_{\hat{0}\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \omega^{\hat{b}}, \quad (3.30)$$

⁶Operacionalmente, podemos pensar en giroscopios ortogonales que apuntan fijo algún quasar lejano

donde obtenemos a primer orden en β_i :

$$\omega^{\hat{i}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\nabla_{\hat{j}}\beta_{\hat{k}}, \quad (3.31)$$

Para encontrar la métrica en coordenadas locales, primero calculamos el tensor de Riemann a primer orden en las perturbaciones, obteniendo la forma general

$$R_{abcd} = \bar{R}_{abcd} + \bar{g}^{ef}\epsilon_{de}\bar{R}_{abcf} - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{abcd}, \quad (3.32)$$

donde \bar{R}_{abcd} es el tensor de Riemann de la métrica FLRW \bar{g}_{ab} de fondo, ϵ_{ab} encapsula las perturbaciones, y donde definimos:

$$\mathcal{F}_{abcd} := \nabla_a\left(\nabla_b\epsilon_{cd} - \nabla_c\epsilon_{bd} + \nabla_b\epsilon_{bc}\right) + \nabla_b\left(\nabla_a\epsilon_{cd} + \nabla_c\epsilon_{ad} - \nabla_d\epsilon_{ac}\right), \quad (3.33)$$

Luego, proyectamos la tétrada (3.29) sobre el tensor perturbado, y construimos la métrica de Fermi como en la Ec. (8.15). Reordenando los términos de manera compacta, obtenemos:

$$g_{00} = -\left[1 + (H^2 + \dot{H})r_L^2 + r_L^i r_L^j \nabla_i \dot{\beta}_j\right], \quad (3.34)$$

$$g_{0i} = \left[\left(\vec{\omega} + \frac{2}{3}\dot{H}(\vec{\beta} \times \vec{x}_L) + \frac{2}{3}(\vec{x}_L \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{\beta})\right) \times \vec{x}_L\right]_{(i)}, \quad (3.35)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3}H^2 f_{ij} + H(t)\psi_{ij}, \quad (3.36)$$

donde definimos

$$\psi^i_j := x_L^k x_L^l \partial_m \beta_n (\delta_k^m \delta_l^n \delta_j^i - 2\delta_k^j \delta_l^i \delta_n^m + \delta_l^m \delta_k^n \delta_j^i), \quad (3.37)$$

y donde utilizamos la notación vectorial, $\vec{A} := A^i \mathbf{e}_i$, para simplificar las expresiones⁷. Notemos que las cantidades métricas están evaluadas en t_L y en $x_L^i = 0$. Esta es la métrica local de un Universo descrito globalmente por un métrica FLRW perturbada por corrientes de materia.

Analizamos ahora cómo está restringido la velocidad angular \vec{w} por las ecuaciones de Einstein. Para ello notemos que en el entorno local, en campo débil, las ecuaciones de Einstein son análogas a las ecuaciones de Maxwell; esto se conoce como analogía “gravitomagnética”, en la cual las componentes de la métrica se comportan como campos electromagnéticos. En efecto, si escribimos la métrica como:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2\mathcal{A}_i dx^i dt + (\delta_{ij} + 2\psi_{ij})dx^i dx^j. \quad (3.38)$$

podemos definir los campos gravito-eléctricos, $\vec{G} := -\vec{\nabla}\Phi + \delta_t \vec{\mathcal{A}}$, y gravito-magnéticos $\vec{H} := \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}$, análogos a los campos eléctricos y magnéticos en la base $\mathbf{e}_{\hat{a}}$. Siguiendo a (Costa y Natário 2014), las ecuaciones de Einstein a orden lineal en estos campos tienen la forma pseudo-Maxwelliana:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -8\pi(\rho + 3p) - \partial_t^2 \psi^i_i, \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = -\partial_t \vec{H}, \quad (3.39)$$

⁷En índices, tenemos $\epsilon_{ijk}\omega^{(j)}r_L^k + \frac{2}{3}\dot{H}\epsilon_{ilm}r_L^m(\epsilon_{ljk}\beta^{(j)}r_L^k) + \epsilon_{ijk}r_L^k(r_L^m\nabla_m)(\epsilon_{jln}\nabla^l\beta^{(n)})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -16\pi\vec{J} + 4\partial_t\psi_j^{[j,k]}\mathbf{e}\mathbf{e}_{\hat{k}}, \quad (3.40)$$

más la parte espacial de las ecuaciones que no necesitaremos aquí (ver Ec. (140) en [Costa y Natário \(2014\)](#)). Nos interesa de estas ecuaciones analizar las restricciones a la velocidad angular y su relación con el momento angular de la materia que perturba el espacio-tiempo. Queremos analizar entonces la ecuación de *constraints* para el campo gravito-magnético. Suponiendo que nos mantenemos a segundo orden en $H^2 r_L$, podemos despreciar la derivada temporal de ϕ y obtenemos una ecuación de restricción análoga a la ecuación de Ampere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (3.41)$$

donde $\vec{J} \equiv T_i^{\hat{0}}$ es la corriente de materia. En el caso de la métrica cosmológica local, el potencial vector gravitatorio es:

$$\vec{A} = \left(\vec{\omega} + \frac{2}{3}\dot{H}(\vec{\beta} \times \vec{x}_L) + \frac{2}{3}(\vec{x}_L \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{\beta}) \right) \times \vec{x}_L. \quad (3.42)$$

Aplicando el rotor dos veces sobre el potencial vector y utilizando identidades vectoriales, obtenemos una ecuación para $\vec{\beta}$.

$$\nabla^2 \vec{\beta} - 4\dot{H}\vec{\beta} = -16\pi\vec{J}. \quad (3.43)$$

La solución para β queda determinada utilizando la función de Green de Yukawa (con signo negativo):

$$\vec{\beta}(t_L) = -4 \int d^3r \vec{J}(r, t_L) \frac{e^{-\lambda r}}{r}, \quad (3.44)$$

donde definimos la longitud de onda $\lambda = \sqrt{-4\dot{H}a(t)}$. La rotación de un marco inercial local queda luego determinada por el rotor de $\vec{\beta}$, que aplicado dentro de la integral determina la velocidad angular:

$$\vec{\omega}(t_L) = 4 \int d^3r \frac{\vec{L}}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \quad (3.45)$$

En esta ecuación, la corriente de materia está dada por el momento del fluido cosmológico proyectado en el marco de referencia local, $T_0^{\hat{i}} = (\rho + p)v^{\hat{i}}$ y donde $\vec{L} := (\vec{r} \times \vec{J})$ representa el momento angular. La dinámica de partículas en este sistema de referencia, tomando la aproximación de bajas velocidades, está dada por:

$$\frac{d^2 \vec{x}_L}{dt_L^2} = (\dot{H} + H^2)\vec{x}_L + \frac{d\vec{x}_L}{dt} \times \vec{\omega}. \quad (3.46)$$

donde ahora tenemos un término extra que tiene en cuenta el movimiento en rotación del sistema.

En acuerdo con el principio de Mach, la rotación de los marcos de referencia está entonces determinada *instantáneamente* por una integral sobre el momento angular de la materia, y amortiguada por un radio $r_M = 1/\lambda$; la materia fuera de este horizonte apenas contribuye a la rotación. Para un universo del tipo $a(t) = t^\alpha$, el radio está dado por $\lambda = 2\sqrt{\alpha}/H$, es decir, proporcional al radio de Hubble (para un universo de FLRW plano). La principal ventaja del enfoque que seguimos en esta sección es que las cantidades involucradas no tienen libertades

de gauge ya que al mapear al sistema de Fermi *aislamos* los observables locales. En caso contrario, la libertad de gauge de las perturbaciones puede introducir varios problemas de interpretación; por ejemplo, [Bičák et al. \(2007\)](#) desarrolla una serie de *gauges* en busca del más conveniente para tratar la dinámica local. Por otra parte, nuestros resultados están limitados a perturbaciones dentro del horizonte, pero el efecto de amortiguación muestra que más lejos la rotación de la materia influiría muy poco sobre la rotación de los ejes inerciales.

— \diamond —

En la última sección de este capítulo nos centramos en soluciones cosmológicas no lineales que representan modelos de Universo inhomogéneos.

3.3. Efectos locales vs. efectos globales de la expansión acelerada

La presencia de la constante cosmológica en el modelo Λ CDM predice, para la etapa actual del Universo, que el espacio-tiempo se expande de manera acelerada, afectando el corrimiento al rojo de los fotones que recibimos de fuentes lejanas. El corrimiento al rojo de supernovas tipo Ia es la principal evidencia que tenemos de una constante cosmológica no nula, y constituye un efecto global de la expansión acelerada. Si las ecuaciones de Einstein deben ser modificadas con esta constante, entonces cabe preguntarnos si existen efectos *locales* de la constante cosmológica, es decir efectos sobre la estructuras que se forman en el Universo.

3.3.1. Colapso de halos y constante cosmológica

Cuando la materia colapsa y forma un objeto ligado, este objeto colapsado crece acretando material de su entorno. Para colapso de halos masivos, es razonable usar la aproximación de simetría esférica. Una capa esférica de material que se expande inicialmente con el flujo de Hubble y rodea una sobredensidad, sufrirá la atracción gravitacional del objeto colapsado, decelerando su expansión hasta que la capa de material llega a un radio de *turn-around* R_{TA} , deja de expanderse, cambia su velocidad, y colapsa hacia el objeto central. Una forma simple de estudiar este problema es bajo la aproximación de simetría esférica en el régimen no lineal Newtoniano, válido a escalas pequeñas y lejos del horizonte de Hubble. La estructura colapsa hasta alcanzar una escala de viralización, donde relajación violenta de la materia induce vorticidad en el fluido que detiene su colapso por rotación.

Las escalas características del colapso y el radio de *turn-around* dependen de la sobredensidad inicial de la región, que se puede calcular a partir de la evolución de fluctuaciones primordiales en el régimen de perturbaciones lineales. Cuando la perturbación en el régimen lineal evoluciona hasta exceder un valor crítico δ_{cr} , valor que no depende de la masa total, entonces el objeto ha colapsado ([Dodelson y Schmidt 2020](#)). Con esta información podemos calcular la abundancia de cúmulos de galaxia a un dado tiempo construyendo la función de masa, es decir, la fracción de la masa de halos que colapsaron de una dada masa a un dado tiempo cosmológico; esto se conoce como el formalismo de Press-Schechter ([Press y Schechter 1974](#)).

La presencia de la constante cosmológica modifica la dinámica local como vimos más arriba, y por lo tanto la evolución de las sobredensidades en un Universo en expansión. Si

consideramos una capa de materia esférica que se mueve bajo la atracción gravitatoria de una región colapsada con masa M , la evolución para el radio de este cascarón de materia sigue una ecuación Newtoniana modificada por la constante cosmológica similar a como vimos en la Sección 3.1:

$$\frac{d^2 r_L}{dt^2} = -\frac{M}{r_L^2} + \frac{\Lambda}{3} r_L, \quad (3.47)$$

donde $M = (4/3)\pi r_L^3 a \bar{\rho} \delta$. Con esta ecuación, basados en los resultados de [Gunn y Gott III \(1972\)](#), [Lahav et al. \(1991\)](#) investigaron la influencia de la constante cosmológica en el colapso esférico encontrando que Λ tiene un efecto pequeño en las densidades críticas. La razón es que a tiempos tempranos, la contribución de Λ es subdominante ya que el fondo homogéneo está dominado por materia mientras que a tiempos tardíos, la región es muy masiva para ser afectada por Λ . Pese a que la densidad crítica no cambia demasiado, la constante cosmológica introduce un *radio máximo de turn-around* ([Pavlidou y Tomaras 2014](#)). En un universo sin constante cosmológica, los halos pueden seguir creciendo en tamaño sin límites. En un modelo con constante cosmológica, a medida que el cascarón de material, atraído por la sobredensidad, crece en tamaño, el efecto de la fuerza cosmológica asociada a Λ va creciendo ya que la materia dentro del cascarón decae como $a(t)^{-3}$. Si el efecto de la constante cosmológica iguala al de atracción por la sobredensidad antes de llegar a R_{TA} , el cascarón de material se expandirá con el Universo y no colapsará. Existirá entonces un último cascarón de material que logra alcanzar su radio de *turn-around* y entonces la masa contenida en este cascarón será la masa final de esa estructura. Otros cascarones de materia circundante serán atraídos por la sobredensidad pero la fuerza producida por la constante cosmológica será mayor y evitará que se ligue con el sistema. Esto define un tamaño final del halo que podemos calcular muy fácilmente de (3.47) imponiendo la condición $\ddot{r}_L = 0$, con lo cual obtenemos un radio máximo:

$$r_L^C(M) = \left(\frac{3M}{\Lambda} \right)^{1/3}. \quad (3.48)$$

La influencia local de Λ en los tamaños de sistemas astrofísicos fue tratada por varios autores, c.f. [Lahav et al. \(1991\)](#); [Pavlidou y Tomaras \(2014\)](#); [Lahav \(2020\)](#); [Nandra et al. \(2012\)](#). Recientemente, [Pavlidou y Tomaras \(2014\)](#) propusieron usar este radio máximo como test local para determinar el valor de Λ observando el tamaño y masa de halos en el Universo cercano. Si el modelo Λ CDM es correcto, entonces ningún sistema puede superar el radio (3.48). [Tanoglidis et al. \(2015\)](#) mostraron luego que la mejor escala para observar posibles violaciones a esta cota es con halos de $M \sim 10^{13}$ masas solares. A partir de simulaciones numéricas, [Korkidis et al. \(2020\)](#) mostraron que los efectos de no esfericidad pueden cambiar la cota del radio máximo en un 20% (ver también [Del Popolo et al. 2020](#)) Las cotas para el radio parecen estar en acuerdo con la constante cosmológica y este test local puede servir para descartar teorías muy diferentes a Λ CDM.

3.3.2. Entorno local en un espacio-tiempo LTB

Un modelo alternativo popular de la aceleración del Universo propone que la existencia de un gran *void* en nuestro entorno cambia radicalmente los efectos dinámicos de la expansión ([Ellis et al. 2012](#)). Los fotones que viajan en esta inhomogeneidad son afectados por la curvatura espacial negativa que produce un efecto aparente de aceleración. Para representar

esta situación física podemos utilizar la métrica de LTB, que discutimos en el capítulo anterior. Los efectos globales de esta métrica se han analizado en numerosos trabajos y todavía está abierto el debate si estos modelos pueden explicar la aceleración del universo junto con los otros constraints observacionales (García-Bellido y Haugbølle 2008). En esta sección analizamos cómo es la dinámica local en la métrica de LTB que representa un gran *void*. En particular, nos interesa saber si los efectos locales son similares al de una constante cosmológica no nula (como en la ecuación (3.47)) o si, por el contrario, estos están ausentes en estos modelos. Consideremos entonces la métrica de LTB:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'(t,r)^2}{1 - \mathcal{E}(r)} dr^2 + R(t,r)^2 d\Omega^2. \quad (3.49)$$

Por las ecuaciones de Einstein $R(t,r)$ tiene la siguiente solución paramétrica:

$$R(t,r) = \frac{M(r)}{2\mathcal{E}(r)r^2} (\cosh \eta(t,r) - 1) \quad \sinh \eta(t,r) - \eta(t,r) = \frac{(2\mathcal{E}(r)r^2)^{3/2}}{M(r)} (t - t_b(r)). \quad (3.50)$$

La solución depende de tres funciones arbitrarias, $M(r)$, $t_b(r)$ y $\mathcal{E}(r)$. Para asegurar que el modelo sea homogéneo e isotrópico se exige que $t_b(r) = 0$ (Ellis et al. 2012). Para evitar singularidades por cruzamiento de líneas donde ya no vale más la aproximación Newtoniana exigimos además $\partial_r \mathcal{E}(r)r^2 > 0$ (Hellaby y Lake 1985). Para relacionar estas fórmulas con el formalismo usual en FLRW podemos utilizar las funciones:

$$M(r) = \Omega_M(r) H_0(r)^2 r^3, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{E}(r) = \Omega_K(r) H_0(r)^2 r^2, \quad (3.52)$$

$$H_R(r,t) = \frac{\partial_r \partial_t R(t,r)}{\partial_r R(t,r)}, \quad H_T(t,r) = \frac{\partial_t R(t,r)}{R(t,r)}, \quad H_0(r) = H_T(t_0, r), \quad (3.53)$$

donde $\Omega_K + \Omega_M = 1$ actúan como densidades de curvatura y materia, t_0 es el tiempo presente, H_T representa la función de Hubble transversa, H_R la función de Hubble radial. La aceleración de la parte transversal y radial está relacionada por:

$$\frac{2}{3}(\dot{H}_T + H_T^2) + \frac{1}{3}(\dot{H}_R + H_R^2) = -\frac{4\pi}{3}\rho. \quad (3.54)$$

y la ecuación de restricción

$$H_T^2 = \frac{M(r)}{R(t,r)^3} - \frac{\mathcal{E}(r)}{R(t,r)^2}. \quad (3.55)$$

El factor de expansión total del espacio tiempo es $H = (H_R(t,r)H_T(t,r))^2)^{1/3}$. Estas funciones pueden ser ajustadas para coincidir con diferentes observaciones resolviendo la ecuación geodésica. Ajustando la densidad de materia y el factor de Hubble podemos generar soluciones que representan grandes *voids* alrededor de un punto de simetría. En ese caso, la solución estaría dada por una gran subdensidad que aproxima a la métrica de FLRW a grandes escalas y tiempos tempranos. Nos interesa entender qué efectos locales ocurren dentro del void.

Obtenemos ahora la aproximación de esta métrica inhomogénea alrededor de un sistema de referencia inercial que caracterizamos por la tétrada:

$$\mathbf{u} = \partial_t, \quad \mathbf{e}_1 = (g_{rr})^{-1/2} \partial_r, \quad \mathbf{e}_2 = (g_{\theta\theta})^{-1/2} \partial_\theta, \quad \mathbf{e}_3 = (g_{\phi\phi})^{-1/2} \partial_\phi. \quad (3.56)$$

Las coordenadas x_L^i en el entorno local son coordenadas Cartesianas (holónomas) en las direcciones que localmente marcan las tétradas esféricas⁸. Si cambiamos el punto de origen, entonces el sistema pierde la simetría esférica. El sistema siempre tiene simetría axial en la dirección radial. Calculando las componentes del tensor de Riemann y proyectando las tétradas obtenemos la métrica para un observador en $r = r_0$. Como sabemos que la métrica tiene simetría cilíndrica sobre la dirección radial original del espacio tiempo podemos hacer un cambio a coordenadas cilíndricas; para comparar con la métrica realizaremos en cambio un cambio a esféricas obteniendo:

$$g_{TT} = -1 + \left[\left(\dot{H}_T + H_T^2 \right) \cos^2 \Theta + \left(\dot{H}_R + H_R^2 \right) \sin^2 \Theta \right] \rho^2, \quad (3.57)$$

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad (3.58)$$

$$g_{\Theta\Theta} = 1 - \frac{1}{3} \left(H_T^2 + \frac{\mathcal{E}}{R^2} \right) \rho^2, \quad (3.59)$$

$$g_{\Phi\Phi} = \left[1 - \frac{1}{3} \left(\left(H_T H_R + \frac{\mathcal{E}'}{2RR'} \right) \sin^2 \Theta + \left(H_T^2 + \frac{\mathcal{E}}{R^2} \right) \cos^2 \Theta \right) \rho^2 \right] \rho^2 \sin^2 \Theta, \quad (3.60)$$

donde todos los términos están evaluados en $r = r_0$ y dependen del tiempo t_L .

Notemos las similitudes con la métrica local de FLRW. En la parte temporal de la métrica, la aceleración de la expansión aparece naturalmente dividida en su contribución radial y transversal. Cuando el sistema yace sobre $\Theta = 0$, los efectos gravitatorios de la expansión se manifiestan a través de la aceleración radial de la expansión dada por la derivada del factor de Hubble transversales H_T , mientras que en $\theta = \pi/2$ tenemos los efectos de aceleración radiales, H_T . Para $\Theta = 0$, de hecho, la forma de la métrica es exactamente análoga a la métrica de FLRW local, con $\mathcal{E}(r)/R^2$ cumpliendo el rol de la curvatura.

Consideremos ahora puntos cercanos al centro de simetría de una región esférica que puede por ejemplo representar un void. En ese caso podemos expandir las funciones $\Omega_M(r)$ y $H_0(r)$ alrededor de $r = 0$. Al primer orden no nulo tenemos para la masa y la curvatura:

$$\mathcal{E}(r) = H_0(0) \Omega_K(0) r^2 + \mathcal{O}(r), \quad M(r) = H_0^2(0) \Omega_M(0) r^3 + \mathcal{O}(r^3). \quad (3.61)$$

Debemos ahora expandir el factor de escala $R(t, r)$ cerca del origen para obtener los parámetros de Hubble transversales y radiales:

$$R(t, r) = a(t) r \left(1 + \frac{1}{2} b(t) r^2 + \mathcal{O}(r^3) \right). \quad (3.62)$$

donde definimos $a(t) := \partial_r R(t, r = 0)$. Con ello, calculando directamente, podemos ver que a primer orden en r , los factores de Hubble son:

$$H_T(t, r) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \left[1 + \frac{1}{2} (b'(t) - b(t)) \right], \quad H_R(t, r) = \frac{a(t)}{a(t)} \left[1 + (b'(t) - b(t)) \right]. \quad (3.63)$$

⁸Remarcamos que las direcciones son ortonormales y las coordenadas locales son Cartesianas, pese a ser construidas localmente con una tétradas esféricas.

Con estas expresiones, evaluamos directamente la métrica en el centro de simetría, $r = 0$; de esa manera, obtenemos una expresión equivalente a la métrica local de FLRW:

$$ds^2 = - \left[1 - (H_T^2 + \dot{H}_T) r_L^2 \right] dt_L^2 + dr_L^2 + r_L^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(H_T^2 + \frac{H_0(0)\Omega_K(0)}{a(t_L)^2} \right) \right] d\Omega^2. \quad (3.64)$$

En el origen, por la ecuación (3.54), la aceleración está dada por una ecuación análoga a Friedmann:

$$H_T^2 + \dot{H}_T = -\frac{4\pi}{3} \rho_M(t, 0). \quad (3.65)$$

mientras que el factor de escala queda determinado por la Ec. (3.55). La fuerza cosmológica en el centro de simetría, $F = (H_T^2 + \dot{H}_T) \rho$ cerca del origen queda determinada entonces por la densidad de materia local sin contribuciones adicionales, lo cual vale para regiones pequeñas con respecto al tamaño de la curvatura.

La aceleración aparente del Universo en la métrica LTB aparece al integrar la ecuación geodésica de los fotones que pasan por regiones de baja y alta densidad que imprimen sobre ellos un corrimiento al rojo característico de una expansión acelerada. A diferencia del caso de un universo de FLRW con constante cosmológica, estos efectos desaparecen a distancias pequeñas. Los efectos de la subdensidad actúan como un término de curvatura espacial. Vemos con este sencillo ejercicio que podemos tener espacio-tiempos en los cuales los efectos globales difieran radicalmente de los efectos locales.

3.4. Conclusiones

En este capítulo, analizamos la dinámica local de un observador que habita un espacio-tiempo en expansión. Para aislar los efectos locales de la expansión global, construimos coordenadas válidas en un entorno del observador, las llamadas coordenadas de Fermi, en las cuales la métrica es Minkowskiana con correcciones de curvatura de segundo orden. Estas coordenadas forman una foliación en la cual las hipersuperficies de simultaneidad se construyen con geodésicas espaciales ortogonales a la tetravelocidad. A partir de esta construcción analizamos tres espacio-tiempos cosmológicos: un Universo de FLRW homogéneo, un Universo perturbado por corrientes de materia, y un Universo inhomogéneo LTB. Las conclusiones más destacadas de este capítulo son:

- Mostramos que el marco de referencia local de un observador cosmológico difiere para distintos observadores alejados entre sí. Esto se manifiesta en que las ecuaciones de movimiento geodésico en coordenadas locales no son invariantes ante traslaciones. Cada observador en su sistema local observa los demás cuerpos inerciales alejándose isotrópicamente de su centro.
- En la aproximación Newtoniana, aparece una fuerza cosmológica proporcional a la distancia que depende de la aceleración y no de la expansión en sí. Esta fuerza tiene un carácter Newtoniano en el sentido que surge del gradiente de un potencial Poissoniano. En otras palabras, mostramos que esta fuerza es el resultado de la interacción gravitatorio de una esfera de densidad uniforme y no de la expansión del espacio. Mostramos esto demostrando que la métrica local de FLRW tiene una forma típicamente Newtoniana.

Argumentamos que esta fuerza cosmológica no puede ser utilizada en escalas por debajo a la escala de homogeneidad, como el sistema solar, para realizar predicciones locales de la expansión global.

- En la Sección 3.3, discutimos la aproximación local para un observador en un Universo de FLRW perturbado por corrientes de materia. Consideramos un observador inercial que se mantiene con ejes espaciales fijos; por las corrientes de materia, los ejes espaciales tienden a rotar con lo cual el observador tiene una velocidad angular no nula.
- Deducimos la forma local de la métrica en términos de coordenadas de Fermi a orden lineal en la perturbación para un observador rotante. La métrica resultante tiene una forma particular de campo débil en la cual las ecuaciones de Einstein se pueden escribir de manera análoga a las ecuaciones de Maxwell. A partir de las ecuaciones, mostramos que la velocidad angular del observador esta determinada *instantáneamente* con una integral del momento angular de la materia; la expansión del Universo introduce un amortiguamiento exponencial con escala característica al radio de Hubble.
- En la Sección 3.3.2, analizamos la estructura local del espacio-tiempo inhomogeneo LTB que es utilizado para modelar la expansión acelerada a partir de subdensidades (*voids*) y sin constante cosmológica. Derivamos la forma local de estas coordenadas y mostramos que los efectos inerciales aparecen divididos en componente transversal y radial. Mostramos que para sistemas en el centro de simetría, las ecuaciones de movimiento locales no difieren de un sistema en FLRW sin constante cosmológica.

4

Expansión y cuerpos rígidos relativistas

— \diamond —

Analizamos el concepto de expansión y rigidez en espacio-tiempos curvos. Comenzamos para ello definiendo el concepto de expansión y de rigidez. Mostramos que un sistema rígido está sobre restringido en Relatividad General por la estructura causal del espacio-tiempo. Para entender mejor qué tipos de movimientos rígidos admite la teoría, probamos una serie de teoremas que generalizan resultados conocidos en espacio-tiempos planos a espacio-tiempos máximamente simétricos.

— \diamond —

La imagen mental usual que tenemos de la expansión cosmológica es la de un globo que se infla; las galaxias viven en su superficie y la distancia entre ellas aumenta en el tiempo. En esta analogía, el *espacio* mismo está representado por el globo. Esta representación conceptual es útil para interpretar el corrimiento al rojo como resultado de la expansión, pero no es totalmente satisfactoria en el contexto de la Relatividad General. En primer lugar, la analogía presenta al espacio como una entidad absoluta y única. El sistema físico real, sin embargo, es el espacio-tiempo. El espacio en Relatividad General depende de la forma (arbitraria) en que elijamos nuestra variable temporal, es decir, depende de la foliación que elijamos. Un ejemplo claro de esto aparece en el Universo de de Sitter: en el marco de referencia de la congruencia cosmológica, las distancias espaciales entre dos puntos de la foliación crecen exponencialmente, con coordenadas adaptadas dadas por:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\sqrt{\Lambda/3}t} dx^3, \quad (4.1)$$

Si cambiamos de sistema de referencia, sin embargo, existe una foliación estacionaria en donde las distancias permanecen constantes y el espacio-tiempo es estático:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right)dT^2 + \frac{dR^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}R^2} + R^2 d\Omega^2. \quad (4.2)$$

La interpretación de la expansión es importante para entender el corrimiento al rojo de las galaxias: ¿es este un efecto de la velocidad de recesión o de la expansión misma del espacio? ¿es importante esta distinción? Las diferentes interpretaciones del efecto Doppler en este contexto surgen porque no hay una manera única de definir la *velocidad* de un sistema

físico alejado (que emite el fotón) si el espacio-tiempo tiene curvatura (Kaiser 2014). Si la curvatura es no nula, los sistemas de referencia inerciales en diferentes puntos del espacio-tiempo no son equivalentes. En esta línea, Bunn y Hogg (2009) argumentan que no hace falta introducir la idea de expansión para interpretar el efecto Doppler; en cambio, proponen que el corrimiento al rojo se puede entender de manera puramente cinemática construyendo una familia de observadores inerciales a lo largo del camino del fotón, ver también Peebles (2015); Chodorowski (2011). Esta interpretación resalta la idea de que siempre existe un entorno Minkowskiano alrededor de un marco de referencia. Synge (1960) presentó un argumento similar al desarrollar su fórmula clásica de corrimiento rojo (ver (1.50)) al notar que el tensor de Riemann está ausente en esta fórmula. La curvatura del espacio-tiempo, sin embargo, está presente de manera implícita en el transporte paralelo para definir las velocidades relativas (Kaiser 2014). En efecto, en el entorno del observador siempre es posible definir una velocidad relativa que se puede descomponer en una parte gravitacional y una parte cinemática (De Felice y Clarke 1992a).

Otras investigaciones reevalúan la idea de expansión analizando el movimiento de partículas en métricas de FLRW. Peacock (2002) y Whiting (2004) muestran que una partícula que es largada desde el reposo en el marco de referencia local de un observador cosmológico no se une al flujo de Hubble y por lo tanto la idea de expansión del espacio no es satisfactoria. Otras reinterpretaciones de este comportamiento, sin embargo, muestran que el concepto de expansión sigue siendo significativo en este contexto (Grøn y Elgarøy 2007; Davis et al. 2003). Notemos que hemos hablado de universos homogéneos hasta ahora; ante la presencia de inhomogeneidades, el corrimiento al rojo ya no se puede interpretar de manera puramente cinemática (Kaiser 2014).

Entender el significado de la expansión es importante para una correcta interpretación de las observaciones cosmológicas y para ganar claridad conceptual sobre la dinámica del espacio-tiempo. Uno de los focos de la discusión está en distinguir los efectos cinemáticos (movimiento de los sistemas) de los efectos dinámicos (efectos de la curvatura). Las diferentes interpretaciones del efecto Doppler que mencionamos anteriormente resaltan que en Relatividad General, estas nociones están entrelazadas de maneras no triviales. En este capítulo, nos interesa ahondar en esta discusión a través del concepto complementario a la expansión: el de cuerpo rígido. Buscaremos responder si *es posible formar un sistema rígido en un universo en expansión*. Para ello definiremos cuidadosamente el concepto de espacio y de cuerpo rígidos que, como veremos, está muy restringido por la estructura causal del espacio-tiempo. El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 4.1 presentamos el concepto general de espacio y sistemas rígido de Born. Mostramos una serie de teoremas que muestran cuán restringidos están estos sistemas en espacios-tiempo máximamente simétricos, generalizando resultados ya obtenidos en Minkowski. Luego mostramos cómo se pueden construir cuerpos rígidos explícitamente a través de coordenadas geodésicas. En la Sección 4.1.3 introducimos el concepto de rigidez cuasilocal, una generalización del concepto de rigidez de Born, y sus propiedades. Luego mostramos aplicaciones en un universo de FLRW mostrando que construir un sistema rígido no es posible excepto en algunos modelos específicos. Mostramos fácilmente que cualquiera de estos espacio-tiempos admiten sistemas cuasilocalmente rígidos.

4.1. Sistemas rígidos en relatividad

Un cuerpo rígido es un sistema físico que no puede ser deformado, es decir, un cuerpo en el cual las distancias entre sus partes permanecen constantes. En la física Newtoniana, la rigidez está bien definida y es esencialmente no local; por ejemplo, si empujamos un cuerpo rígido, cada parte debe moverse de manera que las distancias permanezcan invariables. Esto implica que la interacción entre todas las partes debe ser instantánea, i.e. la velocidad del sonido es infinita. En la Relatividad, esto está prohibido por la estructura causal del espacio-tiempo, es decir, nada puede moverse más rápido que la luz. Como señala Pauli, es natural introducir el concepto de movimiento rígido, mientras que el concepto de cuerpo rígido no tiene sentido en Relatividad. En este capítulo, cuando nos referimos a un cuerpo rígido, nos referimos a un cuerpo que mantiene un movimiento rígido. Nos interesa saber si es posible concebir sistemas que se mueven rígidamente en el espacio-tiempo.

En 1909, pocos años después de que Einstein presentara su teoría de la Relatividad Especial, Max Born propone la primera definición de rigidez relativista (Born 1909). Born muestra en este primer trabajo que es posible formular un concepto invariante de movimiento rígido de Lorentz, pero contrario a la física Newtoniana, cada parte del cuerpo tiene que acelerar a diferentes velocidades para mantenerse rígido. Ese mismo año, Paul Ehrenfest se dio cuenta que la geometría intrínseca de un cuerpo rígido que rota con velocidad angular constante no es Euclidiana (Ehrenfest 1909). Este *gedankenexperiment* fue crucial para el desarrollo de la Relatividad General de Einstein, donde el propio espacio-tiempo tiene una geometría pseudo-Riemanniana (Stachel 1980). En presencia de curvatura, un sistema rígido tiene que acelerar para evitar deformarse ante las fuerzas de mareas. Esto es posible si la interacción gravitatoria no es extrema; por ejemplo, en el interior de agujeros negros, no es posible mantener en general un volumen constante. Comencemos definiendo el concepto de rigidez de Born en notación moderna.

4.1.1. Rigidez de Born

Consideremos un sistema relativista representado por una congruencia \mathcal{C} en un un modelo de espacio-tiempo (g_{ab}, \mathcal{M}) . Como vimos en 1.2, este vector permite definir una métrica espacial, $h_{ab} := g_{ab} + u_a u_b$ en \mathcal{C} . Para analizar cómo evoluciona el sistema en el *espacio*, consideremos un vector conector ξ^a en la congruencia, que se encuentra en el espacio ortonormal de u^a , es decir, $h_b^a \xi^b = \xi^a$. Por definición, este vector ξ^a es transportado por Lie a lo largo de la congruencia:

$$(\mathcal{L}_u \xi)^a = u^b \nabla_b \xi^a - \xi^b \nabla_a u^b = 0. \quad (4.3)$$

Definimos ahora una distancia propia l dentro del sistema como

$$l^2 := g_{ab} \xi^a \xi^b \equiv h_{ab} \xi^a \xi^b, \quad (4.4)$$

es decir, la norma del vector conector en el marco de referencia de la congruencia (De Felice y Clarke 1992b). La evolución de la longitud con respecto a la congruencia viene dada por la derivada covariante de la distancia l en dirección de u^a , que podemos desarrollar como:

$$u^a \nabla_a l^2 = u^a \nabla_a (g_{cb} \xi^c \xi^b) = 2u^a \xi^b \nabla_a \xi_b = 2\xi^b \xi^a \nabla_a u_b, \quad (4.5)$$

y aplicando la descomposición de $\nabla_a u_b$ en (1.13) del Capítulo 1, obtenemos:

$$u^a \nabla_a l^2 = 2 \left(\sigma_{ab} + \frac{1}{3} \Theta h_{ab} \right) \xi^a \xi^b, \quad (4.6)$$

que implica, a su vez, que el cambio relativo de distancias está dado por:

$$(u^a \nabla_a l)/l = \sigma_{ab} e^a e^b + \frac{1}{3} \Theta, \quad (4.7)$$

donde $e^a := \xi^a/l$ es el vector unitario espacial. Por lo tanto, para que la longitud espacial de un cuerpo no cambie con el tiempo necesitamos que tanto la cizalladura σ_{ab} como la expansión Θ sean cero, i.e. que no haya deformaciones ni expansiones en el sistema. Esto se puede codificar en un tensor de expansión $\Theta_{ab} = \sigma_{ab} + (1/2)\Theta h_{ab} = 2\nabla_{(a} u_{b)}$. Este concepto de rigidez, se conoce como *rigidez de Born* (Born 1909):

Rigidez de Born : un sistema físico representado por una congruencia \mathcal{C} con tetravelocidad u^a en un modelo de espacio-tiempo arbitrario (\mathcal{M}, g_{ab}) , es rígida en el sentido de Born si las distancias espaciales ortogonales a u^a no cambian a lo largo de la congruencia, es decir, si $u^a \nabla_a l = 0$ en la Ec. (4.7) .

Existen varias definiciones equivalentes en la literatura de rigidez de Born (c.f. Pirani y Williams (1961); Giulini (2006)), que presentamos a continuación para comodidad del lector:

- (A) El tensor de expansión de la congruencia es cero, $\Theta_{ab}(u^c) = 0$, lo que implica inmediatamente que la expansión y la cizalladura son cero, $\Theta(u^c) = 0$ y $\sigma_{ab}(u^c) = 0$.
- (B) La derivada de Lie a lo largo de la congruencia de la métrica espacial definida localmente en cada punto del sistema es cero, $(\mathcal{L}_u h)_{ab} = 0$.
- (C) En un sistema de coordenadas adaptado, $\{T, X^i\}$, la métrica espacial es independiente del tiempo, $\partial_T h_{ij} = 0$.
- (D) La derivada covariante de la tetravelocidad está determinada por la vorticidad y la aceleración como

$$\nabla_b u_a = \omega_{ab} - \dot{u}_a u_b, \quad (4.8)$$

o, tomando directamente el anticonmutador en la Eq. (1.13) y usando la definición (A):

$$\dot{u}_{(a} u_{b)} + \nabla_{(b} \dot{u}_{a)} = 0. \quad (4.9)$$

La condición de Born impone así seis ecuaciones diferenciales parciales independientes a las tres componentes independientes de la tetravelocidad. Debido a la dependencia de h_{ab} con u_a , las ecuaciones son no lineales. Dado que este es un sistema sobre-restringido, es decir, seis restricciones para tres componentes, se pueden derivar ecuaciones de integrabilidad. Siguiendo a Pirani y Williams (1961), tomando u^a , ω_{ab} y \dot{u}_a como variables, uno puede derivar un conjunto de ecuaciones para sus primeras derivadas en términos de combinaciones algebraicas de estas variables. En la física Newtoniana, como es bien sabido, un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad, lo que significa que podemos mantener un cuerpo en un estado rígido

bajo cualquier traslación o rotación (Epp et al. 2009a). En un marco relativista, dado que carecemos de un marco absoluto donde todos los eventos sean simultáneos, los movimientos rígidos están limitados por la estructura causal del espacio-tiempo; esto se refleja en las ecuaciones sobre-restringidas de Born. De hecho, para algunas transformaciones, mantener la rigidez de un cuerpo extendido puede requerir velocidades superlumínicas de algunas de sus partes. El tipo de transformaciones que mantienen la rigidez depende también fuertemente del espacio-tiempo de fondo.

En un espacio-tiempo con simetrías, existen direcciones preferentes, caracterizadas por los vectores Killing de la métrica. Un vector de Killing tipo tiempo T^a genera una congruencia preferencial con tetravelocidad $u^a := T^a ||T||^{-1}$. En ese caso, se dice que la congruencia sigue un movimiento isométrico (*Killing motion*). Existe una conexión directa entre simetrías y movimientos rígidos de una congruencia dada por el siguiente teorema (presentado en Pirani y Williams (1961) que rederivamos en nuestra notación):

Teorema I. Cualquier congruencia \mathcal{C} en un espacio-tiempo general que sigue un movimiento isométrico u^a es rígido.

Prueba. Si u^a es un movimiento isométrico, entonces $u^a = T^a ||T||^{-1}$, donde T^a es un vector Killing y $||T||$ su normalización. Así tenemos que el covector de Killing es $T_a \equiv ||T|| u_a$. Usando esta expresión en las ecuaciones de Killing para T_a y desarrollando las derivadas tenemos:

$$\left(\nabla_{(a} ||T|| \right) u_{b)} + ||T|| \nabla_{(b} u_a) = 0, \quad (4.10)$$

y si contraemos con u^b , obtenemos:

$$(u^b \nabla_b ||T||) u_a - \nabla_a ||T|| + ||T|| \alpha_a = 0. \quad (4.11)$$

nuevamente con u^a obtenemos $u^b \nabla_b ||T|| \equiv 0$, lo que implica de la Ec. (4.11):

$$\dot{u}_a = \frac{\nabla_a ||T||}{||T||}. \quad (4.12)$$

Insertando esto en la ecuación. (4.10), tenemos:

$$||T|| \left(\dot{u}_{(a} u_{b)} + \nabla_{(b} u_a) \right) = 0, \quad (4.13)$$

y como $||T|| \neq 0$, esto significa que el flujo de Killing obedece las ecuaciones de rigidez de Born (ver definición (D)).

Un corolario importante inmediato se deriva de este teorema.

Corolario I. Dada una congruencia rígida en un espacio-tiempo arbitrario con tetravelocidad u^a , la congruencia es un flujo isométrico si y solo si se cumple la siguiente relación:

$$\nabla_{[a} \dot{u}_{b]} = 0. \quad (4.14)$$

Prueba. Si la congruencia rígida sigue un movimiento isométrico, la tetravelocidad obedece la Eq. (4.12) del Teorema I, y por lo tanto, $\dot{u}_a = \nabla_a \Phi$, donde definimos el escalar $\Phi := \log(\|T\|)$. De esta forma la Ec. (4.14) se cumple trivialmente. Por otro lado, si tenemos una congruencia rígida con una tetravelocidad que obedece a $\nabla_{[a}\alpha_{b]} = 0$, entonces su aceleración es una diferencial exacta, lo que significa que $\alpha_a = \nabla_a \Phi$. Con esto, y la condición de rigidez $\alpha_{(a}u_{b)} + \nabla_{(b}u_{a)} = 0$, recuperamos la ecuación de Killing siguiendo el camino inverso de la derivación en el Teorema I

Notemos que del Teorema I, dados dos vectores Killings $T_{(1)}^a$ y $T_{(2)}^a$, la tetravelocidad formada por la combinación lineal de estos, $u^a := (\alpha T_{(1)}^a + \beta T_{(2)}^a) \| \alpha T_{(1)}^a + \beta T_{(2)}^a \|^{-1}$ representa un movimiento rígido si u^a es tipo-tiempo. En general, un movimiento isométrico no es geodésico, incluso en el espacio-tiempo de Minkowski (ver próxima sección). Por otro lado, de la Ec. (4.9), los movimientos rígidos se pueden clasificar como rotacionales, $\omega_{ab} \neq 0$, o irrotacionales, $\omega_{ab} = 0$. El movimiento de rotación está fuertemente restringido por las condiciones de integrabilidad para cuerpos rígidos (cf. Ecuaciones (4.2) y (4.3) en Pirani y Williams (1961)). Mostraremos ahora que para espacio-tiempos máximamente simétricos, de Sitter, anti-de Sitter, y Minkowski, en cuatro dimensiones, es posible derivar una condición importante de no deformabilidad. Probamos el siguiente teorema:

Lema (Condición de Ehrenfest) Dado un cuerpo rígido con tetravelocidad u^a en un espacio-tiempo máximamente simétrico, la derivada de Lie sobre la congruencia de la vorticidad es cero:

$$\mathcal{L}_u \omega_{ab} = 0, \quad (4.15)$$

Demostración. La demostración es una generalización a espacio-tiempos máximamente simétricos de la demostración de Pirani y Williams (1961) para espacio-tiempos planos. Consideremos la derivada de Lie de la conexión Levi-Civita sobre u^a . Usando la definición de Derivada de Lie, por cálculo directo, tenemos:

$$\mathcal{L}_u \Gamma_{ab}^c = \nabla_b \nabla_a u^c + R_{abk}^c u^k. \quad (4.16)$$

Tomando el conmutador de esta expresión, es fácil mostrar que:

$$2\nabla_{[d} \mathcal{L}_u \Gamma_{a]b}^c = \mathcal{L}_u R_{bad}^c. \quad (4.17)$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de la vorticidad:

$$\omega_{ab} := h_a^{a'} h_b^{b'} \nabla_{[b'} u_{a']} = h_a^{a'} h_b^{b'} \Gamma_{[a'b']}^k u_k, \quad (4.18)$$

si aplicamos dos veces el proyector h_b^a sobre la ecuación (4.17), teniendo en cuenta la condición de rigidez como $\mathcal{L}_u h_b^a = 0$, obtenemos:

$$\mathcal{L}_u \left(\omega_{ab} \omega_{cd} + \perp R_{abcd} \right) = 0, \quad (4.19)$$

donde $\perp R_{abcd}$ es el tensor de Riemann proyectado en h_{ab} . Si consideramos un espacio-tiempo máximamente simétrico, entonces

$$R_{abcd} \equiv C_0 (g_{ab} g_{cd} - g_{ac} g_{bd}), \quad (4.20)$$

con C_0 una constante, con lo cual tenemos que $\mathcal{L}_{u^\perp} R_{abcd} = 0$ para movimientos rígidos (ver definición (B)):

$$\mathcal{L}_u \left(\omega_{ab} \omega_{cd} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Esto implica, desarrollando la derivada y contrayendo con ω^{ab} que:

$$\omega^2 \mathcal{L}_u \omega_{cd} + \omega_{cd} \omega^{ab} \mathcal{L}_u \omega_{ab} = 0. \quad (4.22)$$

Si ahora volvemos a (4.21) y contraemos con h^a_d y h^b_c , por la condición de rigidez tenemos:

$$\omega^{ab} \mathcal{L}_u \omega_{ab} = 0. \quad (4.23)$$

Suponiendo que $\omega^2 \neq 0$, usamos la ecuación anterior en (4.22) y obtenemos lo que buscábamos

$$\mathcal{L}_u \omega_{ab} = 0 \quad (4.24)$$

Observaciones: Este lema implica que no podemos poner en rotación un cuerpo rígido en reposo sin deformarlo. Debido a esto, se suele afirmar que un cuerpo rígido relativista en un espacio-tiempo plano tiene solo tres grados de libertad en lugar de seis como en el caso Newtoniano. Un teorema importante con respecto a este tipo de movimientos rígidos de rotación en Minkowski fue probado por [Herglotz \(1910\)](#) y [Noether \(1910\)](#) quienes demostraron que todo movimiento rígido de rotación en Minkowski es necesariamente un movimiento isométrico. Con el resultado anterior, podemos generalizar este teorema a un espacio-tiempo máximamente simétrico fácilmente

Teorema II (Herglotz-Noether) Una congruencia que sigue a un movimiento rígido de rotación en un espacio-tiempo máximamente simétrico es un flujo isométrico.

Demostración Usando la definición del tensor de Riemann,

$$\nabla_a \nabla_b u_c - \nabla_b \nabla_a u_c = R^k_{cba} u_k, \quad (4.25)$$

proyectando sobre u^a y tomando la parte antisimétrica, tenemos explícitamente:

$$u^c \nabla_c \omega_{ab} = u^c \nabla_c (\dot{u}_{[a} u_{b]}) + \nabla_{[b} \dot{u}_{a]} - \dot{u}^c \omega_{c[a} u_{b]}. \quad (4.26)$$

Ahora, multiplicando por ω^{ab} , usando el Lema I, y la antisimetría de la vorticidad, tenemos:

$$\omega^{ab} \nabla_{[b} \dot{u}_{a]} = 0. \quad (4.27)$$

Esto implica que un movimiento rígido rotante tiene, en general, $\nabla_{[b} \dot{u}_{a]} = 0$, así que por el Corolario I, esto implica que el movimiento rotacional rígido es un movimiento Killing.

Los resultados que hemos presentados se restringen a métricas máximamente simétricas. En espacios-tiempos arbitrarios, sin embargo, podrían existir movimientos rígidos de rotación sin seguir un flujo isométrico.

4.1.2. Construcción de un sistema rígido

La curvatura del espacio-tiempo tiende a modificar las distancias entre sistemas geodésicos, e.g. en el paso de una onda gravitatoria o en un universo en expansión. Por lo tanto podemos pensar a la rigidez como una propiedad bastante particular de un sistema y, como hemos visto en la sección anterior, muy restringida. Por otro lado, los sistemas rígidos constituyen un marco de referencia natural. Cualquier marco inercial en Minkowski es un sistema rígido. Sin embargo, si el marco de referencia está en un estado de movimiento arbitrario, la rigidez se mantendrá sólo si se cumplen las condiciones de los teoremas anteriores. Como mostramos en el Teorema I, las simetrías del espacio-tiempo permiten construir marcos rígidos preferenciales con los vectores Killing asociados. Por ejemplo, un *boost* de Lorentz a lo largo del eje X con un vector Killing asociado $\xi_{(x)} = x\partial_t + t\partial_x$, generará un movimiento de Killing *acelerado* definido por una tetravelocidad $u^a = \xi^a / \|\xi^a\|$. Se puede demostrar que la congruencia seguirá una trayectoria hiperbólica, con aceleración constante en la dirección del boost, que nos da el marco de referencia de Rindler como veremos más abajo.

Mostraremos ahora cómo podemos construir congruencias rígidas en un espacio-tiempo de Minkowski utilizando coordenadas geodésicas o coordenadas de Fermi, ya presentadas en el capítulo anterior. Dada una curva tipo-tiempo $x^a(\tau)$ con tetravelocidad u^a , aceleración arbitraria α^a y velocidad angular ω^a , consideremos la clase de geodésicas tipo espacio ortogonales a $x^a(\tau)$ para cada evento τ sobre la curva. Esta clase de geodésica forma localmente una hipersuperficie, donde podemos definir un sistema de coordenadas único $\{T, \vec{X} = X^i\}$, alrededor de la curva (ver Apéndice A). En el espacio-tiempo de Minkowski, el sistema de coordenadas asociado con una curva tipo tiempo arbitraria es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} dx^a dx^b \\ &= - \left[(1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{X})^2 - (\vec{\Omega} \wedge \vec{X})^2 \right] dT^2 + 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{X})^2 \cdot d\vec{X} dT + \delta_{ij} dX^i dX^j. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Una congruencia estacionaria compuesta de curvas que permanecen en $\vec{X} = \text{constante}$, tiene una aceleración y rotación dependientes del estado de movimiento de la curva central en $\vec{X} = 0$. La tetravelocidad de esta congruencia estacionaria a la foliación es:

$$u^a = \delta_0^a \left((1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{X})^2 - (\vec{\Omega} \wedge \vec{X})^2 \right)^{-1/2}. \quad (4.29)$$

Dado que las distancias geodésicas $\|\vec{X}\|$ no cambian en un espacio-tiempo plano, cualquier congruencia compuesta de curvas en una esfera de radio $\|\vec{X}\| = R_0$ será rígida si la rotación de la congruencia es constante en el tiempo. Podemos entonces construir cualquier sistema rígido con seis parámetros, dados por $(\vec{\alpha}, \vec{\Omega})$. Si primero consideramos el caso de un sistema no-rotante, $\vec{\Omega} = 0$, la métrica asociada a esta congruencia es:

$$ds^2 = -(1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{X})^2 dT^2 + \delta_{ij} dX^i dX^j. \quad (4.30)$$

Es fácil mostrar usando Ecs. (4.30) y (4.29) que la métrica espacial inducida, $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$, no cambia en el tiempo y de hecho es Euclídea, $h_{ab} \equiv \delta_{ab}$. Así, un marco de referencia rígido acelerado con tetravelocidad $u^a = \delta_0^a \left((1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{X}) \right)^{-1}$ sufre dilataciones temporales entre sus partes, es decir, corrimiento al rojo gravitacionales, pero su espacio

local sigue siendo Euclidiano. Las coordenadas (4.30) son las conocidas coordenadas de Rindler en la forma derivada por Möller Misner et al. (1973a) y corresponden, como vimos anteriormente, a las coordenadas asociadas a un flujo de Killing.

El sistema está bien definido siempre que $(1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{X}) > 0$ para que u^a sea tipo-tiempo. Cada parte de la congruencia, para mantener la rigidez, debe tener diferentes aceleraciones dependiendo de la distancia al sistema central en $\vec{X} = 0$ y la aceleración central $\vec{\alpha}$. Las partes del sistema que están detrás de la dirección de la aceleración tienen que acelerar más que las partes que están delante. El tamaño del sistema está así limitado por la aceleración central y la estructura causal del espacio-tiempo. Para este marco, aparece naturalmente un horizonte, es decir, el horizonte de Rindler, limitando donde la congruencia acelerada mantener tener una expansión nula (esto es un horizonte de Killing). Esto es relevante para el análisis del efecto Unruh en la teoría cuántica de campos (Crispino et al. 2008). El horizonte corresponde a un horizonte de Killing (el vector de Killing correspondiente al *boost* es nulo allí) y surge por la rigidez de la congruencia, no exclusivamente por la aceleración. Si construimos una congruencia donde cada curva tiene una aceleración constante, es posible mostrar que la congruencia resultante tiene una expansión no nula (Combi y Romero 2017).

En el caso de un sistema rígido rotante, es fácil mostrar a partir de (4.28) que la métrica del espacio inducido no es plana debido al término cruzado $2(\vec{\Omega} \wedge \vec{X})^2 \cdot d\vec{X}dT$. Tomando la tetravelocidad (4.29), y una velocidad de rotación en el eje Z, $\vec{\Omega} = \Omega\partial_z$, la métrica espacial de un sistema rígido giratorio en coordenadas cilíndricas es:

$$h_{ij}dX^i dX^j = dz^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2}{1 - \rho^2\Omega^2}d\phi^2, \quad (4.31)$$

que no es Euclidiana. Esta fue la observación de Ehrenfest en su trabajo previo a que Einstein formulara la Relatividad General. Si la rotación depende del tiempo, entonces la derivada de Lie de la métrica espacial no es cero y el sistema no puede mantener la rigidez general (ver Lema I).

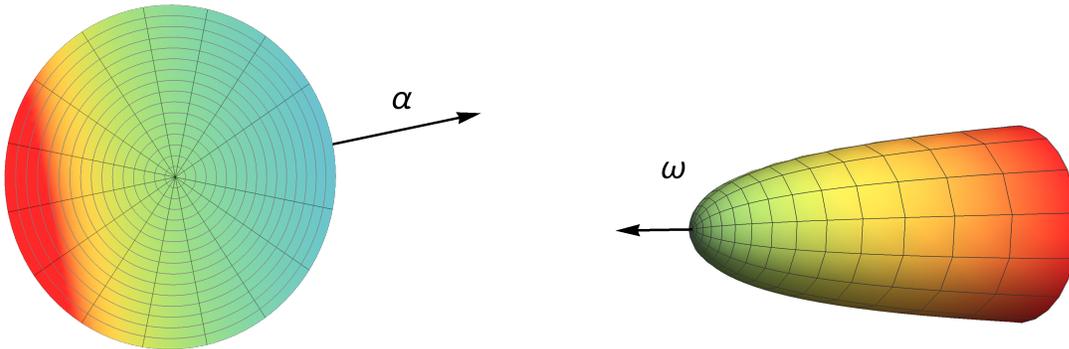


Figura 4.1: **Diagrama embebido de un disco rígido** acelerado (izquierda) y rotante (derecha). El color representa el corrimiento al rojo con respecto al centro. En el caso de un disco acelerado, la geometría se mantiene Euclidiana, mientras que la geometría espacial de un disco rígido rotante se deforma, como se aprecia en el diagrama embebido.

A partir de los teoremas que derivamos en la sección anterior, vemos que la noción de

rigidez en relatividad está bastante restringida por la estructura causal. Esto ha motivado la búsqueda de nociones más generales de rigidez relativista que se puedan formular en espacio-tiempos arbitrarios y con más grados de libertad. Recientemente, [Epp et al. \(2009b\)](#) propusieron una definición cuasilocal de rigidez, para la cual se recuperan los seis grados de libertad que posee un cuerpo rígido en la física Newtoniana, que analizamos en la siguiente sección.

4.1.3. Superficies rígidas cuasilocales

La idea para construir este nuevo concepto de rigidez es restringir la noción de expansión nula a la superficie de una cierta región compacta del espacio-tiempo en vez de imponer rigidez en el espacio tridimensional (*bulk*). Consideremos una congruencia \mathcal{C} definida como una familia de curvas tipo-tiempo con topología $S^2 \times R$, e.g. una esfera en el espacio evolucionando en el tiempo. Dado un modelo de espacio-tiempo, $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, consideremos que la congruencia tiene una tetravelocidad u^a y un vector normal espacial, e^a , a la superficie cerrada S^2 . La tetravelocidad induce una métrica espacial sobre la congruencia definida como vimos a través de la métrica $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$. Dado que asumimos una topología espacial S^2 , el vector ortonormal e^a induce una métrica espacial sobre la esfera dada por $q_{ab} := h_{ab} - e_a e_b$, que está bien definida sobre la superficie cerrada (ver [Epp et al. \(2009b\)](#)). De la misma manera, el vector espacial e^a también induce una métrica Lorentziana $(2 + 1)$ sobre la membrana tipo-tiempo que forma la congruencia, $\gamma_{ab} := g_{ab} - e_c e_b$.

A partir de la métrica q_{ab} , podemos caracterizar la evolución de la superficie a lo largo de la congruencia tal como hicimos con la métrica espacial h_{ab} . Para ello utilizamos cantidades cinemáticas análogas a las que definimos en la Sección 4.1. En particular, nos interesa la expansión de la superficie, caracterizada por:

$$\theta_{ab} := q_a^c q_b^d \nabla_{(c} u_{d)}, \quad (4.32)$$

de donde definimos el escalar de expansión $\theta = q^{ab} \nabla_b u_a$, y la cizalladura de la manera usual. Extendiendo el concepto de rigidez de Born a la superficie S , obtenemos inmediatamente la siguiente definición:

Rigidez Cuasilocal : Una membrana tipo-tiempo representada por una congruencia \mathcal{C} con topología $S^2 \times R$ es cuasilocalmente rígida si su tensor de expansión es cero, $\theta_{ab} = 0$.

La interpretación física es similar a la que dimos antes: las distancias en la superficie permanecen constantes. Esta generalización cuasilocal del concepto de rigidez de Born nos permite construir cuerpos rígidos más generales que, en particular, tienen seis grados de libertad como en la física Newtoniana ([Epp et al. 2009b](#)). La noción de rigidez cuasilocal es útil por varias razones. En primer lugar, permite definir un marco de referencia “preferencial” en un espacio-tiempo arbitrario (aunque no en cualquier región del mismo, como veremos a continuación). Una congruencia inercial cualquiera tenderá a ser deformada y a rotar ante la presencia de curvatura espacio-temporal. Al construir una superficie cuasilocalmente rígida, trasladamos los grados de libertad de deformación en q_{ab} a la aceleración y rotación espacial de la membrana rígida.

La principal utilidad de construir estas membranas rígidas radica en poder formular leyes de conservación cuasilocales para el campo gravitacional. Para ello utilizamos el llamado tensor cuasilocal de Brown-York, que junto con las ecuaciones de Gauss-Codazzi permiten establecer balances de momento y energía entre la frontera de la membrana y su interior del tipo $\Delta[\text{Energía dentro de la esfera}] = (\text{flujos a través de la membrana})$. Estas leyes de conservación se han aplicado para analizar el intercambio de energía por fuerzas tidales (Epp et al. 2013), el intercambio de energía entre el campo electromagnético y el espacio-tiempo (Epp et al. 2009b), y el flujo de energía gravitacional en cosmología (Combi y Romero 2020); discutiremos esto último en el siguiente capítulo. Otra aplicación interesante radica en la utilización de estas superficies rígidas en el contexto del paradigma de la membrana introducido por Damour, Thorne, Price y otros.

En lo que sigue nos interesa desarrollar las condiciones de existencia de estas superficies en un espacio-tiempo arbitrario. Demostraremos que las superficies rígidas solo pueden existir en regiones “normales” del espacio-tiempo. Para ello discutamos primero cómo se comportan los rayos de luz que entran y salen de una superficie rígida. La membrana rígida está definida por los vectores unitarios $[u^a, e^a]$ en un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Podemos definir los vectores nulos canónicos como $l^a = (u^a + e^a)/\sqrt{2}$ (saliente o *outgoing*) y $k^a = (u^a - e^a)/\sqrt{2}$ (entrante o *ingoing*) que cumple las condiciones $l^a l_a = k^a k_a = 0$ y están normalizados como $l^a k_a = -1$. Estos vectores están definidos a menos de reparametrizaciones del tipo $l^a \rightarrow E l^a$ y $k^a \rightarrow E^{-1} k^a$, donde E es una función arbitraria positiva definida (ver Sección 1.5).

La métrica q_{ab} inducida en la superficie rígida se puede escribir también en términos de estos vectores nulos:

$$q_{ab} = g_{ab} - e_a e_b - u_a u_b \equiv g_{ab} - l_a k_b - k_b l_a. \quad (4.33)$$

La expansión de estos vectores está definida por $\theta^{(l)} = q_b^a \nabla_a l^b$ y $\theta^{(k)} = q_b^a \nabla_a k^b$ (ver Sección 1.4 del Capítulo I). La expansión de estos vectores nulos está relacionada con la expansión de la membrana rescribiendo la tetravelocidad como $u^a = \sqrt{2}(l^a + k^a)$, con lo cual tenemos:

$$\theta^{(u)} = \sqrt{2}(\theta^{(l)} + \theta^{(k)}) \equiv 0, \quad (4.34)$$

donde la última igualdad vale para una superficie rígida. Con esta igualdad, probamos fácilmente que una membrana es cuasilocalmente rígida si la expansión de los haces de luz entrantes más la expansión de los haces de luz salientes es igual a cero, $\theta^{(l)} = -\theta^{(k)}$. Una consecuencia importante de esto es que en regiones atrapadas ($\theta^{(l)} < 0, \theta^{(k)} < 0$), o anti-atrapadas ($\theta^{(l)} > 0, \theta^{(k)} > 0$), no existen superficies rígidas.

Si nos concentramos en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo, esta estará libre de superficies atrapadas (excepto alrededor de singularidades), lo cual es un ejemplo claro de la naturaleza cuasilocal del espacio-tiempo y poco apreciado en la literatura. Es posible mostrar que *una membrana cuasilocalmente rígida S siempre existe en una región normal convexa alrededor de una curva tipo-tiempo*. La demostración es por construcción y se pueden adoptar los desarrollos de McGrath (2014a) para probarlo. Comentamos esquemáticamente cómo procede la demostración: primero seleccionamos una curva tipo tiempo y construimos un sistema de coordenadas geodésico de Fermi, válido en una región $R < \text{Riemann}^{-1/2}$, como hicimos en el Capítulo 3. Realizamos luego una transformación de coordenadas a coordenadas esféricas para construir una superficie de topología cerrada. Finalmente construimos una

hipersuperficie tipo tiempo adaptada a estas coordenadas con un vector unitario estacionario en estas coordenadas y se puede mostrar fácilmente que para esta congruencia específica, la expansión cuasilocal es nula a segundo orden en la distancia. Esto vale siempre mientras la curvatura no sea divergente sobre la curva. Un ejemplo interesante que se desprende de este resultado es que para una curva tipo tiempo γ que atravieza el horizonte de un agujero negro, existe un entorno de γ en donde es posible mantener un movimiento rígido durante todo el trayecto. Las fuerzas tidales tenderán a deformar la esfera pero la aceleración para mantenerlo rígido a través del horizonte es finita hasta llegar a la singularidad. Por el contrario, si la superficie rígida encierra al agujero negro y es bajada lentamente hacia el mismo, no podrá mantenerse rígido en el horizonte.

Las membranas rígidas que aproximan a una superficie marginalmente atrapada ($\theta^{(l)} = 0$) deben acelerar cada vez más para mantener la rigidez; sobre la superficie, la aceleración diverge. Podemos considerar este limite ultra-relativista (también llamado Carrolliano) si consideramos el vector αu^a donde α es un parámetro que tiende a cero cuando nos acercamos a la superficie marginal atrapada, para el cual $\alpha u^a \rightarrow l^a$. Tomando este límite en la expansión vemos que sobre la superficie marginal tenemos $\theta^{(l)} = \theta^{(k)} = 0$. En otras palabras, podemos aproximar la superficie marginal con una membrana rígida si la superficie es estacionaria, e.g. en un agujero negro estacionario. Esto es una realización cuasilocal del paradigma de la membrana (Thorne et al. 1986), en el cual se analizan las propiedades del horizonte de eventos en términos de un “horizonte estirado” (*stretched horizon*) tipo tiempo.

4.2. Sistemas rígidos en cosmología

El modelo de FLRW tiene, como ya mostramos, una foliación preferencial en donde las propiedades de la materia son homogéneas e isotrópicas. Esta foliación define una noción de espacio natural dado por la métrica espacial:

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b = a(t)^2 \left(\frac{\nabla_a r \nabla_b r}{1 - \kappa r^2} + r^2 \nabla_a \theta \nabla_b \theta + r^2 \sin^2 \theta \nabla_a \phi \nabla_b \phi \right). \quad (4.35)$$

Con respecto a esta foliación, el espacio se expande; podemos caracterizar esto por el escalar de expansión dado por $\Theta^{(u)} = 3\dot{a}(t)/a(t) = 3H(t)$, donde $H(t)$ es el parámetro de Hubble. El efecto Doppler entre sistemas estacionarios en esta foliación está dado naturalmente por $\Delta \log(\lambda/R) = 0$, donde λ es la longitud de onda. Si consideramos ahora un sistema con otro estado cinemático, e.g. un sistema acelerado o con una velocidad relativa (peculiar) con respecto al flujo de Hubble, el corrimiento al rojo tendrá otra forma.

El estado inercial natural en este espacio-tiempo es la expansión: partículas libres tienden a aumentar su distancia. Nos interesa analizar si es posible construir un sistema que no sufra deformaciones ni expansiones en el sentido de Born, i.e. $\Theta^u \equiv 0$. Para ello debemos construir un sistema con un estado de movimiento particular que se oponga a la expansión. En la foliación cosmológica sabemos que la distancia física está dada por $R = ra(t)$. Una propuesta natural para formar una congruencia rígida consiste en utilizar curvas que estén a distancias fijas del centro. Para ello, primero transformamos la métrica de FLRW a estas coordenadas, con lo cual obtenemos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{H^2 R^2}{1 - kR^2/a^2} \right) dt^2 - \frac{2HR}{1 - kR^2/a^2} dt dR + \frac{dR^2}{1 - kR^2/a^2} + R^2 d\Omega^2. \quad (4.36)$$

Luego podemos construir una congruencia estacionaria en estas coordenadas con una tetravelocidad ortonormal a la foliación:

$$U^a = (\partial_t)^a \left(1 - \frac{H^2 R^2}{1 - kR^2/a^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.37)$$

Esta nueva congruencia, por definición, está formada por curvas que se mantienen en coordenadas (R, ϕ, θ) fijas. Para ello, se requiere una aceleración no nula en la dirección radial que mantiene al sistema fijo. Sin embargo, contrario a lo que podríamos esperar, la expansión no es nula. Calculando el escalar de expansión, tenemos

$$\Theta = \frac{R^2 \left(k\dot{a}(t) - H(t)\dot{H}(t)a(t)^3 \right)}{g(t, R) \left(a(t)^3 (R^2 H(t)^2 - 1) + kR^2 a(t) \right)}, \quad (4.38)$$

donde $g(t, R) = \sqrt{1 - R^2 H(t)^2 / (1 - kR^2/a(t)^2)}$. De esta ecuación, encontramos inmediatamente que la expansión es nula solamente si se cumple la ecuación diferencial

$$\dot{H} = \frac{k}{a^2}. \quad (4.39)$$

Es interesante notar que esta ecuación es equivalente a tener un horizonte aparente de radio fijo $dR_{\mathcal{H}}/dt = 0$ en espacio-tiempo de FLRW, donde recordemos que el horizonte tiene radio $R_{\mathcal{H}} := 1/\sqrt{H^2 + k/a^2}$. La ecuación tiene solución real para $k = 0, -1$, es decir, para universos planos y universos abierto. La solución para $k = 0$ es la solución del universo de de Sitter, donde $H = H_0 = \sqrt{\Lambda/3}$, y el radio del horizonte en $R_{\mathcal{H}} = 1/H_0$. Para $k = -1$, tenemos dos soluciones $H(t) = \{\coth(t), 1/t\}$, correspondiente a un universo vacío con y sin constante cosmológica respectivamente. La segunda solución en particular, corresponde al universo de Milne (Grøn y Johannesen 2011), descrito por $a(t) = t$. Este es un modelo sin materia, con curvatura positiva, que se puede mapear a un espacio-tiempo de Minkowski restringido al cono de luz. El radio del horizonte en esta métrica está en infinito.

Sistemas rígidos en de Sitter

El espacio-tiempo de de Sitter, al ser máximamente simétrico, tiene localmente diez vectores Killing, tres rotaciones, tres traslaciones y cuatro vectores boost. A diferencia de Minkowski, no hay un vector de traslación temporal global. El carácter tipo espacio o tipo tiempo de los boost del Killing depende de la región del espacio-tiempo. Dado un punto del espacio-tiempo, siempre existe un vector de Killing tipo tiempo restringido a la región delimitada por el horizonte cosmológico. En esa región, existen coordenadas estáticas dadas por

$$ds^2 = -(1 - H_0^2 R^2) dT^2 + \frac{1}{1 - H_0^2 R^2} dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (4.40)$$

donde $K^a = \partial_T^a$ es el vector Killing. Esto es análogo a la región de Rindler en Minkowski, la cual se construye a partir de un boosts. Así, por el Teorema I, sabemos que se puede formar un cuerpo rígido de Born siguiendo el flujo de Killing, con una congruencia

$u = K^a / \|K\|$. Similar al cuerpo rígido de Rindler, el tamaño del cuerpo está limitado por $R < 1/H_0$; en el espacio-tiempo de De Sitter, esto coincide con la extensión espacial del horizonte cósmico.

Sin embargo, a diferencia del espacio-tiempo de Minkowski, los otros impulsos de De Sitter no son vectores Killing tipo tiempo en la misma región, por lo que no podemos usarlos para construir más movimientos rígidos canónicos. Esta es otra consecuencia de que los observadores causales ocupen solo una porción de todo el espacio-tiempo. Por ejemplo, usando la combinación lineal de los vectores Killing $K = \partial_T + \Omega \partial_\phi$, esto genera un movimiento de rotación rígido siempre que K sea similar al tiempo, es decir, si el radio exterior del el cuerpo es $R < 1/H_0 \sqrt{1 + \Omega/H_0}$. Nótese cómo el tamaño máximo del cuerpo también depende de la constante cosmológica.

Para modelos arbitrarios de universos, los sistemas estacionarios en coordenadas físicas fijas estarán en expansión. Como consecuencia, pese a tener una velocidad de recesión cero (los sistemas no siguen el flujo de Hubble), el intercambio de fotones entre partes de la congruencia sigue teniendo un corrimiento al rojo, e.g. estos siguen perdiendo energía (ver próxima sección). La expansión de esta congruencia se puede entender físicamente notando que el radio del horizonte aparente crece y por lo tanto la noción de distancia propia cambia a medida que el Universo evoluciona; esto no ocurre cuando el radio del horizonte está fijo como en el universo de Milne o de Sitter.

Analicemos un poco más el caso de un universo plano; la expansión para $k = 0$ está dada por:

$$\Theta = \frac{H(t)\dot{H}(t)R^2}{\left(1 - H(t)^2 R^2\right)^{3/2}}. \quad (4.41)$$

La expansión en esta foliación es no nula a segundo orden en la distancia. Para sistemas cercanos al origen, la expansión del espacio es despreciable. Esto es consistente con la aproximación Newtoniana que discutimos en el capítulo anterior. Para ese caso, en un entorno de radio $L \ll H(t)^2 R^2$, la expansión se manifiesta como una fuerza proporcional a la distancia y dependiente de la aceleración. En este caso si imponemos una fuerza contraria a esta fuerza cosmológica podemos fácilmente contrarrestar la expansión y formar un cuerpo rígido, consistente con la aproximación Newtoniana donde esto es siempre posible.

Finalmente, podemos tratar de buscar congruencias más generales donde $\Theta_{ab} = 0$. Dada las simetrías de la métrica de FLRW, podemos restringirnos a congruencias en movimiento radial con tetravelocidad $V^a = \gamma \mathbf{e}_t + \gamma v^r \mathbf{e}_r$. Utilizando coordenadas comóviles y calculando el tensor de expansión, es posible ver fácilmente que para que $\Theta_{AB} = 0$ con $A, B = \theta, \phi$, la única solución es $v^r(t, r) = -\dot{a}r$, lo cual implica que $\Theta_{tt} \neq 0$. Concluimos que no es posible construir un cuerpo rígido (en el sentido de Born) en un espacio-tiempo cosmológico.

Sin embargo, siempre es posible formar un sistema cuasilocalmente rígido *dentro del radio de Hubble*. Para ello, debemos construir una membrana con un vector tipo-tiempo u^a y un vector espacial ortonormal a la superficie cerrada e^a tal que $\theta_{ab} \equiv 0$. Podemos volver a utilizar la foliación de coordenadas propias (4.36) como *ansatz*. Tomemos entonces la tetravelocidad U^a definida en (4.37) y construyamos una superficie cerrada, una esfera, con covector unitario

radial $e_a = \left(1 - \kappa R^2 a(t)^{-2} - H(t)^2 R^2\right)(dR)_a$. Con estos vectores podemos construir una métrica embebida bidimensional, $q_{ab} = g_{ab} + u_a u_b - e_a e_b$. Utilizando coordenadas propias obtenemos la métrica de una esfera independiente del tiempo:

$$q_{ab} dx^a dx^b = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2. \quad (4.42)$$

Este simple ejercicio nos muestra que las esferas de radio R en un universo en expansión no se expanden ni se deforman sobre su superficie pero el espacio en su interior sí cambia dentro y fuera de la membrana. Otra manera de ver esto es calcular directamente el volumen de una esfera sólida de radio R , que para un espacio FLRW plano es:

$$\mathcal{V}(t) = \int \sqrt{h} dR d\phi d\theta = 4\pi \int \frac{R^2}{1 - H(t)^2 R^2} dR = 4\pi \left(\frac{\arcsin HR}{2H^3} - \frac{R\sqrt{1 - H^2 R^2}}{2H^2} \right) \quad (4.43)$$

que evoluciona en el tiempo, mientras que el área sobre este volumen es constante en el tiempo, $\mathcal{A} := 4\pi R^2$.

Como vimos en la Sección 4.1.3, los sistemas cuasilocales rígidos están limitados a regiones normales del espacio-tiempo. A medida que la membrana crece y se aproxima al horizonte de Hubble, $R \rightarrow R_{\mathcal{H}}$, la aceleración de la membrana rígida tiende a infinito. La razón es sencilla: fuera de este radio, el espacio se expande más rápido que la velocidad de la luz (una región anti-atrapada), con lo cual no puede haber un sistema rígido con un tamaño mayor a este radio. Nos podemos preguntar ahora si la membrana tiene un límite bien definido sobre horizonte cosmológico. Considerando el límite Carroliano con los vectores reescalados, tenemos $\alpha U^a, \alpha e_a \rightarrow l^a = (1, 0, 0, 0)$ con $\alpha = \sqrt{1 - H^2 R^2 / (1 - \kappa R^2 / a(t)^2)}$, donde l^a es un vector nulo perpendicular sobre la esfera $R = R_{\mathcal{H}}(t)$. La membrana límite es tipo luz instantáneamente en un tiempo t dado, pero luego, como el horizonte evoluciona $R_{\mathcal{H}}(t) = 1/H(t)$, la membrana rígida pasa a ser tipo tiempo. El horizonte cosmológico, por otro lado, evoluciona como hipersuperficie tipo tiempo, con lo cual el límite de la superficie cuasilocalmente rígida no está bien definido: el área de este horizonte siempre crece.

4.3. Conservación de energía en sistemas inmersos en la expansión

En un universo en expansión modelado por la métrica FLRW, no existen en general simetrías temporales globales y por lo tanto no tenemos asegurado la existencia de leyes de conservación o balances de energía. Podemos, sin embargo, encontrar ciertos casos particulares importantes del espacio-tiempo de FLRW en dónde existen simetrías temporales válidas en regiones acotadas, e.g. la métrica de Milne y de de Sitter; como vimos en el capítulo anterior, estas simetrías están relacionadas con la posibilidad de encontrar un sistema de referencia rígido. Es importante notar que incluso en estos casos, las simetrías temporales son dependientes del 'observador' cosmológico, a diferencia de un espacio-tiempo asintóticamente plano. Por ejemplo, en el espacio-tiempo de un agujero negro estacionario, todos los sistemas de referencia inerciales en el infinito coincidirán que la energía de un sistema libre se conserva. Sin embargo, en el universo de Milne o de Sitter, la energía conservada para un dado observador cosmológico no coincidirá con la energía conservada según otro observador cosmológico. Este

problema de la dependencia espacial en de Sitter tiene implicaciones importantes para definir propiamente el concepto de radiación ya que el infinito nulo \mathcal{I}^+ es una superficie tipo espacio en ese caso (ver Capítulo anterior).

La métrica general de FLRW no tiene vectores de Killing tipo-tiempo pero podemos encontrar simetrías generalizadas a través de tensores de Killing K_{ab} , que satisfacen $\nabla_{(a}K_{cb)} = 0$. Estos tensores de Killing dan lugar a cantidades conservadas a lo largo de geodésicas que pueden ser independientes de las generadas por vectores de Killing. El caso trivial de esta simetría es la conservación de la masa m de un partícula con momento p^a , definida por $m^2 = -p^a p^b g_{ab}$ donde $K_{ab} = g_{ab}$. Para el caso de la métrica de FLRW, existe un tensor de Killing dado por:

$$K_{ab} = a(t)^2(g_{ab} + u_a u_b), \quad (4.44)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y u_b la tetravelocidad del fluido cosmológico. La cantidad conservada correspondiente para una partícula geodésica de momento p^a está dada por:

$$K^2 = p^a p^b K_{ab}, \quad p^a \nabla_a K = 0. \quad (4.45)$$

De esta relación obtenemos $K^2 = a(t)^2 |\vec{p}|^2$ o equivalentemente $p = |\vec{p}| = K/a(t)$ para \vec{p} representado en el sistema comovil al fluido cosmológico. Esto muestra que partículas con velocidades peculiares no nulas tienden a unirse al flujo de Hubble, en el sentido que las velocidades decaen a cero visto desde este sistema de referencia cosmológico (ver la discusión en [Davis et al. \(2003\)](#)). En este sistema, vemos explícitamente entonces que la energía, entendida como la componente del momento medida en el sistema comovil, siempre decae como $E^2 = m^2 + K^2/a(t)^2$ para partículas geodésicas. Para fotones entonces se obtiene el conocido resultado $E \propto 1/a(t)$, i.e. la frecuencia de fotones se corre al rojo al viajar entre marcos de referencia en el flujo de Hubble. En un espacio-tiempo plano, si tenemos un sistema moviéndose a velocidad constante con respecto a otro, estos pueden enviarse, idealmente, un fotón ida y vuelta sin pérdida neta de energía pese a que cada sistema registra una energía diferente por efecto Doppler. En un universo en expansión, un fotón que se envía ida y vuelta entre sistemas de referencia en el flujo de Hubble siempre tenderá a correrse al rojo.

Consideremos qué ocurre si tenemos sistemas rígidos a una distancia propia $R = a(t)r$ con respecto a un observador cosmológico en $R = 0$. Estos sistemas son acelerados pero estáticos, con una velocidad de recesión nula, y caracterizados por la tetravelocidad $U^a := \partial_t / \sqrt{1 - H(t)^2 R^2}$ en las coordenadas (4.36). Dado un fotón de energía $E_a = -p^a U_a = -p_t(0)$ en $R, t = 0$, que es emitido hacia otro sistema en $U^a(R_b)$, la energía recibida es

$$E_b = \frac{-p_t(t)}{\sqrt{1 - H(t)^2 R_b^2}} = \frac{E_a (1 + H(t)R_b)}{a(t) \sqrt{1 - H(t)^2 R_b^2}}, \quad (4.46)$$

donde usamos la conservación del tensor de Killing para un observador cosmológico. Notamos que el fotón recibido por este sistema estático cerca de radio de Hubble tiene más energía. Si el fotón es enviado de vuelta, el factor extra $1/a(t)$ hace que el observador en $R = 0$ detecte un fotón de menor energía al enviado. Para un universo de de Sitter, sin embargo, la energía se conserva cuando tomamos sistemas de referencia estáticos dentro del horizonte cosmológico. Dado el vector de Killing $\xi^a = \partial_T$ en las coordenadas estáticas de de Sitter (4.40), la energía conservada es $E_0 = -\xi^a p_a = -p_T$. Un fotón recibido por un observador estático cerca del

horizonte cosmológico tiene una energía mayor dada por $E(R) = E_0/\sqrt{1 - H^2 R^2}$, y al ser enviado de vuelta, el fotón regresará con la misma energía E_0 . Concluimos entonces que (a) pese a estar a una distancia propia fija, el sistema cerca del horizonte debe permanecer acelerado con lo cual el fotón tendrá una energía mayor en este sistema, dado por el factor de redshift; también podemos notar explícitamente que (b) pese a la expansión cosmológica, la energía de los fotones entre estos dos sistemas estáticos no se pierde en de Sitter.

4.3.1. Extracción de energía en cosmología

La interacción gravitatoria actúa como catalizador sobre los sistemas materiales, convirtiendo su energía potencial en energía cinética o térmica, e.g. en discos de acreción alrededor de agujeros negros. De manera similar, el espacio-tiempo puede ceder parte de su energía a sistemas materiales, e.g. la energía de rotación de un agujero negro puede ser extraída a través del mecanismo de Penrose o el mecanismo de Blandford-Znajek (Poisson 2004b). En estos casos, las condiciones asintóticamente planas nos permiten evaluar el balance de energía entre espacio-tiempo y materia. Es interesante preguntarnos si podemos formular mecanismos análogos en un espacio-tiempo en expansión, donde la materia es “atraída” hacia el horizonte cosmológico, en vez del horizonte de eventos, y no existen condiciones asintóticamente planas. Davies (1984) trató este problema en el régimen semi-clásico, diseñando un mecanismo para extraer energía de la radiación de Hawking en de Sitter, de manera análogo al mecanismo de Unruh y Wald (1983) para un agujero negro de Schwarzschild. Por otra parte, Harrison (1995) diseñó un mecanismo clásico en un universo de FLRW y mostró que se podría extraer energía infinita. En esta sección revisamos este problema estudiando la dinámica de una cuerda cósmica y la extracción de energía a partir de su tensión.

Comenzamos diseñando el artilugio en la aproximación Newtoniana, donde el efecto de expansión aparece como una fuerza cosmológica (ver Sec. 3.1). Consideremos una polea de masa M con un reservorio (infinito) de cuerda que supondremos sin masa, cuyo extremo está atado a otra masa $m < M$. Si la longitud propia de la cuerda está dada por L , la ecuación de movimiento para la masa está dada por:

$$m \frac{d^2 L}{dt^2} = -T + c, \quad (4.47)$$

donde T es la tensión de la cuerda que ejercemos desde la polea. Si dejamos a la masa expandirse libremente, entonces la cuerda aumentará de tamaño según la ley de Hubble $\dot{L} = H(t)L$. Si queremos aprovechar la energía de la expansión debemos aplicar una tensión no nula en la polea, de donde extraeremos una energía dada por el trabajo:

$$W = \int T dL. \quad (4.48)$$

La tensión que debemos aplicar para extraer energía neta debe cumplir $T > 0$ y la velocidad de la masa debe ser $\dot{L} > 0$. Podemos determinar la tensión que debemos aplicar prescribiendo el estado de movimiento de la partícula, $L(t)$ y usar la ecuación (4.47) para despejar la tensión. Si la aceleración del Universo es positiva, podemos aplicar directamente una tensión igual a la fuerza cosmológica, $T = (H^2 + \dot{H})L$, con lo cual, la aceleración de la partícula es nula. En ese caso, suponiendo que la partícula se mueve inicialmente con el

flujo de Hubble, la longitud de la cuerda en función del tiempo es $L(t) = (L_0 H_0)t + L_0$. Con ello podemos integrar el trabajo. Si la aceleración de la expansión es constante y positiva, entonces la tensión no depende del tiempo y el trabajo obtenido de una partícula que se mueve una distancia ΔL es directamente $W = m q H^2 (\Delta L)^2$. Si la aceleración del Universo es negativa, entonces la tensión que apliquemos para extraer energía tenderá a frenar a la partícula, cortando el mecanismo.

Vemos entonces que si se cumple $qH^2 > 0$, podremos extraer energía en principio ilimitadamente como muestra [Harrison \(1995\)](#). Esto, sin embargo, es un artefacto de la aproximación no relativista que supusimos inicialmente, donde utilizamos coordenadas propias geodésicas que asociamos a la longitud de la cuerda L . Como vimos en el capítulo anterior, esto es estrictamente válido para $L < 1/H(t)$ donde esta distancia está bien definida. Cuando la cuerda aumenta su tamaño hasta distancias $L \sim H(t)^{-1}$, la aproximación Newtoniana deja de ser válida y debemos estudiar el problema relativista. El resultado es análogo al caso Newtoniano de una masa puntual, donde la energía cinética de una partícula en $r = 0$ es infinita; de la misma manera, la aproximación Newtoniana deja de ser válida a escalas del radio de Schwarzschild $r = 2M$. Una diferencia interesante entre estos dos casos es que la energía extraída de la expansión tiende a infinito para un intervalo temporal infinito, mientras que la energía cinética de una partícula que cae a un agujero desde una distancia finita, tiende a infinito en un intervalo temporal finito. Finalmente, notemos que obtendremos una ganancia neta solamente si la fuerza cosmológica aumenta de magnitud en el tiempo, incluso si el trabajo es positivo. Supongamos que el universo está representado por la métrica de Sitter, y la fuerza cosmológica es constante, $H(t) = H_0$; de esa manera la energía total (cinética+gravitatoria en el sentido Newtoniano) se conserva. El campo gravitatorio actúa solamente de dinamo, convirtiendo energía potencial gravitatoria en energía cinética/térmica, pero no estamos ganando energía neta ya que para iniciar el mecanismo debemos realizar un trabajo inicial, e.g. llevando la partícula al origen para conectarla con la polea. Si la fuerza cosmológica es dependiente del tiempo entonces podemos tener ganancias/perdidas netas de energía.

Discutamos ahora el problema relativista. Consideremos para ello una cuerda que se mueve en una dirección radial en un espacio esféricamente simétrico. El tensor de energía-impulso 4-dimensional de la cuerda es:

$$t^{ab} = \bar{\mu} u^a u^b - \bar{\mathcal{T}} e^a e^b, \quad (4.49)$$

donde u^a es la ttravelocidad de la cuerda, e^a es el vector unitario espacial que apunta en la dirección radial (a lo largo de la cuerda), $\bar{\mu} = \mu/\mathcal{A}$, con μ su masa por unidad de longitud, $\mathcal{A} = 4\pi r^2$ el área, y $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{A}$ con \mathcal{T} la tensión. Como trabajamos solo en la dirección radial no necesitamos considerar la acción de la cuerda en otras direcciones; notemos también que el tensor de energía-impulso que tomamos es más general que una cuerda de Nambu-Goto ya que estamos considerando una tensión arbitrarias.

Tenemos tres incógnitas, $\mu(t, r)$, $\mathcal{T}(t, r)$, y $v_r = u^r/u^0$, y tres ecuaciones, dadas por la conservación del tensor de energía impulso, y una ecuación de estado para la tensión $\mathcal{T}(\mu)$. Si suponemos que se cumple la condición de energía nula, entonces la tensión debe satisfacer $\mu > \mathcal{T}$ ([Brown 2013](#)). Las ecuaciones de conservación proyectadas sobre la dirección radial y la dirección temporal son:

$$q_b \nabla_a t^{ab} = -q^b \nabla_b \bar{\mathcal{T}} + \bar{\mu} q_b \dot{u}^b - \bar{\mathcal{T}} \nabla_b q^b = 0, \quad (4.50)$$

$$u_b \nabla_a t^{ab} = -\Theta(\bar{\mu} - \frac{1}{3}\mathcal{T}) - n^a \nabla_a \bar{\mu} = 0 \quad (4.51)$$

Comencemos analizando el caso más sencillo de una cuerda estacionaria en un espacio-tiempo de de Sitter con una longitud fija, sostenida por una tensión no nula en $r = 0$. En ese caso, en las coordenadas estacionarias de de Sitter, la tetravelocidad de la cuerda es $u^a = (\partial_t)^a / \sqrt{-g_{rr}}$ y el vector radial unitario $e^a = (\partial_r)^a / \sqrt{g_{rr}} = (\partial_r)^a \sqrt{-g_{tt}}$. La densidad de masa de la cuerda es constante en este caso, y la tensión obedece la ecuación:

$$\frac{d\mathcal{T}}{dr} = (\mu - \mathcal{T}) \frac{d \log(\alpha)}{dr}. \quad (4.52)$$

La solución a esta ecuación se puede escribir como una suma de dos soluciones $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1(r) + \mathcal{T}_2(r)$, donde $\mathcal{T}_1 = \mu \partial_r \log(\alpha)$ corresponde a la tensión producida por la masa de la cuerda y $\mathcal{T}_2 = -\mathcal{T}_2 \partial_r \log(\alpha)$ la solución de una cuerda sin masa. Exploremos qué ocurre con la solución estacionaria idealizada de una cuerda sin masa ($\mu = 0$) y largo fijo. En este caso, la solución es simplemente:

$$\mathcal{T} = \frac{C}{\alpha(r)}. \quad (4.53)$$

La tensión multiplicada por el factor de corrimiento al rojo entonces es constante a lo largo de la cuerda. En particular, la tensión que debemos realizar en $r = 0$ es $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(r)\alpha(r)$ comparada con otro punto r de la cuerda. Para imponer condiciones de contorno, consideremos que la cuerda sin masa está atada a una partícula de masa m en su extremo en $r = L$. De esa manera, tenemos por la segunda ley de Newton relativista, que $mU^a \nabla_a U^b = f^b = -\mathcal{T}e^b$, y por lo tanto $C = m(\Lambda/3)L$. La tensión de la cuerda en un punto r es entonces $\mathcal{T} = m(\Lambda/3)L\alpha(r)^{-1}$. Consideremos ahora que la cuerda tiene un extremo fijo en $r_0 = 0$ y el otro extremo se mueve de manera cuasi-estacionaria hasta r . El trabajo obtenido a partir de la tensión en $r = 0$, integrando las sucesivas configuraciones estacionarias es:

$$W = \int \mathcal{T}_{r=0} dl = \int \frac{m(\Lambda/3)r}{\alpha} \alpha(\alpha^{-1} dr) = m(1 - \alpha(r)). \quad (4.54)$$

Para distancias cercanas al origen, $\alpha(r) \sim 1 + (1/2)H^2 r^2$, y obtenemos la expresión Newtoniana que teníamos anteriormente, $W \sim (1/2)m(\Lambda/3)r^2$. Como en el conocido caso de un agujero negro de Schwarzschild, la fuerza local de una partícula estacionaria en el horizonte es infinita, pero la tensión para sostenerla en infinito, i.e. la gravedad superficial, es finita. El resultado más importante que obtenemos es que el trabajo que podemos extraer de la tensión está siempre limitado por el horizonte cosmológico. El proceso de extracción es completamente eficiente ya que podemos extraer la totalidad de la masa en reposo de la partícula. Si suponemos ahora una cuerda con masa, la tensión tiene que soportar también el peso de la cuerda. Por ejemplo, para una cuerda de masa constante, la tensión es simplemente $\mathcal{T} \sim C\alpha(r)^{-1} + \mu$. Si imponemos la condición de energía nula a la cuerda, entonces, tenemos que la tensión debe cumplir $\mu \geq \mathcal{T}$, lo cual, como es esperable, excluye el caso de una cuerda ideal sin masa; además para una densidad de masa constante, la tensión satura la condición de energía nula y por lo tanto debe ser constante e igual a la densidad, $\mathcal{T} = \mu$ ¹.

¹En ese caso, la energía que podemos extraer estará limitada en el horizonte pero la energía es proporcional al largo de la cuerda, con lo cual si consideramos una cuerda infinita, la masa de la cuerda será infinita

En una métrica de FLRW arbitraria no tenemos un vector de Killing y por lo tanto no tendremos configuraciones estacionarias para la cuerda. Esperamos, sin embargo, que estas conclusiones se mantenga. Es fácil mostrar que la configuración de cuerda estacionaria no existe (básicamente usado el mismo argumento que utilizamos anteriormente para el cuerpo rígido). La solución para métricas generales de FLRW es más complicada y lo dejamos para el futuro. Notemos que para ecuaciones de estado en donde la densidad de masa y la tensión son iguales tenemos la dinámica de lo que se conoce como cuerda cósmica ([Hindmarsh y Kibble 1995](#)), que pueden representar defectos topológicos formados en el Universo temprano y que pueden manifestarse a gran escala, e.g. en el CMB o en perturbaciones de la densidad.

4.4. Conclusiones

Hemos analizado el concepto de sistema rígido en espacio-tiempos curvos, complementario al concepto de expansión. Mostramos propiedades generales de estos tipos de sistemas y los analizamos en el contexto de métricas cosmológicas. Nuestras conclusiones particulares de este capítulo son:

- A partir del concepto de sistema rígido de Born, i.e. rigidez en el volumen (*bulk*), mostramos que la cinemática de estos sistemas en espacio-tiempos máximamente simétricos está restringida por la estructura causal del espacio-tiempo. Para ello generalizamos teoremas conocidos en espacio-tiempos planos a espacio-tiempos máximamente simétricos que establecen que todo movimiento rígido en rotación tiene que estar generado por un vector de Killing de la métrica y que los cuerpos rígidos no pueden frenarse/ponerse en movimiento sin deformarse.
- Mediante coordenadas geodésicas mostramos cómo construir explícitamente sistemas rígidos acelerados y en rotación para un espacio-tiempo plano. Mostramos cómo la presencia de un horizonte para el observador acelerado surge a partir de la condición de rigidez del sistema.
- Analizamos el concepto más general de rigidez cuasilocal y lo relacionamos con las propiedades ópticas sobre la esfera. Mostramos que la expansión de rayos de luz entrantes y salientes está fuertemente restringida por la condición de rigidez. Los sistemas cuasilocalmente rígidos no pueden existir en regiones (anti-)atrapadas, y son degenerados en superficies marginalmente atrapadas.
- Aplicamos estos conceptos a una métrica cosmológica. Mostramos que si la solución cosmológica no tiene materia pero tiene constante cosmológica, entonces es posible formar sistemas rígidos; esto era esperable dado los resultados obtenidos en los teoremas de la primer sección. En general, sistemas (acelerados) que se ubican a distancias propias fijas se expanden si el horizonte cosmológico cambia con el tiempo.
- De manera más general, mostramos que no es posible oponerse a la expansión cinemáticamente (moviéndose en contra de la expansión), i.e. no existen congruencias rígidas en una métrica de FLRW en general. Concluimos que la expansión del espacio es un fenómeno físico dado por la curvatura. Es posible, sin embargo, sostener una membrana

rígida con un sistema acelerado siempre que el radio de la membrana sea menor al radio de Hubble, para el cual la expansión es mayor a la velocidad de la luz y ningún sistema puede mantenerse rígido.

- Finalmente, analizamos la conservación de energía para sistemas materiales en cosmología. Discutimos donde surge la no conservación de energía y luego nos preguntamos si es posible “minar” la energía de la expansión, o en otras palabras, aprovechar la expansión para extraer energía cinética/térmica de energía potencial gravitatoria. Mostramos con un experimento mental de una polea y una masa atada a una cuerda, que esto es posible pero que el horizonte cosmológico limita la cantidad de energía que es posible de extraer del sistema. La energía máxima está limitada por la masa en reposo del sistema.

5

Horizontes y membranas cosmológicas

— \diamond —

Analizamos propiedades generales de horizontes y membranas en Universos en expansión. Comenzamos detallando cómo definir de manera general un horizonte de carácter cosmológico y mostramos que con la construcción de Brown-York podemos calcular flujos y energía dentro de estos sistemas. Luego nos enfocamos en espacio-tiempos esféricos y mostramos que podemos derivar propiedades que relacionan las propiedades del horizonte con la curvatura local y el contenido de materia. Finalmente, analizamos un escenario en donde un horizonte agujero negro y horizonte cosmológico se fusionan dando lugar a una fenomenología interesante.

— \diamond —

5.1. Introducción

El carácter geométrico del espacio-tiempo y su acople mínimo con la materia en la RG dan lugar al principio de equivalencia: en un entorno suficientemente pequeño, los sistemas físicos inerciales no son afectados por la interacción gravitatoria. Los efectos de la curvatura del espacio-tiempo se manifiestan, en cambio, sobre sistemas extendidos, a través de fuerzas tidales y *frame-dragging* (arrastres de marcos de referencia). La consecuencia más importante de esto es que no es posible definir una densidad local de energía gravitatoria. La energía como propiedad del espacio-tiempo puede ser definida solamente de manera cuasilocal, es decir, no en el volumen de una región, sino en su frontera. Los efectos gravitatorios pueden variar radicalmente si consideramos diferentes tipos de superficies, incluso cuando localmente la curvatura de Riemann es la misma. Por ejemplo, los efectos gravitatorios sobre una superficie que rodea el horizonte de un agujero negro serán enormes comparados a los efectos que sufre un cuerpo pequeño que cae al agujero negro.

La dinámica del espacio-tiempo se puede analizar directamente desde este punto de vista cuasilocal si proyectamos las ecuaciones de Einstein sobre la frontera de una región; en este contexto, la frontera se puede considerar como un sub-sistema del espacio-tiempo y se denomina *membrana*. Sobre esta membrana podemos definir propiedades como la energía y el momento gravitacional; sin embargo, no hay una propuesta única para caracterizar estas propiedades en una membrana arbitraria, excepto en dos casos importantes: cuando la membrana corresponde a la frontera en el infinito nulo (ver Capítulo 2) y cuando la membrana representa un horizonte atrapado. Las membranas pueden representar sistemas gravitatorios

como agujeros negros si están marginalmente atrapadas, i.e. si los rayos de luz se congelan en su superficie ¹. En ese caso, es posible establecer un balance entre el crecimiento del área y el flujo de energía a través de la membrana. Para una membrana arbitraria, especialmente membranas tipo tiempo no tendremos un balance bien definido en general y debemos analizar caso por caso. Esta perspectiva cuasilocal para tratar un sistema gravitatorio adquiere su máxima expresión en los principios holográficos, donde se conjetura que todos los grados de libertad del sistema se mapean a la frontera (Bousso 2002).

En este capítulo nos interesa analizar sistemáticamente cuales son las propiedades de membranas y horizontes en cosmología. Cuando consideramos la frontera de una región suficientemente grande en el Universo en expansión, la cantidad de materia contenida produce un fuerte efecto gravitatorio sobre esta superficie. Para un radio del orden de $\sim 1/\Theta$, donde Θ es el escalar de expansión, los haces de luz emitidos hacia el centro de la superficie tendrán, en conjunto, una expansión positiva: el área de los rayos de luz convergentes tenderá a crecer, contrario a lo que ocurre en un espacio-tiempo plano. Físicamente, la expansión del Universo sobre esta superficie es tan fuerte que nada puede contraerse, ni siquiera la luz. Esta superficie se denomina superficie *anti-atrapada*, inversamente a lo que ocurre en un agujero negro. Las ecuaciones de Einstein muestran que el carácter de estas superficies anti-atrapadas es muy diferente al horizonte de un agujero negro. En primer lugar, los horizontes atrapados de agujeros negros son usualmente tipo espacio o tipo luz, lo que implica que son superficies que pueden cruzarse en una sola dirección (ver, sin embargo, otros ejemplos en Booth (2005)). Por el contrario, los horizontes anti-atrapados cosmológicos son usualmente tipo tiempo, i.e. pueden cruzarse de un lado a otro. En este sentido, los horizontes cosmológicos se comportan como una membrana que crece en el tiempo. Las propiedades gravitatorias sobre esta superficie, sin embargo, son particularmente interesantes.

5.2. Propiedades de membranas gravitatorias y horizontes

En el Capítulo 1, sección 1.5, introducimos los conceptos básicos de horizonte atrapado y superficie marginal atrapada. Nos interesa en esta primer sección analizar las propiedades básicas de evolución de un horizonte cosmológico. ¿Qué distingue un horizonte atrapado cosmológico de un horizonte atrapado de agujero negro? Recordemos primero que el horizonte atrapado es una superficie, H , 3-dimensional, foliada por superficies marginalmente atrapadas donde la luz se detiene en su superficie, i.e. existe una dirección nula l^a (entrante o saliente) tal que el escalar de expansión de la luz es nulo $\theta^{(l)}|_H = 0$. Un horizonte atrapado de agujero negro se caracteriza por tener superficies atrapadas en su interior, o de manera más general, la expansión tiende a disminuir en su interior, con lo cual se cumple sobre el horizonte que $\mathcal{L}_k\theta^{(l)} < 0$.

En un horizonte cosmológico, por el contrario, esperamos que haya superficies anti-atrapadas en su exterior, o de manera más general, esperamos que la expansión tienda a crecer; podemos representar esta propiedad general por $\mathcal{L}_l\theta^{(k)} > 0$. Adoptaremos esta definición para referirnos a un horizonte cosmológico. La signatura del horizonte será entonces tipo tiempo o tipo espacio si se cumple la condición dominante de energía (DEC), tal como

¹En la Sección 1.5 introducimos los conceptos necesarios para caracterizar cuando una membrana corresponde a un horizonte.

prueba [Hayward \(1994\)](#) para horizontes $\mathcal{L}_k\theta^{(l)} > 0$ ². Notemos que en esta definición no especificamos que este sea un horizonte futuro o pasado, es decir, no especificamos que el otro escalar de expansión sea positivo o negativo. Veamos dos ejemplos de horizontes cosmológicos:

- **FLRW**: En la foliación comóvil, las horizontes con simetría esférica cumplen siempre $\theta^{(k)} = 0$ y $\theta^{(l)} > 0$ con radio $R_{\mathcal{H}} = (H^2 + k/a^2)^{-1/2}$ ([Faraoni 2015](#)). Se puede ver también que sobre estos horizontes se cumple $\mathcal{L}_l\theta^k = T_a^a = (\rho - 3p)$, con lo cual si $\rho + p > 0$ (NEC) y $\mathcal{L}_l\theta^k > 0$ (DEC) tenemos horizontes tipo tiempo. El área a través del vector tangente v^a tipo tiempo sobre el horizonte crece $\theta^{(v)} = (1/2)(\theta^{(l)} + \theta^{(k)}) > 0$. En el caso de un espacio-tiempo con constante cosmológica, tenemos todavía la condición de horizonte $\mathcal{L}_l\theta^k > 0$ pero el numerador es cero, con lo cual el horizonte es tipo luz.

Notemos que para el caso $\mathcal{L}_l\theta^{(l)} = 0$, la superficie marginal no cumple la condición de horizonte. Esto ocurre en esta métrica cuando $p = \rho/3$, es decir, para un Universo dominado por radiación. En este caso se puede mostrar que la superficie marginal es nula pero no llega a un estado de equilibrio; en ese sentido se asemeja a un cono de luz futuro. Por otra parte, una métrica que aproxima a un universo de Sitter, tiene un horizonte atrapado que es asintótico al horizonte de eventos.

- **Vaidya con Λ** : Esta métrica está dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(v)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2. \quad (5.1)$$

y representa un agujero negro acretaando un fluido nulo. Se puede mostrar que en estas coordenadas, la métrica tiene dos horizontes, uno de agujero negro y cosmológico, pero que contrario a FLRW, cumplen $\theta^{(l)} = 0$ y $\theta^{(k)} < 0$ ([Ashtekar y Krishnan 2003](#)). El horizonte externo es un horizonte que cumple $\mathcal{L}_k\theta^{(l)} > 0$; como la métrica es esféricamente simétrica y se cumple el NEC, el horizonte cosmológico es tipo-tiempo. Dado que en este caso $\theta^{(k)} < 0$, este horizonte cosmológico decrecen su área $\theta^{(v)} = (1/2)(\theta^{(l)} + \theta^{(k)}) < 0$. Esto es intuitivamente razonable ya que al incrementar su masa, el BH tiende a atraer el horizonte cosmológico.

5.2.1. Energía y flujo sobre membranas cosmológicas

Queremos analizar las propiedades cuasilocales de estos horizontes cosmológicos. Siguiendo a [Ashtekar y Krishnan \(2003\)](#), podemos analizar de manera general la geometría intrínseca del horizonte a través de su métrica γ_{ab} y la relación con la métrica tetradimensional a través de la curvatura extrínseca H_{ab} ; a su vez, podemos conectar los datos iniciales (γ_{ab}, H_{ab}) sobre este horizonte con el contenido de materia a través de los *constraints* Hamiltonianos de la Relatividad General. Este enfoque sirve para un horizonte de cualquier tipo, aunque *solo* horizontes tipo espacio (e.g. de agujeros negros) tendrán un balance de energía positivo definido (ver Ec. (1.45) en la Sección 1.5). En el caso de horizontes cosmológicos, como estos

²Para universos que violan las condiciones de energía existen otros tipos de horizontes que no entran en esta categorías, e.g. los universos que evolucionan hacia un Big Rip poseen horizontes tipo espacio. No nos ocuparemos de estos por ahora.

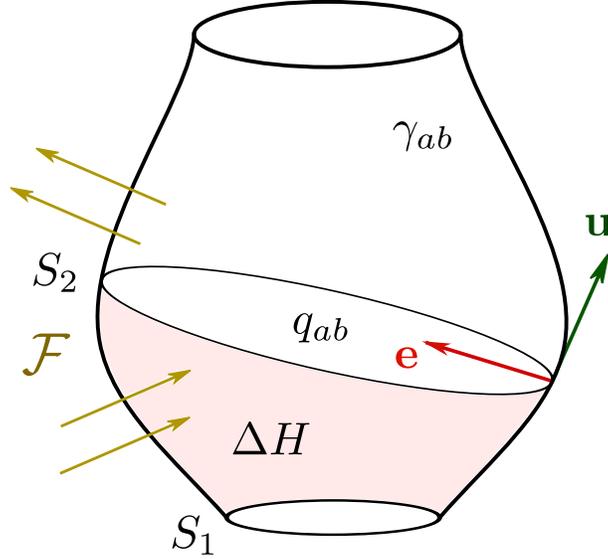


Figura 5.1: Representación de una membrana tipo tiempo H con un vector tangente generador u^a que representa una tetravelocidad, y foliada por superficies esféricas (aquí representadas por curvas) con vector normal e^a . Estas membranas pueden absorber y emitir flujos, con lo cual pueden crecer y decrecer su área.

son tipo tiempo no tenemos asegurado flujos de signos definidos a través del horizonte. Como estos horizontes son usualmente membranas tipo tiempo, se asemejan a sistemas materiales ordinarios en el espacio-tiempo como por ejemplo fluidos. Para estas membranas, a diferencia de horizontes dinámicos (tipo espacio), podemos construir un tensor superficial de energía-impulso gravitatorio, \mathcal{T}^{ab} que solo está definido en la membrana. Este es el llamado tensor de energía-impulso de Brown-York (Brown y York Jr 1993). Este tensor aparece naturalmente de dos maneras en Relatividad General: (a) cuando consideramos el problema de unir dos regiones del espacio-tiempo de manera suave y (b) cuando consideramos los términos de frontera al variar la acción del espacio-tiempo. Nos centramos aquí en el enfoque (a), más relacionado al llamado “Paradigma de la membrana” y principios holográficos.

Consideremos un espacio-tiempo construido a partir de dos regiones espacio-temporales $(\mathcal{M}_\pm, \mathbf{g}_\pm)$. Supongamos que estas dos regiones están unidas por una hipersuperficie H tipo tiempo y con topología $S^2 \times R$, donde S^2 es una superficie cerrada esférica con vector normal unitario e^a . La métrica (Lorentziana) inducida sobre H está dada por $\gamma_{ab} = g_{ab} - e_a e_b$. Para que el espacio-tiempo resultante sea una solución válida de las ecuaciones de Einstein necesitamos que las métricas inducidas sobre H concidan. Es posible mostrar que en este caso, el tensor de Riemann puede contener en general una componente de distribución tipo delta de Dirac sobre la hipersuperficie. La componente de Weyl de esta distribución es cero, mientras que la componente de Ricci queda determinada por la discontinuidad de la curvatura extrínseca sobre H . El tensor de Einstein en general queda determinado por:

$$G_{ab} = G_{ab}^- \Theta_H^+(x) + G_{ab}^- \Theta_H^-(x) + \bar{\mathcal{T}}_{ab} \delta_H(x) \quad (5.2)$$

donde el término que aporta la distribución está dado por:

$$\bar{\mathcal{T}}_{ab} := [H_{ab}^+]_- \gamma_{ab} - [H_{ab}]_-^+ \quad (5.3)$$

donde $H_{ab} := \gamma_a^{a'} \gamma_b^{b'} \nabla_{a'} e_{b'}$ es la curvatura extrínseca de la hipersuperficie. Si queremos que la solución sea continua entre los dos espacio-tiempos, debemos exigir que el tensor $\bar{\mathcal{T}}_{ab}$ sea cero. Por otra parte, si mantenemos esta contribución, usando las ecuaciones de Einstein podemos interpretar esta componente como la presencia de una distribución de materia sobre la hipersuperficie que tiene un tensor de energía-momento $\bar{\mathcal{T}}_{ab}$. Con este desarrollo vemos que es equivalente reemplazar el espacio-tiempo interior completamente por una membrana que tenga un tensor de energía impulso $\bar{\mathcal{T}}_{ab}$ sin afectar la física del exterior H^+ . En otras palabras, las condiciones de contorno interiores pueden reemplazar el espacio-tiempo interior siempre que asignemos un tensor de energía-impulso a la membrana dado por:

$$\mathcal{T}_{ab} = \frac{1}{8\pi} \left(\gamma_{ab} H - H_{ab} \right). \quad (5.4)$$

Ahora podemos relacionar este tensor con el contenido de materia en el espacio-tiempo utilizando las ecuaciones de Gauss-Codazzi junto con las ecuaciones de Einstein. Con ello, obtenemos la forma holográfica de las ecuaciones de campo de Einstein, dadas por:

$$D_a \mathcal{T}^{ab} = -T^{ac} e_a \gamma_c^b, \quad (5.5)$$

$$R(\gamma) + H^{ab} H_{ab} - H^2 = -16\pi T_{ab} e^a e^b, \quad (5.6)$$

donde $D_a := \gamma_a^{a'} \nabla_{a'}$ es la derivada covariante asociada con γ , $R(\gamma)$ es el escalar de Ricci tridimensional de la métrica, y T^{ab} es el tensor de energía-impulso de la materia. La primer ecuación corresponde a la conservación de energía-impulso por el flujo de materia externo $T^{ac} e_a$, mientras que la segunda controla el flujo radial de momento asociado a la membrana y representa un ecuación Hamiltoniana.

Para analizar las propiedades de esta membrana, podemos descomponer en varias partes el tensor de energía impulso gravitatorio de manera usual seleccionando un campo vectorial tipo tiempo. Tomando el vector canónico unitario sobre H , que denotamos como u^a , definimos la energía como la componente temporal del tensor de energía-impulso

$$\mathcal{E} := u^a u^b \mathcal{T}_{ab} \equiv -\frac{q_{ab} H^{ab}}{8\pi} \equiv -\frac{\theta^{(e)}}{8\pi}, \quad (5.7)$$

donde $\theta^{(e)} := q^{ab} \nabla_a e_a$ es traza de la curvatura extrínseca. Podemos definir también el momento:

$$\mathcal{P}_a := q_a^b u^c \mathcal{T}_{bc} \equiv -\frac{q_a^b (e^c \nabla_a u^a)}{8\pi} \equiv -\frac{\Omega_a^{(e)}}{8\pi}, \quad (5.8)$$

donde $\Omega_a^{(e)}$ es la 1-forma asociada al vector e^a (ver Capítulo 1, Cección 1.4). Finalmente, el tensor presión es:

$$S_{ab} = -q_a^c q_b^d \mathcal{T}_{cd} \equiv \frac{1}{8\pi} \left(\gamma^{(e)} q_{ab} + \sigma^{(e)} \right), \quad (5.9)$$

donde definimos $\gamma^{(e)} := e^b u^a \nabla_a e_b$ como la aceleración radial y $\sigma^{(e)}$ la cizalladura del vector espacial e^a . Desarrollamos ahora la forma integral que relaciona estas cantidades en S y en H . Proyectando la tetravelocidad u^a sobre la derivada covariante del tensor de energía-impulso gravitatorio obtenemos:

$$D_a (\mathcal{T}^{ab} u_b) = (D_a \mathcal{T}^{ab}) u_b + \mathcal{T}^{ab} (D_a u_b). \quad (5.10)$$

Si integramos $D_a(\mathcal{T}^{ab}u_b)$ sobre la membrana acotada por S_1 y S_2 tenemos, usando el teorema de Stokes:

$$\int_{\Delta H} D_a(\mathcal{T}^{ab}u_b)dH = - \int_{\Delta S} \mathcal{E}dS. \quad (5.11)$$

Por otro lado, usando la conservación (5.5) conectamos la divergencia espacial del tensor energía-impulso gravitacional con el flujo de materia:

$$(D_a\mathcal{T}^{ab})u_b = -T^{ab}e_a u_a \quad (5.12)$$

Finalmente, podemos reescribir el último término geométrico como (ver McGrath et al. (2012) para una derivación):

$$\mathcal{T}^{ab}\left(D_{(a}u_{b)}\right) = \gamma_a^{(e)}\mathcal{P}^a - \mathcal{S}^{ab}\theta_{ab}. \quad (5.13)$$

Con estas relaciones obtenemos:

$$\int_{\Delta S} \mathcal{E}dS = \int_{\Delta H} \left[T^{ab}e_a u_b - \gamma_a^{(s)}\mathcal{P}^a + S^{ab}q_{ab} \right] dH. \quad (5.14)$$

que podemos comparar otras leyes similares de conservación en la membrana como en, por ejemplo, Freidel y Yokokura (2015); Gourgoulhon y Jaramillo (2006). Podemos reescribir la Ec. (5.14) simplemente como:

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{F}_M + \mathcal{F}_{ST}. \quad (5.15)$$

donde definimos los flujos como:

$$\mathcal{F}_M = \int_{\Delta H} T^{ab}s_a u_b dH, \quad (5.16)$$

y los flujos geométricos como:

$$\mathcal{F}_{ST} = \int_{\Delta H} \left[-\gamma_a^{(s)}\mathcal{P}^a + S^{ab}q_{ab} \right] dH. \quad (5.17)$$

El cambio de energía dentro de la superficie depende de los flujos de materia, \mathcal{F}_M , y los flujos del espacio-tiempo, \mathcal{F}_{ST} que atraviesa la membrana ΔH . La ley de conservación es válida para cualquier superficie compacta que evolucione en el tiempo en un espacio-tiempo arbitrario. Tenemos todavía, sin embargo, una gran libertad para elegir la membrana. Diferentes elecciones de congruencias construyen diferentes membranas y producirán diferentes resultados (Brown et al. 2002). Esto no es conceptualmente problemático ya que la energía es un concepto dependiente del marco de referencia incluso en la Relatividad Especial. Como discutimos en el Capítulo 4, una membrana particular que se puede construir en muchas situaciones es la de un sistema cuasilocalmente rígido, donde la expansión superficial $\theta^{(u)}$ es cero. Si aplicamos las leyes de conservación a este marco particular, los flujos de espacio-tiempo se reducen a:

$$\Delta\mathcal{F}_{ST} \equiv - \int_{\Delta H} \alpha_a \mathcal{P}^a dH. \quad (5.18)$$

Como se muestra en McGrath (2014b), los flujos de espacio-tiempo (5.18) en este caso adquieren una forma similar a un flujo de Poynting que fluye a través de la membrana. La

energía total está definida a menos de un punto cero, que representa la parte no dinámica de la acción; de manera general podemos definir:

$$E = \int_S \mathcal{E} dS - \int_{\bar{S}} \bar{\mathcal{E}} d\bar{S}, \quad (5.19)$$

donde $\bar{\mathcal{E}}$ es la energía evaluada en una esfera de referencias \bar{S} (Brown y York Jr 1993). Si queremos que la energía total sea cero cuando tomamos el límite al espacio-tiempo de Minkowski, la esfera de referencia se puede elegir como una variedad con métrica q_{ab} embebida isométricamente en Minkowski. Para espacio-tiempos con simetría esférica siempre podemos elegir \bar{S} como una esfera en Minkowski con curvatura extrínseca $k_0 = 2/R$:

$$E_0 = \int_{\bar{S}} \bar{\mathcal{E}} = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} k_0 \sin(\theta) R^2 d\theta d\phi = -R. \quad (5.20)$$

Con estos elementos podemos calcular la energía gravitatoria contenida en una región arbitraria de un espacio-tiempo cosmológico³.

Comencemos analizando el caso sencillo de un espacio-tiempo de FLRW y elijamos una membrana cuasilocalmente rígida, es decir, calculamos la energía contenida en una membrana con radio propio fijo. Utilizando la membrana cuasilocalmente rígida que construimos en el capítulo 4 (ver (4.42)) y utilizando el punto cero de energía (5.20), obtenemos:

$$E = R \left(1 - \sqrt{1 - R^2 \left(H^2 + k/a(t)^2 \right)} \right). \quad (5.21)$$

Si nos centramos en el caso $k = 0$, el flujo de energía gravitatoria a través de la esfera está dado por

$$dE/dt = R^3 H \dot{H} / \sqrt{1 - H^2 R^2}. \quad (5.22)$$

Para universos con $\dot{H} < 0$ como en el modelo Λ CDM, el sistema pierde energía hasta que $H(t)$ alcanza H_0 . Es decir, el sistema alcanza el equilibrio, no cuando la expansión es cero, sino cuando la aceleración de la expansión es cero. A medida que nos acercamos al horizonte, el marco de referencia cuasilocalmente rígido necesita una mayor aceleración para mantener la rigidez cuasilocal; en el horizonte, la aceleración es infinita y la hipersuperficie se convierte, localmente, en una hipersuperficie tipo luz. El flujo de energía cuasilocal (5.21) solo es válido para sistemas donde $R < R_{\mathcal{H}}$. Notemos que la energía total sí está bien definida en este límite ya que a diferencia del flujo, la energía total depende solamente de la geometría extrínseca de la esfera. La energía en el horizonte es simplemente $E = R_{\mathcal{H}}$.

Es interesante comparar esto con el caso de un agujero negro. Podemos construir un marco rígido cuasilocal en un espacio-tiempo de Schwarzschild asociado con el flujo Killing tipo tiempo. El marco se puede extender hasta el infinito sin problemas, donde las expresiones aproximan a la masa ADM. Sin embargo, el marco solo puede mantener la rigidez fuera del horizonte del agujero negro. Si ahora consideramos una métrica de Schwarzschild-de Sitter, el espacio-tiempo tiene dos horizontes, y por lo tanto el marco rígido es válido en $R_{\mathcal{H}_1} < R < R_{\mathcal{H}_2}$, donde la energía interna es nuevamente $E = R_{\mathcal{H}_i}$ en ambos extremos.

³Nuestros resultados en Combi y Romero (2020) salieron simultáneamente con los resultados de Oltean et al. (2020) que esbozan un cálculo similar para la energía cuasilocal.

Finalmente, si en cambio tomamos dos esferas siguiendo el flujo de Hubble, la energía interna de Brown-York no recibe un flujo de materia dado que nos movemos con el flujo de materia (Afshar 2009).

Nos hemos limitado a analizar un ejemplo muy sencillo de flujo gravitacional en cosmología utilizando las construcciones que presentamos en capítulo anteriores. Un tema interesante a explorar en el futuro es el comportamiento general de estos flujos cuando consideramos un horizonte atrapado arbitrario y compararlo con otras medidas para la energía gravitatoria. En la siguiente sección, realizamos un análisis más general del comportamiento de estos horizontes restringiéndonos al caso de espacio-tiempos esféricamente simétricos.

5.3. Horizontes en espacio-tiempos esféricos

En espacio-tiempos generales, la presencia de horizontes atrapados se puede detectar mediante técnicas numéricas que involucran fijar una foliación $3 + 1$ en el espacio-tiempo (Schnetter et al. 2006); si cambiamos la foliación, es posible en principio encontrar distintos tipos de horizontes atrapados. Encontrar al menos un horizonte atrapado en una foliación dada es suficiente en el contexto de simulaciones numéricas (e.g. fusión de agujeros negros) para analizar las propiedades del espacio-tiempo. Si el espacio-tiempo tiene simetrías, es natural utilizar una foliación adaptada a esa simetría y buscar allí los horizontes atrapados. Incluso en este escenario, no tenemos que perder de vista que el horizonte depende de la foliación preferencial, como se enfatiza (Faraoni et al. 2017). Como veremos en la próxima Sección, existen situaciones físicamente relevantes en donde la foliación no corresponde a la simetría del modelo de espacio-tiempo. Las métricas esféricamente simétricas del espacio-tiempo son, acaso, la clase de modelos no triviales más sencillos que podemos considerar. En vacío (con $\Lambda \neq 0$), estas métricas están severamente restringidas por el teorema de Birkhoff. Estos espacio-tiempos tampoco poseen radiación gravitacional, con lo cual la componente no local de curvatura está determinada por el tensor eléctrico de Weyl, i.e. corresponden a métricas del tipo Petrov D o O (Ellis et al. 2012). De esta manera, este tipo de métricas permite un análisis profundo de sus propiedades incluso en escenarios dependientes del tiempo y con materia, como los modelos cosmológicos que nos interesa explorar. Existen varios formalismos que podemos utilizar para analizar un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Por ejemplo, podemos utilizar un análisis de coordenadas esféricas adaptadas (Abreu y Visser 2010; Schnetter et al. 2006), utilizar un formalismo de tétradas (Nandra et al. 2012), una descomposición $3+1$ (Mimoso et al. 2010), o una descomposición $1+1+2$ (Clarkson 2007; Ellis et al. 2014).

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar las propiedades de horizontes atrapados cosmológicos para simetría esférica. Trabajos previos se han concentrado en analizar la dinámica de horizontes en espacio-tiempo específicos como FLRW (Ben-Dov 2004; Faraoni et al. 2017), McVittie (Kaloper et al. 2010), LTB (Booth 2005), o analizando aspectos geométricos específicos (Nielsen y Visser 2006). En este caso, nos interesa encontrar las propiedades generales de un horizonte cosmológico en relación al contenido de materia y curvatura en el espacio-tiempo. Para ello, utilizaremos el formalismo covariante $1+1+2$ desarrollado por Clarkson (2007) para modelos localmente rotacionales simétricos (LRS-2). En la siguiente sección, revisamos este formalismo en el contexto de espacio-tiempos esféricos

y expandimos algunos conceptos geométricos para analizar horizontes (anti-)atrapados.

5.3.1. Espacio-tiempos en simetría esférica

Un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ es esféricamente simétrico si admite $\text{SO}(3)$ como grupo de isometrías. Los vectores de Killing de la isometría forman un álgebra de Lie con la relación de conmutación $[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k$ caracterizada por la constante de estructura del grupo $\text{SO}(3)$. Del teorema de Frobenius, las órbitas del grupo definen una subvariedad de dos dimensiones con curvatura positiva constante. La variedad de espacio-tiempo es entonces un producto *alabeado* (*warped*), $\mathcal{M} = \mathcal{B} \times S^2$ cuya métrica se puede escribir como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}} + R^2 \mathbf{g}_{S^2}, \quad (5.23)$$

donde el espacio 2D \mathcal{B} es el llamado espacio base (radial temporal con signatura $(-, +)$) y el espacio 2D S^2 es el espacio fibrado, i.e. las superficies de simetría esférica. La función R^2 se denomina el factor alabeado en el contexto de geometría diferencial y solo depende de puntos en \mathcal{B} . Esta función no es más que el radio *areal* con el cual definimos la curvatura Gaussiana $1/R^2$ en S^2 . Notemos que todo tensor se puede descomponer de esta manera. En un sistema de coordenadas adaptado, podemos escribir la métrica como

$$ds^2 = B_{pq}(t, r) dx^p dx^q + R(t, r)^2 d\Omega^2, \quad (5.24)$$

donde $x^p = t, r$ son coordenadas del espacio base y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ (ver la demostración sencilla de [De Felice y Clarke \(1992a\)](#)). En estas coordenadas, $r, t = \text{constante}$ definen las superficies de las órbitas de grupo con métrica $d\Sigma^2 = R(t, r)^2 d\Omega^2$, que tiene la curvatura Gaussiana de una esfera de radio $R(t, r)$. La curvatura seccional⁴ del plano tangencial a las órbitas de $\text{SO}(3)$ en un punto p , viene dada por (ver Apéndice en [Giulini \(2006\)](#)):

$$K := -\frac{1}{R^2}(1 + \nabla_\mu R \nabla^\mu R). \quad (5.25)$$

Definamos ahora dos congruencias unitarias u^a y e^a tipo tiempo y tipo espacio respectivamente que viven en el espacio base y son ortonormales:

$$u^a u_a = -1, \quad e^a e_a = 1, \quad u^a e_a = 0. \quad (5.26)$$

Con ellos, podemos formar una métrica 2D inducida q_{ab} :

$$q_{ab} = g_{ab} + u_a u_b - e_a e_b, \quad (5.27)$$

que es simplemente la métrica del fibrado S^2 , $q_{ab} dx^a dx^b \equiv R^2 d\Omega^2$. Si comparamos con Sección 1.2, vemos que $q_{ab} = h_{ab} - e_a e_b$, donde h_{ab} es la métrica del espacio local. La métrica q_{ab} actúa como proyector o *pull-back* para vectores arbitrarios del espacio tiempo y cumple:

$$v^a q_a^b \in \mathcal{T}(S^2), \quad e^a q_{ab} = u^a q_{ab} = 0, \quad q_a^a = 2. \quad (5.28)$$

⁴La curvatura seccional es la curvatura Gaussiana del plano tangente formado por dos vectores en un punto de la variedad. Se define esquemáticamente como \sim Riemann sobre el área del espacio tangente. En este caso, consideramos vectores tangentes a S^2 , i.e. sobre la esfera

Siguiendo la notación de Clarkson (2007), definimos las siguientes derivadas direccionales:

$$\hat{V}^a = u^b \nabla_b V^a, \quad \hat{V}^a = e^b \nabla_b V^a, \quad \delta_f V^a = q_f^b h_f^c \nabla_c V^a. \quad (5.29)$$

Con estos elementos podemos escribir las ecuaciones de Einstein en términos de ecuaciones de evolución y propagación de estas derivadas direccionales con la descomposición 1+1+2 de Clarkson (2007). La ventaja de este enfoque es que para simetría esférica, el espacio-tiempo entero queda descrito solamente por nueve escalares $\{\mathcal{A}, \Theta, \phi, \Sigma, \mathcal{E}, \rho, p, \Pi, Q\}$. Para definir estos escalares, consideremos que cualquier tensor simétrico sin traza en simetría esférica se escribe como $M_{ab} = M(e_a e_b - (1/2)q_{ab})$, donde M es un escalar que depende de las coordenadas en el espacio base. Con ello, veamos primero la descomposición usual del tensor de energía impulso:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + q_a u_b + q_b u_a + p h_{ab} + \pi_{ab} \quad (5.30)$$

donde cada término está definidos en la Sección 1.5. Dado que el vector de calor q^a es espacial, debe apuntar en la dirección radial. Tenemos entonces:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + Q(e_a u_b + u_a e_b) + \Pi(e_a e_b - \frac{1}{2}q_{ab}) + p(q_{ab} + e_a e_b). \quad (5.31)$$

De manera similar, podemos descomponer las derivadas covariantes de u^a y e^a como:

$$\nabla_a e_b = -\mathcal{A} u_a u_b + \left(\Sigma + \frac{1}{3}\Theta\right) e_a u_b + \frac{1}{2}\phi q_{ab} \quad (5.32)$$

$$\nabla_a u_b = -\mathcal{A} u_a e_b + \left(\Sigma + \frac{1}{3}\Theta\right) e_a e_b + \left(\frac{\Theta}{3} - \frac{1}{2}\Sigma\right) q_{ab}, \quad (5.33)$$

donde definimos el escalar de cizalladura $\sigma_{ab} = \Sigma(e_a e_b - (1/2)q_{ab})$, la aceleración $\dot{u}^a = \mathcal{A}e^a$ y la dilatación $\phi = q_b^a \nabla_a e^b$. Finalmente, necesitamos definir la parte no local de la curvatura que está dada por el tensor de Weyl eléctrico ya que su parte magnética es cero para simetría esférica:

$$E_{ab} := C_{acbd} u^c u^d \equiv \mathcal{E}(e_a e_b - \frac{1}{2}q_{ab}). \quad (5.34)$$

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener tomando las identidades de Ricci para u^a y e^a junto con las identidades de Bianchi. Las ecuaciones resultantes se dividen en ecuaciones de propagación, evolución, y mixtas:

■ *Propagación:*

$$\hat{\phi} = -\frac{1}{2}\phi^2 + \left(\frac{1}{3}\Theta + \Sigma\right) \left(\frac{2}{3}\Theta - \Sigma\right) - 4\pi \left(\frac{2}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda}{4\pi}\right) - \Pi\right) - \mathcal{E} \quad (5.35)$$

$$\hat{\Sigma} - \frac{2}{3}\hat{\Theta} = -\frac{3}{2}\phi\Sigma - Q \quad (5.36)$$

$$\hat{\mathcal{E}} - \frac{8\pi}{3}\hat{\rho} + 4\pi\hat{\Pi} = -\frac{3}{2}\phi(\mathcal{E} + 4\pi\Pi) + 8\pi \left(\frac{1}{2}\Sigma - \frac{1}{3}\Theta\right) Q \quad (5.37)$$

▪ *Evolución:*

$$\dot{\phi} = -\left(\Sigma - \frac{2}{3}\Theta\right) \left(\mathcal{A} - \frac{1}{2}\phi\right) + 8\pi Q \quad (5.38)$$

$$\dot{\Sigma} - \frac{2}{3}\dot{\Theta} = -\mathcal{A}\phi + 2\left(\frac{1}{3}\Theta - \frac{1}{2}\Sigma\right)^2 + \frac{8\pi}{3}\left(\rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi}\right) - \mathcal{E} + 4\pi\Pi \quad (5.39)$$

$$\dot{\mathcal{E}} - \frac{8\pi}{3}\dot{\rho} + 4\pi\dot{\Pi} = +\left(\frac{3}{2}\Sigma - \Theta\right)\mathcal{E} + 2\pi\left(\Sigma - \frac{2}{3}\Theta\right)\Pi + 4\pi\left[\phi Q - (\rho + p)\left(\Sigma - \frac{2}{3}\Theta\right)\right]. \quad (5.40)$$

▪ *Mixtas:*

$$\hat{\mathcal{A}} - \dot{\Theta} = -(\mathcal{A} + \phi)\mathcal{A} + \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{3}{2}\Sigma^2 + 4\pi\left(\rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi}\right) \quad (5.41)$$

$$\dot{\rho} + \hat{Q} = -\Theta(\rho + p) - (\phi + 2\mathcal{A})Q - \frac{3}{2}\Sigma\Pi \quad (5.42)$$

$$\dot{Q} + \hat{p} + \hat{\Pi} = -\left(\frac{3}{2}\phi + \mathcal{A}\right)\Pi - \left(\frac{4}{3}\Theta + \Sigma\right)Q - (\rho + p)\mathcal{A} \quad (5.43)$$

En espacio-tiempos esféricamente simétricos, la curvatura Gaussiana de la esfera, es decir, la inversa del cuadrado de radio, es una cantidad muy importante para entender en profundidad la geometría de la métrica. Para analizar esto en detalle, debemos relacionar la geometría tetradimensional con la geometría de la esfera. Comenzamos conectando la curvatura del espacio tridimensional ortogonal a u^a utilizando la ecuación de Gauss-Codazzi (Poisson 2004b), que relaciona la curvatura tetradimensional del espacio-tiempo con la curvatura tridimensional:

$$R_{abcd}(h) + H_{ac}H_{bd} - H_{ad}H_{cb} = h_a^o h_b^q h_c^r h_d^s R_{pqrs}(g) \quad (5.44)$$

donde H_{ab} es la curvatura extrínseca. De manera similar, podemos calcular la ecuación de Gauss que relaciona la geometría del espacio tridimensional con la geometría de la esfera:

$$R_{abcd}(q) + {}^2H_{ac}{}^2H_{bd} - {}^2H_{ad}{}^2H_{cb} = q_a^o q_b^q q_c^r q_d^s R_{pqrs}(h) \quad (5.45)$$

Contrayendo la Eq. (5.45) podemos relacionar el tensor de Ricci entre el espacio tridimensional y el espacio de la esfera. Como la variedad se descompone en dos partes y el espacio fibrado bidimensional tiene simetría esférica, el tensor de Ricci de S^2 es simplemente $R_{ab}(q) = \mathcal{K}q_{ab}$, donde \mathcal{K} es la curvatura Gaussiana de la esfera, i.e. $\mathcal{K} := 1/R^2$, donde R es el radio areal. Calculando las curvaturas extrínsecas explícitamente, utilizando la descomposición en (5.32), obtenemos:

$$R_{ab}(h) = -\left(\hat{\phi} + \frac{1}{2}\phi^2\right)e_a e_b - \left(\frac{1}{2}(\hat{\phi} + \phi^2) - \mathcal{K}\right)q_{ab}, \quad (5.46)$$

y el escalar de Ricci como:

$$R_a^a(h) = -2\left(\hat{\phi} + \frac{3}{4}\phi^2 - \mathcal{K}\right). \quad (5.47)$$

Podemos conectar $R_a^a(h)$ con las ecuaciones de Einstein contrayendo (5.45), que nos da la ecuación de restricción típica en el formalismo 3+1. Utilizando la descomposición de $\nabla_a u_b$ para calcular la curvatura extrínseca, obtenemos:

$$R_a^a(h) = 2\left(8\pi\rho + \Lambda - \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{3}{4}\Sigma^2\right). \quad (5.48)$$

Finalmente, utilizando la ecuación para $\hat{\phi}$, igualando las ecuaciones anteriores obtenemos una ecuación de restricción para el radio de la esfera:

$$\frac{1}{R^2} = \mathcal{K} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\Lambda}{8\pi} + \rho\right) - \mathcal{E} - 4\pi\Pi + \frac{1}{4}\left[\phi + \left(\frac{2}{3}\Theta - \Sigma\right)\right]\left[\phi - \left(\frac{2}{3}\Theta - \Sigma\right)\right], \quad (5.49)$$

Podemos tomar la derivada direccional de \mathcal{K} con lo cual obtenemos

$$\dot{\mathcal{K}} = -\left(\frac{2}{3}\Theta - \Sigma\right)\mathcal{K}, \quad \hat{\mathcal{K}} = -\phi\mathcal{K}. \quad (5.50)$$

Estas ecuaciones determinan la evolución del espacio-tiempo en términos de cantidades geométricas de la congruencia $[u^a, e^a]$ elegida y el contenido de materia. El formalismo es covariante pero no invariante al cambio de congruencias. Todavía tenemos libertad de elegir la congruencia más conveniente para describir la evolución. En general, nos convendrá trabajar con la congruencia más natural que describe el tensor de energía impulso. Por ejemplo, si analizamos un espacio-tiempo con un fluido homogéneo en expansión (e.g. FLRW) pero tomamos una congruencia acelerada, aparecerá un flujo de calor Q no nulo.

5.3.2. Simetrías y cantidades conservadas: el vector de Kodama y la masa de Misner-Sharp

En un espacio-tiempo esféricamente simétrico siempre podemos definir un campo vectorial tipo tiempo que posee propiedades similares a un vector de Killing: el vector de Kodama (Kodama 1980). Este vector está definido como el único vector ortogonal, y con la misma norma al gradiente del radio areal:

$$k^a := \epsilon_{\perp}^{ab}\nabla_b R, \quad (5.51)$$

donde $\epsilon_{\perp}{}^{ab} := \eta_{dabc}\hat{\phi}^d\hat{\theta}^d$ es el tensor de Levi-Civita proyectado en la esfera, ortogonal al espacio base; aquí $\hat{\phi}^d\hat{\theta}^d$ son vectores unitarios esféricos. Dado que $k^a\nabla_a R = 0$, las curvas integrales de \mathbf{k} se encuentran en un radio de área constante (Abreu y Visser 2010). Además, la divergencia misma de este vector es nula $\nabla_a k^a = 0$; el vector de Kodama se reduce al vector de Killing en el vacío.

El vector de Kodama (tipo tiempo) define una congruencia con tetravelocidad dada por $\kappa^a = k^a/|k|^{-1}$ siempre que $k^a k_a < 0$. De esta manera, tomando el par $[\kappa^a, e^a]$, con $e^a = \nabla^a R/|\nabla R|$ la congruencia cumple $\left(\frac{2}{3}\Theta - \Sigma\right) = 0$. En esta congruencia, el radio es estacionario, $\dot{\mathcal{K}} = 0$, ver Ec. (5.50).

En efecto, la cantidad $\left(\frac{2}{3}\Theta - \Sigma\right)$ no es otra cosa que el escalar de expansión sobre la superficie de la esfera que tratamos en Capítulo 4. Si proyectamos la métrica bidimensional

sobre la descomposición de la tetravelocidad en (5.33), obtenemos:

$$\theta := q_b^a \nabla_a u_b = \left(\frac{2}{3} \Theta - \Sigma \right). \quad (5.52)$$

Estas congruencias son entonces *cuasilocalmente rígidas*, i.e. las distancias sobre la esfera permanecen constante, lo cual implica que el radio es constante en el tiempo. Para una congruencia cuasilocalmente rígida, las ecuaciones se simplifican considerablemente y obtenemos las restricciones adicionales a partir de $\hat{\theta} = \hat{\theta} = 0$:

$$\mathcal{E} = -\mathcal{A}\phi + \frac{1}{3}(\rho + 3p - 2\Lambda) + \frac{1}{2}\Pi, \quad Q = -\frac{3}{2}\phi\Sigma. \quad (5.53)$$

Para el caso en el cual el espacio-tiempo admite un vector de Killing, la congruencia isométrica es una congruencia rígida (ver resultados en la Sección 4.1) y por lo tanto $\Theta = \Sigma = 0$. En este formalismo se puede probar fácilmente el teorema de Birkhoff: en vacío (con constante cosmológica) si el espacio-tiempo es simétricamente esférico, siempre existe un vector de Killing tipo tiempo, y la curvatura de Weyl tiene solución única dada por $\mathcal{E} = C\mathcal{K}^{3/2}$ donde C es una constante; ver demostración en [Ellis y Goswami \(2013\)](#).

Una característica importante del vector de Kodama es la posibilidad de definir corrientes conservadas, J^a . Por ejemplo, podemos formar la corriente:

$$J^a := T_b^a k^b, \quad (5.54)$$

que cumple inmediatamente $\nabla_a J^a = 0$ dado que $\nabla_a T^{ab} = 0$ ⁵. La existencia de estas cantidades conservadas en situaciones generales (dependientes del tiempo) para espacios esféricamente simétricos es una propiedad no trivial y notable⁶; surge naturalmente de la descomposición del espacio-tiempo en un producto alabeado y la posibilidad de encontrar una dirección preferencial en un espacio de (1+1) dimensiones ([Abreu y Visser 2010](#)). Veamos ahora la carga asociada a la corriente J^a . Para ello, vemos primero que J^a se puede reescribir como $J^a = \nabla_b(\epsilon^{ab}M/(4\pi R^2))$, donde:

$$M := \frac{R}{2}(1 - \nabla_a R \nabla^a R), \quad (5.55)$$

es la llamada *masa de Misner-Sharp-Hernandez* (MSH). Esta cantidad, introducida por [Misner y Sharp \(1964\)](#) es de gran utilidad para analizar la dinámica de espacio-tiempos esféricos. La masa MSH representa la energía activa gravitatoria en un espacio tiempo esféricamente simétrico y posee numerosas propiedades interesantes investigadas sistemáticamente por [Hayward \(1996\)](#): (a) en espacio-tiempos asintóticamente planos, la masa MSH coincide con la masa ADM y la masa de Bondi en el infinito espacio e infinito nulo; (b) en vacío, la masa MSH es constante y coincide con el parámetro de Schwarzschild; (c) si se cumple el NEC, la masa es monotonamente creciente en dirección radial, y (d) es positiva en hipersuperficies no atrapadas.

En esta sección, mostramos nuevas propiedades de la masa MSH utilizando nuestro formalismo. Mostraremos primero en nuestra notación que esta cantidad es la carga de la

⁵Notar la diferencia de signos con la definición de ([Abreu y Visser 2010](#))

⁶Este hecho se conoce como *el milagro de Kodama*

corriente J^a , resultado ya obtenido por Hayward utilizando coordenadas dualmente nulas. Aplicando directamente la divergencia y utilizando que $\nabla_a(\epsilon^{ab}/R^2) = 0$ (Abreu y Visser 2010) junto con las ecuaciones de movimiento para la curvatura Gaussiana, vemos que $J^a = \nabla_b(\epsilon^{ab}M/(4\pi R^2)) = T_b^a k^b$. Integremos ahora la corriente en una región del espacio-tiempo cerrada; del teorema de Stokes (Poisson 2004b), integrando $\nabla_a J^a$ tenemos:

$$\int_{\Omega} \nabla_a J^a \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial\Omega} J^a d^3\Sigma_a = 0 \quad (5.56)$$

$$\left(\int_{\Sigma_2} - \int_{\Sigma_1} \right) J^\mu d^3\Sigma_\mu = - \int_{\sigma} J^\mu d^3\sigma_\mu \quad (5.57)$$

Tomando el dominio de integración Σ ortogonal a la dirección temporal dada por el vector de Kodama k^a con un vector radial unitario $k^a e_a = 0$, tenemos que el elemento de volumen es $d^3\Sigma_a = \epsilon_{ab} e^b dR d\Phi d\Theta$ (ver Eq. 3.15 en (Poisson 2004b)). Con esto, podemos integrar J^a con lo cual obtenemos⁷:

$$M(\Sigma_2) - M(\Sigma_1) = \int_{\sigma} T^{ab} k_b e_b dr dt. \quad (5.58)$$

Si T_{ab} es cero en el infinito podemos tomar una hipersuperficie con $r \rightarrow \infty$ y obtenemos que M global se conserva en el tiempo; de la misma manera, M se conserva si T_{ab} no cambia en la dirección temporal marcada por el vector de Kodama. Dado que no hay radiación gravitacional en espacios esféricamente simétricos, la energía solo crece si el flujo de materia es no nulo. Esto no quiere decir que la energía está determinada localmente por el contenido de materia solamente. En efecto, utilizando las ecuaciones para las derivada de la curvatura Gaussiana, podemos escribir la ecuación (5.55) para la masa de MSH explícitamente como

$$M := 4\pi R^3 \left(\frac{1}{3}(\rho + \frac{\Lambda}{4\pi}) - \frac{\mathcal{E}}{8\pi} - \frac{\Pi}{2} \right), \quad (5.59)$$

donde vemos que la energía tiene una contribución local de materia y otra contribución no local dada por el tensor de Weyl; podemos escribir entonces:

$$M = M_{\text{Weyl}} + M_{\text{Ricci}}. \quad (5.60)$$

El término local de Ricci cuantifica la energía gravitacional generada por el contenido de materia en un dado radio. La expresión tiene la forma simple de [volumen] \times [densidad], pero recordemos que $4/3\pi R^3$ no es el volumen propio del espacio-tiempo. El término no local de Weyl, M_{Weyl} , cuantifica la energía gravitacional no local, por ejemplo, generada por una sobredensidad de materia. Veamos algunos ejemplos conocidos:

- FLRW: En este caso el tensor de Weyl es cero y tenemos que $M = (4/3)\pi R^3 \rho(t)$, donde $\rho(t)$ es la densidad homogéna.
- Schwarzschild-de Sitter: Por el contrario, en vacío, la masa MSH se conserva y es constante $M = m + (4/3)\pi \Lambda R^3$, donde $M_{\text{Weyl}} = m$ es el parámetro de masa en la métrica.

⁷La integración es explícita utilizando que $\epsilon^{ab}M/(4\pi R^2)$ es antisimétrico y la ecuación 3.24 en (Poisson 2004b))

- McVittie: Este es un caso interesante ya que la masa de Weyl es constante, i.e. el espacio-tiempo representa una masa puntual, junto a un fondo en expansión $M = m + (4R^3/3)(\pi + \Lambda)$.

Estos ejemplos muestran que la masa de MSH puede ser útil para interpretar físicamente soluciones de las ecuaciones de Einstein; por ejemplo, si la solución posee una masa MSH de Weyl no nula y constante, entonces existe una inhomogeneidad puntual en el espacio-tiempo. Mostraremos ahora que la masa MSH representa la contribución puramente gravitatoria en las ecuación geodésica. Para ello, consideremos una congruencia geodésica con tetravelocidad u^a y un vector conector η^a que conmuta con u^a . La ecuación de desviación geodésica está dada entonces por

$$\ddot{\eta}^a = -R_{bcd}^a u^b \eta^c u^d. \quad (5.61)$$

Descomponiendo el tensor de Riemann en su parte de Weyl y su parte de Ricci y usando las ecuaciones de Einstein, obtenemos:

$$\ddot{\eta}^a = -(E_b^a - 4\pi\pi_b^a)\eta^b - \left[\frac{4}{3}\pi(\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3}\Lambda\right]\eta^a. \quad (5.62)$$

Esta ecuación es válida para cualquier espacio-tiempo. Ahora nos enfocamos en nuestro caso de un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Usando la descomposición de los tensores sin traza E_{ab} y π_{ab} y un vector conector sobre la esfera, usamos $-(E_b^a - 4\pi\pi_b^a)\eta^b \equiv (1/2)(\mathcal{E} - 4\pi\Pi)\eta^b$. Podemos entonces, reescribir la ecuación geodésica como:

$$\ddot{\eta}^a = -\frac{M}{R^3}\eta^b - \left(4\pi(\Pi + p) - \frac{\Lambda}{2}\right)\eta^a. \quad (5.63)$$

De esta manera aislamos la contribución puramente gravitacional, que queda encapsulada en M , de efectos “hidrodinámicos” por fuerzas de presión del fluido. Finalmente, podemos evaluar la evolución local en el tiempo y en la dirección radial de la masa de MSH, que se desprende inmediatamente utilizando las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{M} = 2\pi R^3 \left[\theta \left(p - \frac{\Lambda}{8\pi} \right) + Q\phi \right], \quad (5.64)$$

$$\dot{\hat{M}} = 2\pi R^3 \left[\phi \left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi} \right) + \theta Q \right]. \quad (5.65)$$

En la congruencia de Kodama, $\theta = 0$, y obtenemos que la variación en el tiempo de la energía gravitacional ocurre a través solamente del flujo de calor $Q = T^{\hat{R}\hat{t}}$, i.e. esta es la forma local de la conservación que mostramos en (5.58). En esta congruencia, la variación radial de la energía depende solamente de la densidad de energía local. Cualquier otra congruencia que no es cuasilocalmente rígida, e.g. una congruencia geodésica, tendrá contribuciones adicionales de carácter geométrico a la energía por la expansión en combinación con la presión. Aplicaremos estas expresiones en las siguientes secciones.

5.3.3. Horizontes y el contenido de materia

Con el formalismo que desarrollamos en la sección anterior podemos analizar sistemáticamente la dinámica de horizontes atrapados y anti atrapados (ver Sección 1.4). En particular, describimos la evolución de estos horizontes y sus propiedades en base al contenido de materia y curvatura del espacio-tiempo con las restricciones que imponen las ecuaciones de Einstein.

Consideremos una hipersuperficie tridimensional H foliada por un conjunto de esferas \mathcal{S} y una base de geodésicas nulas normales a la esfera $[l^a, k^a]$ con l^a el vector nulo saliente a la esfera y k^a el vector entrante. Podemos escribir estos vectores como combinación lineal de vectores en el plano de una ccongruencia $[u^a, e^a]$:

$$l^a = \frac{1}{\sqrt{2}E}(u^a + e^a), \quad k^a = \frac{E}{\sqrt{2}}(u^a - e^a) \quad (5.66)$$

donde $l^a k_a = -1$ y donde E es una función positiva arbitraria que se relaciona con la energía de los haces de luz tangentes a los vectores nulos. Los escalares de expansión están dados, utilizando la descomposición en la Eq. (5.32):

$$\theta^l = \frac{E}{\sqrt{2}} q^{ab} \nabla_a (u_b + e_b) \equiv (\theta + \phi), \quad (5.67)$$

$$\theta^k = \frac{1}{E\sqrt{2}} q^{ab} \nabla_a (u_b - e_b) \equiv (\theta - \phi). \quad (5.68)$$

De estas fórmulas vemos claramente que congruencias cuasilocalmente rígidas ($\theta = 0$) sólo existen en regiones normales del espacio-tiempo, donde $\theta^k \theta^l = -\phi^2 < 0$. En superficies marginales (MTS), donde $\theta^k \theta^l = 0$, las congruencias con $\theta = 0$ deben satisfacer además $\phi = 0$, con lo cual ambos escalares de expansión se anulan. De esta manera, las congruencias cuasilocalmente rígidas no poseen horizontes atrapados ya que estos requieren que el otro escalar de expansión sea no nulo. Geométricamente, $\phi = 0$ implica que la dirección espacial e^a de la congruencia y la dirección de crecimiento radial se vuelven ortonormales; por la Eq. (5.50) tenemos que $e^a \nabla_a R = \phi R/2 \rightarrow 0$. Esto ocurre por ejemplo si tomamos una congruencia estática de Schwarzschild, donde $\phi = \sqrt{1 - 2m/r}(2/r)$ y nos acercamos al horizonte. En otras palabras, la dirección radial no está bien definida en $\phi = 0$.

Para calcular la ubicación de horizontes atrapados en simetría esférica se suelen utilizar técnicas basadas en coordenadas, c.f. (Faraoni 2015; Abreu y Visser 2010), donde la métrica se lleva a una forma diagonal, i.e. el gauge de Kodama, y el horizonte se encuentra resolviendo $g^{RR}(t, R) = 0$. Este método oculta, sin embargo, que la superficie resultante es solo una superficie marginal y no un horizonte atrapado, para el cual también se requiere que el otro escalar de expansión sea no nulo. De acuerdo a las ecuaciones (5.67-5.68), esto siempre ocurre para congruencias con $\phi > 0$.

Nuestro objetivo ahora es analizar la naturaleza de estas superficies en espacio-tiempos esféricos. Consideremos primero el caso anti-atrapado, $\theta^k = 0$ y $\theta^l > 0$ y calculemos $\mathcal{L}_l \theta^k$. Utilizando las ecuaciones de Einstein, podemos calcular directamente la derivada en la dirección saliente l^a como:

$$\mathcal{L}_l \theta^k = (\dot{\theta} - \dot{\phi}) + (\hat{\theta} - \hat{\phi}), \quad (5.69)$$

y utilizando las ecuaciones de Einstein obtenemos la derivada:

$$\mathcal{L}_l \theta^k = \frac{8\pi}{3}(\rho - 3p) + \frac{2}{3}\Lambda + 2\mathcal{E}. \quad (5.70)$$

Para derivada de Lie positiva, el horizonte es tipo tiempo, mientras que derivada negativa implica un horizonte tipo espacio. Un horizonte cosmológico se caracteriza entonces para cualquier espacio-tiempo esférico como aquel que cumple:

$$\frac{4\pi}{3}(\rho - 3p) + \frac{1}{3}\Lambda + \mathcal{E} > 0. \quad (5.71)$$

Un aspecto notable de esta condición es que la naturaleza del horizonte depende solamente de la contribución isotrópica del tensor de energía impulso, i.e. no depende del flujo Q ni de Π .

Como es bien sabido ([Hayward 1996](#)), la masa de MSH en el horizonte es equivalente al doble del radio del horizonte. En efecto, de la definición original (5.55), dado que en el horizonte se cumple $\nabla_a R \nabla^a R = 0$ tenemos que $R = 2M$. Algunas observaciones sobre la energía en el horizonte:

- Dado que $M = R/2$ en el horizonte, evaluando la ecuación (5.58) sobre el horizonte obtenemos:

$$\frac{R_2}{2} - \frac{R_1}{2} = \int_{\sigma} T^{ab} k_b e_b dr dt. \quad (5.72)$$

i.e. recuperamos la ecuación de balance obtenida por [Ashtekar y Krishnan \(2003\)](#).

- De la Ec. (5.49), el radio queda determinado exactamente por la curvatura y el contenido de materia:

$$R_H = \left(\frac{1}{3}(\Lambda + \rho) - \mathcal{E} - \frac{1}{2}\Pi \right)^{-1/2}. \quad (5.73)$$

Esta es una expresión formal ya que tanto la curvatura como la densidad pueden en general depender de R . Notemos que para densidades grandes, el radio es más pequeño, y que no depende de la presión. A su vez, tenemos una condición mínima de existencia de estos horizontes totalmente no trivial: el denominador debe ser mayor que cero:

$$\mathcal{E} < \frac{1}{3}(\Lambda + \rho) - \frac{1}{2}\Pi \quad (5.74)$$

Finalmente, analicemos el flujo de energía local sobre el horizonte. Si tenemos un horizonte atrapado pasado o un horizonte atrapado futuro tenemos respectivamente $\phi = \pm\theta$ y en ambos casos $\phi > 0$, con lo cual el flujo local de energía sobre el horizonte está dada por:

$$\dot{M} = 2\pi R^3 |\phi| \left(Q \pm \left(p - \frac{\Lambda}{8\pi} \right) \right). \quad (5.75)$$

Para horizontes cosmológicos vemos que la presión no nula tiende a crecer el horizonte y lo contrario ocurre en horizontes de agujeros negros.

5.4. Horizontes de materia: infinito-finito

Los horizontes atrapados ($\sim 1/H$) demarcan naturalmente una escala en la cual, en un tiempo dado, el sistema interior está aislado del universo exterior, i.e. los rayos de luz entrantes se congelan sobre el horizonte. Como el horizonte evoluciona, esta frontera no es propiamente un horizonte de eventos, y de hecho este último sólo existirá si el Universo está acelerado. Por otra parte, el horizonte causal en nuestro Universo no es determinante para la evolución de nuestro entorno local; lo que determina fuertemente la evolución local (formación de galaxias y otros subestructuras) es el contenido de materia que está gravitacionalmente ligada a nuestro sistema, es decir, es más relevante la velocidad del sonido que la velocidad de la luz para analizar esto. En el modelo Λ CDM, el entorno local ligado gravitacionalmente está asociado con la escala máxima de *turnaround* de las estructuras que se forman a partir de perturbaciones primordiales. En escalas comóviles, desde el período donde se generan las perturbaciones (e.g. inflación) hasta nuestra época, solo nos afecta lo que se encuentra a un radio de ~ 100 Mpc (Ellis y Stoeger 2009).

La separación entre una región global y local se debe determinar sobre membranas tipo tiempo, como discutimos en el Capítulo 2. Estas condiciones establecen lo que denominamos un infinito-finito: una región que podemos considerar la frontera de nuestro sistema local con respecto a la expansión del Universo. Las condiciones que discutimos anteriormente para determinar \mathcal{F}_I son muy generales. En esta sección nos enfocaremos en cambio en la condición más importante que debe cumplir esta región: el flujo de energía a través de \mathcal{F}_I debe estar limitado. Consideraremos también el caso simple de simetría esférica, donde podremos aplicar los resultados de la sección anterior.

Nos interesa entonces encontrar el radio de la frontera \mathcal{F}_I en el cual el flujo de energía total es despreciable. Para ello basta tomar la ecuación para el flujo de energía (5.64). La ecuación establece que el radio donde el flujo es cero está determinado:

$$\phi Q + \theta \left(p - \frac{\Lambda}{8\pi} \right) = 0. \quad (5.76)$$

Consideremos una congruencia fundamental (geodésica) en la cual el fluido no tiene flujos de calor $Q = 0$. En este caso el radio de separación queda determinado por la condición $\theta = 0$. Esto implica que el radio de la región de separación es constante sobre la congruencia, $\dot{R} = 0$. Para un universo de FLRW está claro que esta superficie no existe. Por otro lado podemos determinar una condición adicional de estabilidad para la región de separación si requerimos que $\ddot{R} = 0$, que implica $\dot{\theta} = 0$. Usando la Ec. (5.39), y utilizando que M es constante en el tiempo, obtenemos que la región de separación debe cumplir:

$$\frac{M(R)}{R^3} = \frac{2}{3}\Lambda - (p + \Pi). \quad (5.77)$$

La condición depende de la masa de MSH en el radio R ; notemos que esta masa está definida cuasilocalmente sobre un dado radio y no es una cantidad volumétrica. El mismo resultado valdría si se reemplaza el interior de la región por un cascarón esférico con la misma masa. Notemos que para una masa constante de Weyl constante y $p = \Pi = 0$, recuperamos la condición de radio máximo de turnaround que discutimos en el Capítulo 3 para una masa

aislada; para ello, debemos separar la masa total $M(R)$ en su parte de Weyl y tener en cuenta la energía de la constante cosmológica ($4\pi/3\Lambda R^3$).

Adoptando la nomenclatura de la discusión cualitativa de (Ellis y Stoeger 2009), en un Universo en expansión, la primer condición $\theta = 0$ representa un *horizonte de materia presente*, para el cual tenemos expansión fuera y colapso dentro de ese radio. El colapso continuará hasta las escalas de viralización donde ya no podemos usar simetría esférica. Por otro lado, las dos condiciones constituyen un *horizonte de materia futuro*, i.e. el radio máximo en el cual no tenemos más flujo de materia entrante en nuestro entorno local. Es interesante notar que este resultado es completamente relativista pero las expresiones son muy similares a las que podemos obtener en el colapso esférico Newtoniano para tratar este problema, aunque las nociones de masa y radio areal no son completamente equivalentes.

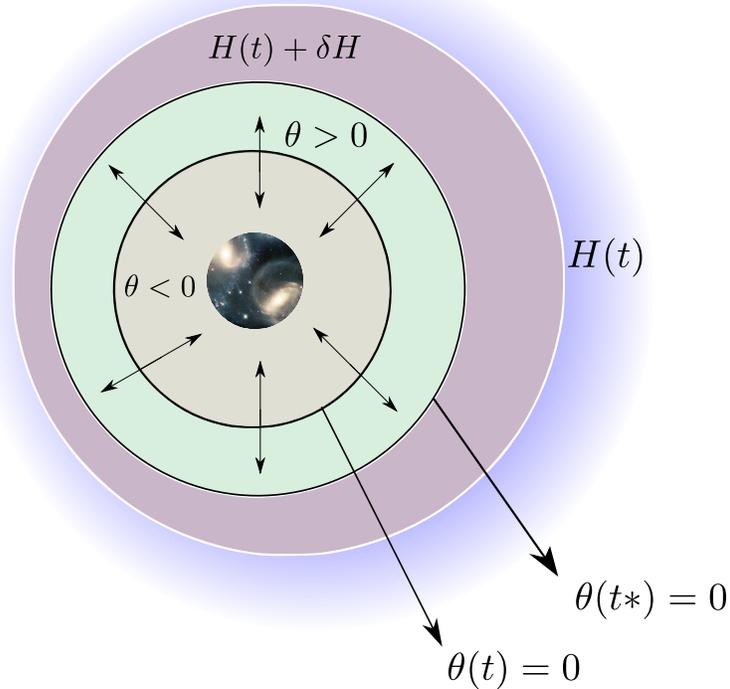


Figura 5.2: **Representación esquemática de diferentes escalas de influencia local.** En la parte interior tenemos estructuras ya colapsadas y viralizadas, en donde la expansión promedio es nula. En la región donde $\theta < 0$ la materia está siendo acretaada por la sobredensidad central hasta llegar a un radio donde $\theta = 0$, que divide la expansión del colapso de materia. La materia fuera de esta región se expande pero no sigue el flujo de Hubble ya que están siendo atraídas por la sobredensidad. En efecto, en un tiempo futuro, estas estructuras colapsarán eventualmente. El radio máximo de la estructura para el cual ya no hay más colapso es el horizonte de materia futuro, para el cual el sistema alcanza un equilibrio: lo que se encuentra afuera de esta superficie $\theta(t_*) = 0$ no puede ser acretaado por la presencia repulsiva de la constante cosmológica. Fuera de este radio, tenemos materia expandiéndose con perturbaciones al flujo de Hubble y mucho más afuera, la materia se expande con el flujo de Hubble global.s

5.5. Interacción entre horizontes

En un universo en expansión, las métricas que modelan un agujero negro tienen en general dos horizontes: el horizonte interior de agujero negro y un horizonte cosmológico, e.g. la métrica de Kottler y la métrica de McVittie (ver Capítulo 2). Si la métrica tiene simetría esférica, entonces eligiendo una foliación esférica encontramos horizontes a diferentes radios, donde usualmente el radio del agujero es mucho menor que el cosmológico, $R_{\text{BH}} \ll R_{\text{Cosm}}$, para que no haya una singularidad desnuda. Estos horizontes pueden evolucionar de diferentes maneras, dependiendo del modelo de Universo y cómo crece la masa del agujero negro; es posible, incluso, que el horizonte cosmológico colapse al del agujero negro si la masa de este crece lo suficiente o el Universo recolapsa.

Los horizontes marginalmente atrapados no son únicos cómo muestran los teoremas de [Andersson et al. \(2005\)](#): siempre existe una familia de horizontes ligeramente distorsionados entre sí que mantienen la condición de horizonte. Además, los horizontes aparentes pueden estar completamente ausentes si se toman foliaciones especiales del espacio-tiempo ([Wald y Iyer 1991](#)). En cosmología, los horizontes son fuertemente dependientes del observador. Particularmente, en FLRW existe un horizonte atrapado rodeando cada punto de la métrica. Cuando el modelo de universo contiene un agujero negro, la dependencia del observador ya no es tan clara. En un espacio-tiempo asintóticamente plano podemos definir la superficie atrapada del BH para cualquier observador. Si el observador tiene una velocidad uniforme no nula, entonces la superficie atrapada se verá ligeramente deformada, pero el horizonte de eventos global se mantendrá invariante. En un espacio-tiempo con constante cosmológica, sin embargo, diferentes observadores tienen asociados un horizonte de eventos cosmológico y el horizonte de eventos del agujero negro puede encontrarse fuera de este.

Consideremos un universo acelerado que posee un agujero negro a una cierta distancia del observador. Si el observador no está gravitacionalmente ligado al agujero negro, el agujero se moverá inercialmente con la expansión hasta perderse por el horizonte cosmológico. Cabe preguntarnos entonces: ¿interactúan estos horizontes? ¿qué ocurre con el horizonte cosmológico cuando el agujero negro atravieze el horizonte? En esta sección analizamos la interacción dinámica entre un horizonte atrapado de BH y un horizonte cosmológico. Para ello, construimos una foliación particular en la cual el BH está desplazado del observador central y se mueve inercialmente con la expansión hasta perderse por el horizonte. Encontramos las superficies marginalmente atrapadas en esta foliación y analizamos sus propiedades. Nos centraremos en el caso sencillo de un universo con constante cosmológica y un agujero negro no rotante, i.e. la métrica de Kotter.

La métrica de un agujero negro en de Sitter está dada por la métrica:

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + \frac{d\rho^2}{f(\rho)} + \rho^2 d\Omega^2, \quad (5.78)$$

donde definimos

$$f(\rho) := \left(1 - \frac{2M}{\rho} - H^2 \rho^2\right). \quad (5.79)$$

con $H := \sqrt{\Lambda/3}$. Las propiedades de esta métrica ya fueron analizadas en la Sección 2.3 del Capítulo 2; la métrica tiene dos horizontes a radios fijos siempre que la masa cumpla

$M < H/\sqrt{3}$. Para nuestro análisis nos convendrá trabajar con el parche del espacio-tiempo comóvil a la expansión; podemos convertir las coordenadas estáticas de (5.78) en una métrica dependiente del tiempo realizando la transformación a nuevas coordenadas radiales comóviles $R \rightarrow r$:

$$a(t)|r| = \frac{M}{2} \left(\frac{\rho}{M} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{M}\right)^2 - 1} \right)^{-1}, \quad (5.80)$$

donde definimos $a(t) := \exp(Ht)$, con lo cual obtenemos:

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) dt^2 + (1+\mu)^4 a(t)^2 d^3x. \quad (5.81)$$

donde:

$$\mu := \frac{M}{2a(t)r}. \quad (5.82)$$

Esta es la métrica de de Sitter en su forma de McVittie. Notemos que cuando $M = 0$, la métrica se reduce al espacio-tiempo de de Sitter en su forma de FLRW, mientras que $H \rightarrow 0$ lleva a la métrica a la forma de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas. Analicemos primero cómo son los horizontes en esta foliación. Para ello consideremos dos vectores tipo tiempo y tipo espacio dados por:

$$u_a = \frac{1-\mu}{1+\mu} (dt)_a, \quad e^a = \frac{1}{(1+\mu)^2 a(t)} (\partial_r)^a, \quad (5.83)$$

que cumplen $u_a u^a = -1$, $e^a e_a = 1$, y $e^a u_a = 0$. Con estos vectores podemos formar una congruencia nula canónica de la manera usual definiendo un campo nulo entrante $k^a := (1/\sqrt{2})(u^a - e^a)$, y uno saliente $l^a := \frac{1}{\sqrt{2}}(u^a + e^a)$. Estos vectores definen una superficie cerrada de dos dimensiones con una métrica inducida definida como $q_{ab} := g_{ab} + l_a k_b + k_b l_a$ que para este caso particular se puede ver que cumple $q_b^a = \delta_b^a$. La expansión de estos vectores está dada por:

$$\theta^{(k)} = -H\sqrt{2} \left(1 \pm \frac{4a(t)r(2a(t)r - M)}{H(2a(t)r + M)^3} \right), \quad (5.84)$$

Notemos en estas coordenadas se cumple $\theta^{(k)} \leq 0$ para $a(t)r \geq 2M$; dentro de este radio el espacio-tiempo se mapea en sí mismo otra vez, como ocurre con las coordenadas isotrópicas en Schwarzschild. Podemos encontrar entonces superficies marginales atrapadas entrantes (MOTS) buscando el radio tal que $\theta^{(l)} = 0$. Las dos soluciones reales son los horizontes de agujero negro y cosmológico que comentábamos anteriormente. Si $M < a(t)r$, entonces el horizonte cosmológico se puede aproximar a primer orden como $r_C \sim 1/H - 2M$, mientras que para $M > a(t)r$ el horizonte a primer orden en $a(t)r/M$ es $r_H \sim 2M + 1/H$; es decir, la presencia del agujero negro achica el tamaño del horizonte y la constante cosmológica agranda el horizonte del agujero. Es fácil ver que estos horizontes estacionarios son nulos.

Nos interesa ahora buscar una foliación en la cual el agujero negro se desplazado con respecto a un observador central y se mueva con el flujo de Hubble. Para ello, tomamos la métrica en coordenadas isotrópicas Cartesianas (5.81) y desplazamos el origen de coordenadas sobre el eje Z (sin pérdida de generalidad) con la transformación :

$$x^i = \hat{x}^i - \delta_z^i R_0, \quad (5.85)$$

donde R_0 es una constante. Esto cambia la función μ en la métrica pero el fondo cosmológico permanece invariante y la hipersuperficie espacial se mantiene conformemente plana: $dx^3 = d\hat{x}^3$; con ello si tomamos $M \rightarrow 0$ recuperamos la métrica de FLRW. Ahora, nos interesa construir la foliación de un observador en el centro coordenadas, y por lo tanto realizamos una nueva transformación a coordenadas radiales “propias” del observador central como:

$$R = a(t)\hat{r}. \quad (5.86)$$

La métrica transformada es entonces:

$$ds^2 = - \left[\left(\frac{1 + \mu(t, R, \theta)}{1 - \mu(t, R, \theta)} \right)^2 - H^2 R^2 \right] dt^2 - 2HRdRdt + (1 + \mu(t, R, \theta))^4 (dR^2 + R^2 d\Omega^2), \quad (5.87)$$

donde ahora el factor μ tiene dependencia poloidal:

$$\mu(t, R, \theta) = \frac{M}{2\sqrt{R^2 + (a(t)r_0)^2 - 2R(a(t)r_0)\cos(\theta)}}. \quad (5.88)$$

Esta foliación del espacio-tiempo ya no es esféricamente simétrica y es dependiente del tiempo. Para $t \rightarrow \infty$ tenemos $\mu \rightarrow 0$ y el espacio-tiempo aproxima a la métrica de de Sitter, i.e. el agujero sale del dominio causal determinado por la expansión acelerada. Estas nuevas coordenadas están asociadas a un observador en el centro que debe permanecer acelerado para no ser arrastrado por el BH. La nueva forma de la métrica nos permitirá analizar una “fusión” entre el horizonte cosmológico y el horizonte del agujero negro. Analicemos cómo se comporta la métrica cuando el agujero negro ya atravesó el horizonte y se puede considerar como una perturbación. Para eso tomamos el límite $R/(a(t)R_0) \leq$, con lo cual el factor μ aproxima a $\mu \sim M/(a(t)R_0)$ que tiende a cero con el tiempo. La métrica para ese caso aproxima a la métrica de de Sitter con un término extra en la componente temporal $g_{tt} \sim 1 - H^2 R^2 - M/(a(t)R_0)$. El horizonte cosmológico en estas coordenadas evoluciona como $R_C(t) \sim (1/H)(1 - M/(a(t)R_0))$ y crece a $1/H$ rápidamente.

Ahora construimos una congruencia nula canónica como hicimos anteriormente en estas coordenadas. Como no cambiamos las coordenadas temporales, volvemos a tomar el mismo covector unitario u^a tipo tiempo anterior y un nuevo vector unitario radial e^a adaptado a estas nuevas coordenadas radiales:

$$u_a = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} (dt)_a, \quad e^a = \frac{1}{(1 + \mu)^2} (\partial_R)^a. \quad (5.89)$$

Tomando esta congruencia particular, estamos suponiendo que existen horizontes de topología esférica con lo cual no podemos analizar la fenomenología más amplia que ocurre cuando dos horizontes se fusionan, e.g. autointersecciones; para ello se necesitaría adoptar los métodos numéricos de (Pook-Kolb et al. 2021). Construyendo la congruencia nula de la misma manera, podemos calcular los escalares de expansión entrantes y salientes. El escalar de expansión para l^a tiene la forma:

$$\theta^{(l)} = \sqrt{2} \left[\left(\frac{1}{(1 + \mu)^2} - HR \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right) \left(\frac{1}{R} + 2 \frac{\partial_r \mu}{1 + \mu} \right) - \frac{2\partial_t \mu}{1 - \mu} \right]. \quad (5.90)$$

mientras que el escalar de expansión entrante sigue cumpliendo $\theta^{(k)} < 0$. Para resolver la ecuación $\theta^{(l)} = 0$, necesitamos resolver una ecuación algebraica no lineal para $R(t, \theta)$. Para ello, utilizamos un método de bisección implementado en la rutina `ContourPlot` en Mathematica. Adoptamos una posición inicial del agujero negro en $R_0 = 2M$ sobre el eje Y y valores $M = 1$, $\Lambda = 0,001$, con lo cual se cumple $R_{\text{BH}} \ll R_C$. Los valores están enormemente exagerados para mostrar la fenomenología más claramente. Mostramos los resultados en las Figuras 5.3 y 5.4. En naranja mostramos el horizonte cosmológico cuando $M = 0$ y en verde mostramos el horizonte de agujero negro con $\Lambda = 0$.

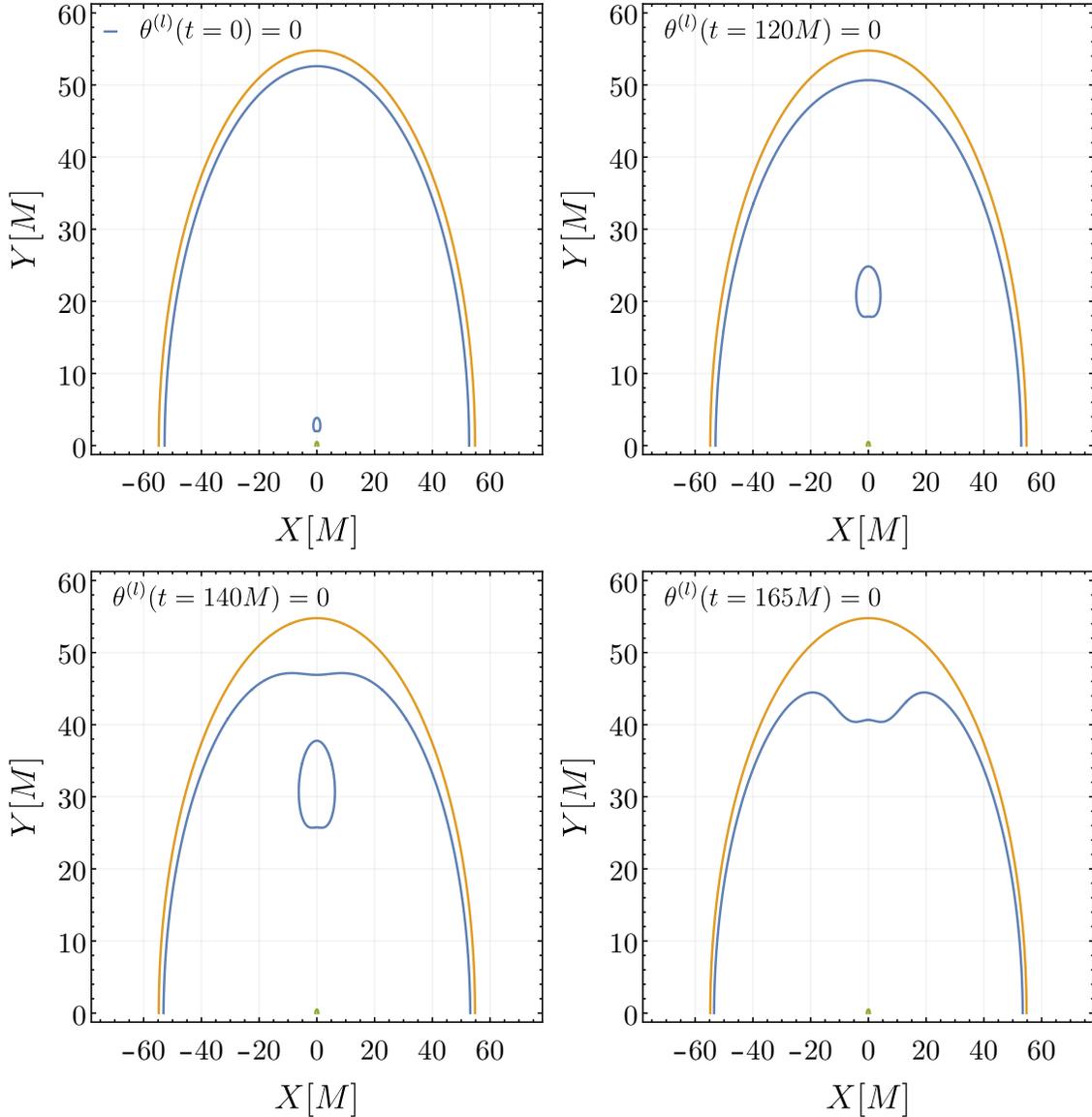


Figura 5.3: Solución para $\theta^{(l)} = 0$ para diferentes tiempo (en azul). El horizonte cosmológico con $M = 0$ se representa en amarillo y el horizonte de agujero negro con $\Lambda = 0$ en verde (pequeño abajo).

Comenzando con un desplazamiento pequeño, el horizonte de agujero negro se aleja exponencialmente del observador en el centro. A medida que se acerca al horizonte cosmológico,

el área del horizonte del BH, descrito en esta foliación, crece por la interacción tidal del horizonte cosmológico. En $t \sim 165M$, ambos horizontes se fusionan y se combinan en un mismo horizonte; notemos que la singularidad queda del otro lado en la región anti-atrapada. Luego, el agujero negro emerge del otro lado del horizonte cosmológico y este crece su área adiabáticamente hasta alcanzar el área de un horizonte de de Sitter en vacío. Por otro lado, el horizonte del agujero negro en la región ya inaccesible al observador, queda también con un área mayor a su área original.

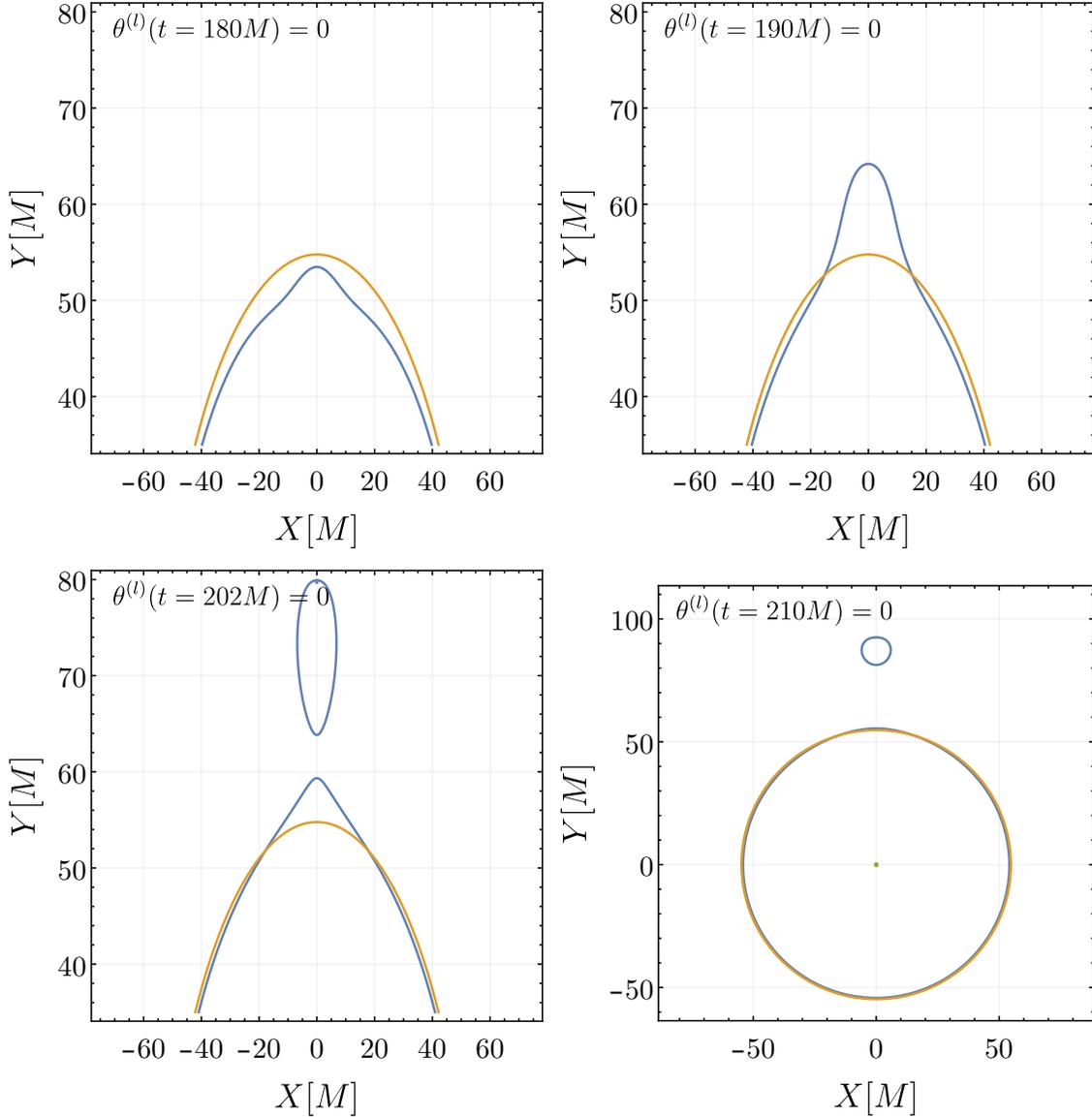


Figura 5.4: Igual que la Figura anterior para cuando el horizonte del BH emerge del otro lado

Durante la interacción, la cizalladura sobre el horizonte es no nula, indicando que (a) hay un flujo de energía gravitacional no nula a través del horizonte cosmológico y que (b) la signatura del horizonte pasa a ser tipo tiempo, dado que también se cumple que $\mathcal{L}_k \theta^{(l)} > 0$. Este simple escenario dinámico puede servir para analizar algunas propuestas sobre la entropía

y la evolución de estos horizontes aparentes (Bousso y Engelhardt 2015). Realizaremos un análisis más detallado en nuestro próximo trabajo.

5.6. Conclusiones

En este capítulo analizamos propiedades de horizontes cosmológicos atrapados: hipersuperficies que rodean una región lo suficientemente grande para que la expansión sea más rápida que la velocidad de la luz. En términos más precisos, hipersuperficies foliadas por superficies atrapadas donde la expansión de rayos entrantes es cero. Estas hipersuperficies son diferentes a los horizontes de agujero negro ya que son en general de signatura temporal, lo que implica que localmente no dividen causalmente regiones del espacio-tiempo. Nuestras conclusiones se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Caracterizamos un horizonte cosmológico siguiendo la clasificación de Hayward (1994) y mostramos ejemplos de que estos horizontes pueden ser pasados o futuros, lo que implica inmediatamente que incrementan o decrecen su área, respectivamente.
- Tomando un punto de vista holográfico o cuasilocal, utilizamos los desarrollos de Israel y Brown-York para caracterizar la energía de una membrana cosmológica. Utilizamos la construcción cuasilocalmente rígida y calculamos la energía en una esfera de radio fijo en un Universo en expansión. Encontramos que el flujo de energía gravitacional está relacionado a la aceleración del Universo.
- Desarrollamos un formalismo para analizar los horizontes en espacio-tiempos esféricamente simétricos utilizando la descomposición 1+1+2. Encontramos que la signatura del horizonte está determinada por el signo de la fórmula $\frac{4\pi}{3}(\rho - 3p) + \frac{1}{3}\Lambda + \mathcal{E}$, siendo tipo tiempo si esto es positivo.
- Analizamos el contenido de energía gravitacional dado en simetría esférica por la masa de MSH en términos de la materia y curvatura del espacio-tiempo. Mostramos cómo están relacionados los flujos de energía en términos de los escalares de expansión espaciales y temporales. Mostramos que sobre el horizonte recuperamos la ley de crecimiento del área dada por Ashtekar y Krishnan (2003). Determinamos también cómo es el radio del horizonte cosmológico en términos del contenido de materia y curvatura del espacio-tiempo.
- Mostramos que la MSH tiene una interpretación directa en términos de la ecuación de desviación geodésica, donde representa la contribución puramente gravitacional.
- En este formalismo, analizamos brevemente el concepto de horizonte de materia o infinito-finito, introducido en el Capítulo 2, para el cual una región se separa de su entorno en expansión. Deducimos condiciones de estabilidad para determinar cuándo una región local estática estará en equilibrio con el Universo en expansión.
- Finalmente, analizamos la fusión de un horizonte cosmológico y el horizonte de agujero negro. Para ello, tomamos la métrica de Schwarzschild-de Sitter y encontramos un cambio de coordenadas adaptado a un observador desplazado del agujero negro para el

cual el agujero se mueve inercialmente con el flujo de Hubble. Encontrando las superficies atrapadas, mostramos que estos horizontes interactúan y poseen una dinámica no trivial e interesante.

6

Radiación y campos electromagnéticos cosmológicos

Cuando un campo físico es perturbado, los cambios en sus propiedades se propagan hacia otros puntos del espacio bajo las restricciones que impone la estructura causal del espacio-tiempo. Las perturbaciones en un campo son generadas por fuentes movimiento, e.g. cargas eléctricas en el caso electromagnético y sistemas con energía-impulso en Relatividad General. El cambio en el tiempo de un campo puede estar ligado al movimiento de las fuentes o desacoplarse de ellas. Por ejemplo, en el caso de una carga en movimiento uniforme en un sistema de referencia, el campo eléctrico cambia con el tiempo, pero el flujo de energía neto lejos de la fuente es cero. Por otra parte, si la carga posee un movimiento acelerado, podemos distinguir una componente del campo EM que se desacopla de la fuente y transporta energía hasta infinito; en ese caso, decimos que el campo es *radiativo*. De manera análoga, si un sistema material (con energía) cambia en el tiempo con un momento cuadrupolar distinto de cero, emitirá radiación gravitatoria. En teoría cuántica de campos, la componente radiativa adquiere una entidad propia y se puede identificar con partículas mediadoras del campo, e.g. fotones y gravitones.

La radiación se define, usualmente, de manera global: cuando el flujo de energía *en infinito* es distinto de cero, entonces decimos que el campo produce radiación. Esta definición supone que el espacio-tiempo cumple una serie de condiciones asintóticas en infinito que permiten distinguir una componente de flujo saliente de manera invariante (ver Capítulo 2). En el contexto de sistemas embebidos en el Universo en expansión estas condiciones no están bien definidas; debemos entonces tratar de formular una noción local de radiación. Si intentamos hacer esto nos encontraremos inmediatamente con una aparente paradoja, atribuida a Born. Supongamos que una carga se encuentra estacionaria en la superficie de la Tierra para lo cual tiene que permanecer acelerada con respecto al espacio-tiempo de fondo. Un observador en la superficie de la Tierra estacionario junto a la carga, es decir acelerado, no ve radiación, como sabemos de nuestra experiencia. Un observador en caída libre, sin embargo, sí detectará radiación ya que la carga está acelerada. ¿Por qué la carga parece no radiar en el sistema estacionario a ella? ¿se viola el principio de equivalencia? La respuesta a esta paradoja es simplemente que las ecuaciones de Maxwell en un sistema acelerado no son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell en un sistema inercial (Rohrlich 2007). Pese a que podemos encontrar una transformación de Lorentz del sistema inercial al sistema acelerado de manera local, para definir radiación necesitamos al menos un entorno en el cual tomar integrales de flujos, es decir, necesitamos un sistema extendido. El aspecto cuántico de este problema se

relaciona con la llamada radiación de Unruh, el fenómeno en el cual el estado fundamental de un campo cuántico cambia para observadores acelerados. En resumen, la radiación no es un concepto completamente covariante ya que no es equivalente para observadores inerciales y no inerciales. Algunos aspectos de este problema todavía siguen siendo materia de discusión.

La radiación depende del estado inercial del sistema de referencia y por lo tanto del espacio-tiempo. Partículas en movimiento inercial pueden emitir radiación si el espacio-tiempo está curvado (Kuchar et al. 2013; Higuchi et al. 1997; Trzetrzelewski 2017), por ejemplo, una carga orbitando un agujero negro. El Universo a gran escala también tiene curvatura, ¿Qué ocurre con la dinámica de cargas en el Universo en expansión? Para un modelo homogéneo e isotrópico, la métrica de FLRW es localmente conforme a la métrica de Minkowski. El análisis de los campos electromagnéticos en un fondo cosmológico se simplifica enormemente porque las ecuaciones de Maxwell son invariantes conformes; de esa manera podemos aplicar resultados conocidos en Relatividad Especial. Una consecuencia importante de esto es que los campos electromagnéticos en el sistema de referencia del fluido cosmológico decaen adiabáticamente como $\sim \vec{E}/a(t)^2$, donde \vec{E} es una solución a las ecuaciones de Maxwell en Minkowski. Notemos que esto vale *solamente* para las ecuaciones de Maxwell en el vacío y para factores conformes dependientes del tiempo. Cuando introducimos cargas o consideramos espacios de FLRW con curvatura, la situación cambia. En efecto, el movimiento de las cargas no se mapean trivialmente a la métrica de Minkowski; geodésicas en un espacio conforme pueden no serlo en el otro espacio. Si cambiamos de sistema de referencia o consideramos factores conformes dependiente de la posición, los campos no se transforman de manera adiabática. Tenemos entonces un abanico de efectos no triviales asociado al movimiento de cargas en un Universo en expansión. Estos efectos no han sido explorados en profundidad, excepto para casos particulares en la métrica de de Sitter (Akhmedov et al. 2010); entender este comportamiento de manera clásica también nos puede ayudar a entender la dinámica de partículas cuánticas en el Universo en expansión.

En esta capítulo analizaremos los efectos de la expansión sobre cargas electromagnéticas. Nos valemos de la invarianza conforme del electromagnetismo para encontrar soluciones al campo EM generado por cargas en métricas de FLRW. Comenzamos analizando cómo transforman los campos para cargas inerciales que se mueven con velocidades peculiares no nulas; mostramos que estas cargas en movimiento inercial producen radiación. Luego trabajamos con métricas FLRW con topologías no Euclidianas y mostramos que el comportamiento de cargas puntuales difiere del caso de topología plana. Finalmente, analizamos el movimiento de cargas inerciales desde un sistema propio y mostramos que desde este sistema, si el Universo está acelerado, el sistema a una distancia propia R fija detecta radiación.

6.1. Campos electromagnéticos y marcos de referencia

6.1.1. Marcos de referencia en el espacio-tiempo

En un espacio-tiempo dado, un sistema de referencia se representa como una congruencia caracterizada por un campo de tétradas \mathbf{e}_a (y cotétradas $\mathbf{e}^{\hat{a}}$), con una tetravelocidad $\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{u}$ y tríadas espaciales $\mathbf{e}_{\hat{i}}$ para cada curva en la congruencia. Las componentes del campo de

tétradas obedecen a la relación ortonormal dada por:

$$g_{ab} = e^{\hat{a}}_c e^{\hat{b}}_d \eta_{cd}. \quad (6.1)$$

Cualquier campo vectorial \mathbf{V} se puede expandir en un marco dado como $\mathbf{V} := V^{\hat{a}} \mathbf{e}_{\hat{a}}$, donde $V^{\hat{a}} = V^b e^{\hat{a}}_b$. Usamos $\vec{V} := V^{\hat{i}} \mathbf{e}_{\hat{i}}$ para la parte espacial. En cada punto de la variedad, los marcos de referencia están relacionados por transformaciones locales de Lorentz. Las características cinemáticas del marco están codificadas en los coeficientes de rotación de Ricci (ver De Felice y Bini (2010) y Costa y Natário (2014)):

$$e^b_c \nabla_b e^{\hat{a}}_c = \Gamma^{\hat{a}}_{bc} e^{\hat{a}}_c. \quad (6.2)$$

A partir de aquí, podemos obtener la aceleración del sistema, dada por $a^{\hat{i}} := \Gamma^{\hat{i}}_{\hat{0}\hat{0}} = e^{\hat{i}}_a u^b \nabla_b u^a$; por lo tanto, solo los sistemas en caída libre no se aceleran. Otras características de la congruencia se deducen de:

$$\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}} = \sigma_{\hat{i}\hat{j}} + \frac{1}{3} \Theta \delta_{\hat{i}\hat{j}} + \omega_{\hat{i}\hat{j}}, \quad (6.3)$$

donde $\sigma_{\hat{i}\hat{j}}$, Θ y $\omega_{\hat{i}\hat{j}}$ son los componentes proyectados de cizalladura, la expansión y la vorticidad, respectivamente. También es útil definir:

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b = e^{\hat{i}}_a e^{\hat{j}}_b \delta_{\hat{i}\hat{j}}, \quad (6.4)$$

como el proyector al espacio de reposo de congruencia, y la derivada espacial de un tensor como:

$$D_a X^b := h^c_a h^b_d \nabla_c X^d. \quad (6.5)$$

Dado un marco de referencia, introducimos la conexión para vectores espaciales $\vec{\nabla}$, definidos en componentes de tétrada como:

$$\vec{\nabla}_{\hat{i}} X^{\hat{j}} = X^{\hat{j}}_{;\hat{i}} + \Gamma^{\hat{j}}_{\hat{i}\hat{k}} X^{\hat{k}} \equiv e^{\hat{a}}_i e^{\hat{j}}_b D_a X^b. \quad (6.6)$$

Definiendo el tensor totalmente antisimétrico $\eta_{dabc} := \sqrt{-g}[dabc]$, tenemos el Levi-Civita espacial tensor como $\epsilon_{abc} := \eta_{dabc} u^d$. Con esto, definimos el rotor espacial como:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_{\hat{i}} := \epsilon_{abc} e^{\hat{a}}_i D^b V^c = \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \vec{\nabla}^{\hat{j}} V^{\hat{k}}, \quad (6.7)$$

y la divergencia como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} := D_a V^a. \quad (6.8)$$

6.1.2. Ecuaciones de campos electromagnéticos covariantes

El campo electromagnético está representado por el tensor de Faraday antisimétrico F_{ab} . Las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo de fondo fijo están dadas por:

$$\nabla_a F^{ab} = 4\pi j^b, \quad (6.9)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (6.10)$$

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es:

$$T^{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{ac} F^b{}_c - \frac{1}{4} F^{cd} F_{cd} \right], \quad (6.11)$$

sosteniendo

$$\nabla_a T^{ab} = j_a F^{ab}, \quad (6.12)$$

cuando se satisfacen las ecuaciones de campo. Las ecuaciones de Maxwell son naturalmente covariantes escritas utilizando la conexión afín de Levi-Civita pero además la definición de campo eléctrico y magnético tiene diferentes propiedades en diferentes marcos de referencia. Relativo a una congruencia, el tensor de Faraday se puede descomponer como (De Felice y Clarke 1992a):

$$F_{ab} = 2u_{[a} E_{b]} + \epsilon_{abc} B^c, \quad (6.13)$$

donde los covectores de los campos eléctrico y magnético se definen, respectivamente, como:

$$E_a := F_{ab} u^b, \quad B_a := \frac{1}{2} \epsilon_{abc} F^{cb} \equiv \star F_{ab} u^b, \quad (6.14)$$

donde \star es el producto de Hodge (Misner et al. 1973a). Los componentes proyectadas de estos campos sobre la tétrada están dados por $E^{\hat{a}} = e^{\hat{a}}_b E^b$ y $B^{\hat{a}} = e^{\hat{a}}_b B^b$. Es fácil ver que $E^{\hat{0}} = B^{\hat{0}} = 0$, es decir, los campos eléctrico y magnético son vectores espaciales con respecto a la congruencia \mathbf{u} . La corriente electromagnética j^a se puede escribir como:

$$j^a = \rho_e u^a + J^a, \quad (6.15)$$

donde $\rho_e := j^{\hat{0}}$ y $J^a := e^a_{\hat{i}} j^{\hat{i}}$. Proyectar las ecuaciones de Maxwell en este marco de referencia para un espacio-tiempo arbitrario da dos ecuaciones de propagación (Tsagas 2005):

$$\dot{E}_{\hat{i}} = \sigma_{\hat{i}\hat{j}} E^{\hat{j}} + (\omega \times \vec{E})_{\hat{i}} - \frac{2}{3} \Theta \vec{E}_{\hat{i}} + (\vec{a} \times \vec{E})_{\hat{i}} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_{\hat{i}} - j_{(i)}, \quad (6.16)$$

$$\dot{B}_{\hat{i}} = \sigma_{\hat{i}\hat{j}} B^{\hat{j}} + (\omega \times \vec{B})_{\hat{i}} - \frac{2}{3} \Theta \vec{B}_{\hat{i}} - (\vec{a} \times \vec{B})_{(i)} - (\vec{\nabla} \times \vec{E})_{\hat{i}}, \quad (6.17)$$

y dos ecuaciones de restricción:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 2\vec{\omega} \cdot \vec{B} = \rho_e, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - 2\vec{\omega} \cdot \vec{E} = 0. \quad (6.18)$$

donde $\vec{\omega}_{\hat{i}} := \frac{1}{2} \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \omega^{\hat{j}\hat{k}}$ es el vector de vorticidad. Notemos que en un marco inercial en Minkowski, este conjunto de ecuaciones se reduce a la conocida forma vectorial de las ecuaciones de Maxwell. La evolución de la densidad de carga local ρ_e para una congruencia dada está dada por

$$\dot{\rho}_e = -\Theta \rho_e - D^a J_a - \dot{u}^a J_a. \quad (6.19)$$

Como j^a es un vector conservado para cualquier F_{ab} , la carga eléctrica total definida como $Q = \int_{\Sigma} J^a d^3 \Sigma_a$ en una hipersuperficie tipo espacio Σ se conserva, como lo exige la invariancia de gauge de la teoría. Podemos descomponer el tensor de energía impulso electromagnético,

T^{ab} , en términos de una congruencia dado \mathbf{e}_a como hicimos en el primer capítulo de la siguiente manera:

$$4\pi T_{ab} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)u_a u_b + \frac{1}{6}(E^2 + B^2)h_{ab} + 2Q_{(a}u_{b)} + \pi_{ab}, \quad (6.20)$$

donde $E^2 = E_a E^a$, $B^2 = B_a B^a$ son las magnitudes de los campos, $Q_a := \epsilon_{abc} E^b B^c$ es el vector de Poynting, y π_{ab} la tensión anisotrópica definida como

$$\pi_{ab} := \frac{1}{3}(E^2 + B^2)h_b - E_a E_b - B_a B_b, \quad (6.21)$$

En esta expresión, podemos interpretar el campo electromagnético como un fluido imperfecto con densidad de energía $\rho = (E^2 + B^2)/2$, presión isotrópica $p = \rho/3$, flujo de energía Q^a , y tensión anisotrópica π_{ab} . Proyectando (6.12) sobre \mathbf{u} , obtenemos la conservación de energía local con respecto a la congruencia:

$$\dot{\rho} = -\frac{4}{3}\Theta\rho - D^a Q_a - 2a^a Q_a - \sigma^{ba} p_{i_{ab}} + E_a J^a; \quad (6.22)$$

en la ecuación de conservación vemos que aunque la energía-momento es invariante de Lorentz, la densidad de energía y la transferencia de energía de los campos depende del marco de referencia.

De las ecuaciones de Maxwell, el tensor de Faraday $\mathbf{F} \equiv F_{ab} \mathbf{d}x^a \wedge \mathbf{d}x^b$ es una forma cerrada, $\mathbf{d}\mathbf{F} = 0$, por lo que podemos escribirlo como $\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{A}$, o en notación de componentes:

$$F_{ab} \equiv \nabla_a A_b - \nabla_b A_a. \quad (6.23)$$

El potencial vector A^a se puede descomponer en una parte temporal y espacial en el marco ortonormal, $\mathbf{A} \equiv A^{\hat{0}}\mathbf{u} + \vec{A}$. Es posible demostrar que las fórmulas de los campos magnético y eléctrico en términos del potencial aún se mantienen en la descripción covariante como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^{\hat{0}}. \quad (6.24)$$

Notemos que la expresión para el campo magnético es válida incluso si tiene una divergencia no nula, es decir, $\vec{E} \cdot \vec{\omega} \neq 0$ ¹.

6.1.3. Invariancia conforme

Una transformación conforme actúa sobre el tensor métrico como:

$$\bar{g}_{ab} \rightarrow g_{ab} = \Omega^2(x) \bar{g}_{ab}. \quad (6.25)$$

donde notemos que las coordenadas permanecen iguales (i.e. no es un difeomorfismo sobre puntos del espacio-tiempo). Las cantidades transformadas conformes son denotadas con una línea. Es posible demostrar que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante transformaciones conformes (Fulton et al. 1962). Para ver esto reescribamos las ecuaciones de Maxwell

¹Las identidades vectoriales para la divergencia y el rotor válidas en espacio Euclídeo no valen en una base espacial del espacio-tiempo curvo ya que el tensor de Levi-Civita depende de la métrica.

teniendo en cuenta que F^{ab} es antisimétrico y la conexión de Levi-Civita es simétrica, de manera que podemos expresar las ecuaciones como:

$$\partial_a \mathcal{F}^{ab} = 4\pi \mathcal{J}^b, \quad (6.26)$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (6.27)$$

donde $\mathcal{F} := \sqrt{-g}F^{ab}$, $\mathcal{J}^b := \sqrt{-g}j^b$. Si asumimos que F_{ab} no cambia bajo transformaciones conformes, de las ecuaciones (6.26) y (6.27) se puede demostrar fácilmente que la teoría de Maxwell es invariante conforme. Otra manera de ver esto es suponer que el tensor de Faraday cambia con una dada densidad de escala arbitraria y mostrar que esa densidad es cero (Côté et al. 2019). La transformación actúa sobre diferentes cantidades de interés como:

$$\sqrt{-g} = \Omega^4 \sqrt{-\bar{g}}, \quad F^{ab} = \bar{F}^{ab} \Omega^{-4}, \quad j^a = \Omega^{-4} \bar{j}^a. \quad (6.28)$$

Esto significa que las ecuaciones de Maxwell en cualquier espacio-tiempo relacionado conformemente con Minkowski tendrán las mismas soluciones planas conocidas, *al menos localmente*. Notemos, sin embargo, que (a) las soluciones de F^{ab} se mapearán exactamente solo si la transformación conforme es global (ver Infeld y Schild (1945), Infeld y Schild (1946), y Barrow y Tsagas (2008)), (b) los campos eléctricos y magnéticos medidos por observadores inerciales en un espacio-tiempo conformemente plano (CFS) no coincidirán con sus valores en el espacio-tiempo de Minkowski ya que estos marcos no son equivalentes y (c) el caso simétrico de un universo FRLW es incompatible con la anisotropía del tensor de energía-momento del campo EM; uno puede trabajar en una métrica FRLW perturbada, que ya no es un CFS (Tsagas 2016), o analizar los campos en este fondo fijo. Los campos eléctricos y magnéticos, a su vez, tendrán características no triviales en el SFC como veremos.

Analicemos las características generales del marco de referencia en un CFS. Consideremos un marco de referencia $\mathbf{e}_{\hat{a}}$ en un espacio-tiempo conformemente plano. Este campo de tétradas es ortonormal, $g_{ab} = e_{\hat{a}}^a e_{\hat{b}}^b \eta_{\hat{a}\hat{b}}$ con respecto a la métrica conforme g_{ab} . Con la Ec. (6.1), vemos que la base vectorial $\bar{\mathbf{e}}_{\hat{a}} = \Omega(x) \mathbf{e}_{\hat{a}}$ (y la cobase $\bar{\mathbf{e}}^{\hat{a}} = \mathbf{e}^{\hat{a}}/\Omega(x)$) es un campo de tétradas adaptado a Minkowski, es decir,

$$\bar{e}_{\hat{a}}^{\hat{a}} \bar{e}_{\hat{a}}^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{ab}. \quad (6.29)$$

Si la tétrada $\bar{\mathbf{e}}_{\hat{a}}$ representa un observador inercial en Minkowski, entonces las propiedades cinemáticas de la tétrada conforme $\mathbf{e}_{\hat{a}}$ están determinadas por el factor conforme $\Omega(x)$ dado que:

$$\mathbf{e}_{\hat{a}} = \delta_{\hat{a}}^a / \Omega(x) \partial_a. \quad (6.30)$$

La aceleración de este marco se obtiene fácilmente como:

$$\dot{u}_{\hat{i}} = e_{\hat{i}}^a e_{\hat{0}}^b \nabla_b e_{\hat{a}}^{\hat{0}} = \frac{\partial_i \log(\Omega)}{\Omega}. \quad (6.31)$$

La congruencia conforme adquiere una cizalladura y expansión no nula:

$$\sigma_{\hat{i}\hat{j}} = \delta_{\hat{i}\hat{j}} \frac{\partial_t \log(\Omega)}{\Omega}, \quad \Theta = 3 \frac{\partial_t \log(\Omega)}{\Omega}. \quad (6.32)$$

Analizaremos primero un factor conforme dependiente del tiempo, como aparece en los universos FLRW planos, con elemento de línea:

$$ds^2 = \Omega^2(t)(-dt^2 + d^3x). \quad (6.33)$$

En este caso, los observadores conformes son inerciales, es decir, $\dot{u}_i = 0$, pero la congruencia tiene una expansión isotrópica (ver Ec. (6.32)). Esto significa que el observador representado con esta tétrada conforme $\mathbf{e}_{\hat{a}}$ observará un decaimiento (crecimiento) de los campos si el factor conforme crece (decae):

$$\vec{E} = \Omega^{-2}\vec{\bar{E}}, \quad \vec{B} = \Omega^{-2}\vec{\bar{B}}, \quad (6.34)$$

donde $\vec{\bar{E}}$ y $\vec{\bar{B}}$ son los campos eléctrico y magnético solución de las ecuaciones de Maxwell en Minkowski. La mayoría de las aplicaciones en cosmología se derivan del uso de coordenadas FLRW. El elemento de línea en coordenadas conformes se transforma a estas coordenadas de acuerdo con

$$dt_F = \Omega(t) dt, \quad (6.35)$$

donde la métrica asume la forma bien conocida:

$$ds^2 = -dt_F^2 + \Omega(t_F)^2 \delta_{ij} dx_F^i dx_F^j. \quad (6.36)$$

Observadores estacionarios en estas coordenadas, que llamamos *observadores cósmicos*, representados por $\mathbf{e}_{\hat{a}}^F = \{\partial_{t_F}, \partial_{i_F}/\Omega\}$, son inerciales, y t_F es el tiempo cósmico; este marco se mueve con el flujo de Hubble. Se puede demostrar que estos marcos estacionarios coinciden con los observadores conformes, $\mathbf{e}_{\hat{a}}^F \equiv \mathbf{e}_{\hat{a}}$. Por lo tanto, los observadores inerciales comóviles con el flujo de Hubble en una métrica de FLRW plana miden campos eléctricos y magnéticos de la forma (6.34).

6.1.4. Radación de cargas inerciales en espacio-tiempos conformemente planos

Cargas en inerciales pueden producir radiación, e.g. cuando la carga orbita alrededor de un cuerpo masivo. En un espacio-tiempo en expansión, si la carga es comóvil con el flujo de Hubble es razonable esperar que la configuración del campo sea estacionaria; ¿qué ocurre si la carga tiene una velocidad peculiar no nula? Cuando un cuerpo inercial tiene una velocidad (peculiar) con respecto al flujo de Hubble, su velocidad tiende a decaer con la inversa del factor de escala, eventualmente uniéndose de nuevo al flujo de Hubble. Mostraremos que por este motivo, una carga inercial con velocidad no nula genera un campo EM radiativo. Para ello, utilizaremos la invarianza conforme de la teoría.

Las ecuaciones de Maxwell en una métrica de FLRW se pueden obtener directamente a partir de soluciones planas de espacio-tiempo. Las corrientes de carga, sin embargo, no se transforman de manera equivalente ya que las geodésicas en el espacio-tiempo plano no son necesariamente geodésicas en el espacio-tiempo conforme, excepto cuando la geodésica es nula (Wald 2010). En efecto, si consideramos la velocidad de una carga v^a en la métrica de FLRW tangente a una curva con tiempo propio ds , la velocidad transforma como:

$$v^a = \frac{dx^a}{ds} = \frac{1}{\Omega} \frac{dx^a}{d\bar{s}} = \frac{\bar{v}^a}{\Omega} \quad (6.37)$$

El mapeo de soluciones entre FLRW y Minkowski se puede expresar como

$$\left(\Omega g_{ab}, F_{ab}, Q, \mathbf{v}\right) \rightarrow \left(g_{ab}, F_{ab}, Q, \bar{\mathbf{v}}\right) \quad (6.38)$$

donde las velocidades no comparten el mismo estado cinemático. Si la carga es geodésica, entonces tenemos $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$. La solución de las ecuaciones de Maxwell con esta fuente viene dada por una solución espacio-temporal plana de una carga con tetravelocidad transformada $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\Omega$, que no es geodésica en general. En el caso particular donde la carga se mueve con el flujo del Hubble,

$$\mathbf{v} = \partial_{t_F} \equiv \partial_t/\Omega \rightarrow \bar{\mathbf{v}} = \partial_t. \quad (6.39)$$

La carga correspondiente en el espacio transformado conformemente es entonces geodésica y la solución es el campo de Coulomb. El campo en el espacio-tiempo de FLRW, considerando (6.34) está dado simplemente por:

$$\vec{E} = \frac{Q}{a(t)^2 r^2} \vec{e}_r. \quad (6.40)$$

Notemos que el campo eléctrico es dependiente del tiempo pero no genera un campo magnético. Podemos entender esto observando las ecuaciones de Maxwell generalizadas (6.18), que en este caso corresponden a una congruencia en expansión.

Si la carga es geodésica pero tiene una velocidad peculiar no nula, su tetravelocidad es

$$\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{e}_0^F + v^{\hat{i}}(t)\mathbf{e}_i^F), \quad (6.41)$$

donde $\gamma := 1/\sqrt{1-v^2}$, y $v^2 = \delta_{\hat{i}\hat{j}}v^{\hat{i}}v^{\hat{j}}$. Es bien sabido que los componentes espaciales decaen como $v \sim 1/\Omega$, es decir, las partículas geodésicas convergen finalmente en el flujo de Hubble (Peebles 1993). La tetravelocidad transformada conforme es

$$\bar{\mathbf{v}} = \gamma(\bar{\partial}_t + v^{\hat{i}}(t)\bar{\partial}_{\hat{i}}), \quad (6.42)$$

pero ahora $\bar{\mathbf{v}}$ ya no es geodésico ya que $v^{\hat{i}}(t)$ depende del tiempo. Esto significa que la solución de campo electromagnético generada por una carga geodésica que no sigue el flujo del Hubble es igual a una solución de carga acelerada en el espacio-tiempo de Minkowski; esto produce entonces un campo de radiación en la métrica cosmológica que estamos considerando.

Veamos la forma del campo para el caso sencillo donde las velocidades peculiares son pequeñas; en es caso, la velocidad es $\vec{v} = \vec{v}_0/\Omega(t)$. La aceleración en el espacio conformemente plano es entonces colineal con la velocidad, $\vec{a} = -\vec{v}H(t)$. El campo de radiación en el espacio-tiempo de FLRW se puede expresar entonces usando el campo eléctrico de radiación provocado por una carga acelerada colineal a su velocidad en Minkowski:

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{\vec{E}_{\text{rad}}}{\Omega^2} = \frac{QH(t_F)}{r} \left[\vec{v} - (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} \right], \quad (6.43)$$

donde \vec{v} es la velocidad peculiar en el marco cósmico y \vec{n} es el vector director unitario. La tasa de radiación, medida por el marco de flujo de Hubble, se puede obtener a partir de la

fórmula de Larmor en el espacio conforme. Transformando al marco inercial cósmico, la tasa de radiación es

$$R = \frac{dE}{dt_F} = \frac{dE}{dt} \Omega^{-1} = \frac{2}{3} Q^2 (\vec{a} \cdot \vec{a}) \Omega^{-1} = \frac{2}{3} Q^2 v_0^2 H(t_F)^2 \Omega^{-1}, \quad (6.44)$$

que tiende a cero una vez que la carga alcanza el flujo del Hubble. Por ejemplo, si la carga comienza con una velocidad peculiar v_0 en t_0 en un universo descrito por $\Omega(t_F) = \mathbf{C} t_F^\alpha$

$$E = \int_{t_0}^{\infty} R dt_F = \frac{2}{3} Q^2 \frac{v_0^2 t_0^{-(1+\alpha)}}{\mathbf{C}} \frac{\alpha^2}{1+\alpha}. \quad (6.45)$$

Si la carga emite radiación, la carga sufrirá una fuerza de reacción inversa que afectará el movimiento geodésico de la carga. En el espacio-tiempo curvo, esta fuerza propia fue encontrada por DeWitt-Brehme y Hobbs (ver [Poisson et al. \(2011\)](#) y sus referencias). En un CFS, la contribución no local a la fuerza de reacción, el llamado término de cola, es cero y, por lo tanto, la interacción propia es solo local, dada por:

$$v^a \nabla_a v^b = \frac{Q^2}{3m} (\delta_a^b + v^b v_a) R_c^a v^c, \quad (6.46)$$

donde el término de Ricci expresa la interacción local entre el campo electromagnético y el campo gravitacional. Para velocidades pequeñas, en el marco cósmico, tenemos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt_F} = H(t_F) \vec{v} - 2 \frac{Q^2}{m} \dot{H}(t_F) \vec{v}. \quad (6.47)$$

Cuando la partícula se mueve con el flujo del Hubble, $\vec{v}(t_0) = 0$, no hay radiación como hemos visto y, consistentemente, no hay fuerza propia. Si $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \neq 0$, la carga emite radiación, y eligiendo un modelo de universo concreto como $\Omega(t_F) = \mathbf{C} t_F^\alpha$, podemos integrar las ecuaciones directamente obteniendo:

$$\vec{v}(t_F) = \frac{\vec{v}_0}{t^\alpha} \exp\left(-\frac{2Q^2\alpha}{3mt_F}\right). \quad (6.48)$$

La partícula cargada decae en el flujo del Hubble más rápidamente que una partícula sin carga si α es positivo. ²

6.1.5. Campos electromagnéticos en universos espacialmente curvos

Los campos electromagnéticos en un universo espacialmente curvo son diferentes a las soluciones en modelos espacialmente planos ($k = 0$). Esto se debe a que el mapeo entre Minkowski y la métrica FLRW no es global en general. La presencia de curvatura espacial modifica el decaimiento adiabático del campo e incluso puede amplificarlo ([Barrow y Tsagas](#)

²Este resultado contradice a [Haas y Poisson \(2005\)](#), quienes derivan su resultado usando coordenadas conformes, integrando las ecuaciones dentro de una aproximación de parámetros pequeños. Si integramos en [Haas y Poisson \(2005\)](#) la ecuación (6.2) exactamente, observamos que la partícula cargada decae al flujo del Hubble más rápidamente que una partícula sin carga cuando α' (como se define en un factor de escala conforme, $a(\eta) = \eta^{\alpha'}$) es positivo.

2008). Mostraremos en esta sección de manera explícita cómo cambian los campos EM generados por cargas cuando la métrica es de FLRW con $k \neq 0$. Consideremos el espacio-tiempo más general de FLRW:

$$ds^2 = -dt + a(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (6.49)$$

Esta métrica tiene un tensor de Weyl nulo para todos los valores de K , lo que implica que todas las métricas de FLRW son conformemente planas. Sin embargo, si $K \neq 0$, entonces la transformación a coordenadas conformes no es global en general y depende del tiempo conforme T así como de la distancia radial R ,

$$ds^2 = \Omega(T, R)^2 ds_0^2, \quad (6.50)$$

donde $a(t(T, R)) \neq \Omega(T, R)$ y

$$ds_0^2 := -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (6.51)$$

En general, para $K \neq 0$, si tomamos un marco inercial $\bar{\mathbf{e}}_a$ en el espacio-tiempo de Minkowski, el marco conforme transformado $\mathbf{e}_a = \bar{\mathbf{e}}_a / \Omega(T, R)$ no es inercial como sigue de (6.31). A su vez, si ${}^F\mathbf{e}_a$ representa un observador cósmico (inercial) adaptado a (6.50), entonces la tétrada transformada $\bar{\mathbf{e}}_a$ no será inercial en general. El campo eléctrico y magnético son entonces:

$${}^F E^{\hat{i}} = \bar{E}^{\hat{i}} \Omega(T, R)^{-2}. \quad (6.52)$$

$${}^F B^{\hat{i}} = \bar{B}^{\hat{i}} \Omega(T, R)^{-2}. \quad (6.53)$$

Notemos que la transformación de (t, r) a (T, R) no es única (Grøn y Johannesen 2011), pero la combinación final sería única para una dada solución. Tomemos primero un universo abierto, con $K = -1$. El elemento de línea se puede escribir como:

$$ds^2 = -dt + a(t)^2 \left[d\chi^2 + \sinh(\chi)^2 d\Omega^2 \right]. \quad (6.54)$$

Definiendo $d\eta = dt/a(t)$, obtenemos

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sinh(\chi)^2 d\Omega^2 \right]. \quad (6.55)$$

El componente del marco inercial en estas coordenadas se puede escribir como:

$${}^F \mathbf{e}_{\hat{0}} = \partial_\eta / a(\eta), \quad {}^F \mathbf{e}_{\hat{i}} = \partial_{a'} / \|\partial_{a'}\|. \quad (6.56)$$

Como se muestra en Grøn y Johannesen (2011), podemos encontrar una transformación de coordenadas de (6.55) a (6.51) con la forma:

$$T = \frac{1}{2} [f(\eta + \chi) + f(\eta - \chi)], \quad R = \frac{1}{2} [f(\eta + \chi) - f(\eta - \chi)], \quad (6.57)$$

con la función f dada por una familia de transformación

$$f(x) := c \left[b + \coth \left(\frac{xa}{2} \text{Big} \right) \right]^{-1} + d, \quad (6.58)$$

y donde

$$\Omega(T, R) = \frac{a(\eta) \sinh(\chi)}{R}. \quad (6.59)$$

Escogiendo $f(x) = Ce^x$ donde C es una constante, tenemos la transformación:

$$T = Ce^\eta \cosh(\chi), \quad R = Ce^\eta \sinh(\chi). \quad (6.60)$$

Veamos como se transforma, por ejemplo la componente radial de un campo eléctrico:

$${}^F E_{\hat{r}} = F_{ab} e_{\hat{r}}^a e_{\hat{0}}^b \quad (6.61)$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} {}^F E_{(r)} &= a(t)^{-2} F_{ab} (\partial_r)^a (\partial_\eta)^b = a(t)^{-2} \bar{F}_{AB} (\partial_r)^A (\partial_\eta)^B \\ &= a(t)^{-2} \bar{F}_{AB} \frac{\partial \chi}{\partial r} (\partial_\chi)^A (\partial_\eta)^B = \frac{C^2 e^{2\eta}}{a(t)^2 \sqrt{1+r^2}} \bar{E}_{\hat{R}}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde $\bar{E}_{\hat{R}}$ es un campo radial medido por un marco de referencia en el espacio-tiempo de Minkowski con la coordenada (T, R) . De esta expresión vemos que para distancias cortas al centro del campo radial, la curvatura del espacio es despreciable. Por ejemplo, en el caso de un campo de Coulomb, $\bar{E}_{\hat{R}} = Q/R^2 = Q/(Ce^\eta \sinh(\chi))^2$, obtenemos:

$${}^F E_{\hat{r}} = \frac{Q}{a(t)^2 r^2 \sqrt{1+r^2}}, \quad (6.63)$$

o en coordenadas radiales χ :

$${}^F E_{\hat{\chi}} = \frac{Q}{a(t)^2 \sinh(\chi)^2}. \quad (6.64)$$

Notemos que la curvatura espacial hace que el campo decaiga más rápidamente que en el espacio-tiempo plano. De hecho, expandiendo para distancias cortas vemos que:

$${}^F E_{\hat{\chi}} = \frac{1}{a(t)^2} \left(\frac{Q}{\chi^2} - \frac{Q}{3} + \dots \right), \quad (6.65)$$

donde el campo es más débil que el campo de Coulomb por un término $\frac{Q}{3}$, donde el factor 3 proviene del número de dimensiones espaciales. Esto muestra un ejemplo muy simple de cómo la curvatura espacial afecta el campo electromagnético.

Finalmente, analicemos brevemente el caso de un universo cerrado, con $K = 1$. Aunque las ecuaciones de Maxwell son conformemente invariantes, el cambio de topología en estos universos obliga a cambiar las condiciones de contorno de la solución (Infeld y Schild 1945). Por ejemplo, el campo de Coulomb de una sola carga no es una solución conforme en este espacio-tiempo: a partir de la corriente conservada, la carga total de un universo cerrado debe ser cero. Podemos mostrar que a través de la transformación conforme, sin embargo, la solución satisface esta condición. Para la métrica FLRW de un universo cerrado tenemos:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin(\chi)^2 d\Omega^2 \right]. \quad (6.66)$$

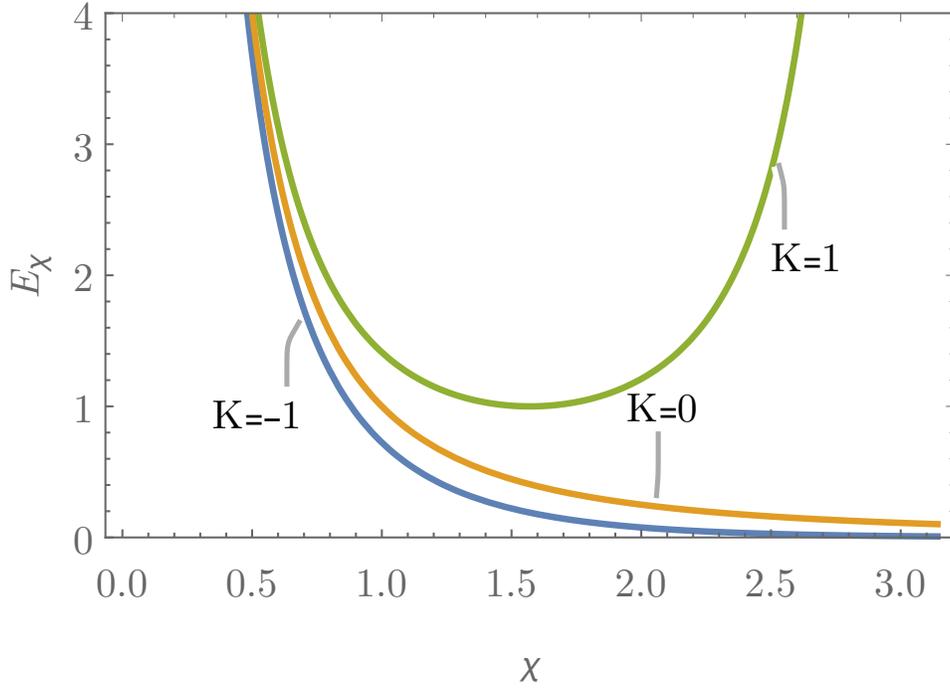


Figura 6.1: Campo eléctrico para una carga puntual en espacios-tiempo de FLRW con diferentes curvaturas espaciales.

Con el mismo razonamiento anterior, podemos encontrar la solución como

$${}^F E_{\hat{\chi}} = \frac{Q}{\sin(\chi)^2}. \quad (6.67)$$

Esta solución tiene dos singularidades en $\chi = 0$ y $\chi = \pi$ y la carga total es cero, como se puede ver en la ley de Gauss. Cambiando el origen del marco al centro de la otra singularidad, $\chi' = \pi - \chi$, tenemos:

$${}^F E_{\hat{\chi}'} = -\frac{Q}{\sin(\chi')^2}. \quad (6.68)$$

Podemos interpretar esta solución como dos cargas opuestas que descansan en las antípodas del universo; las líneas de campo comienzan en $\chi = 0$ y terminan en una carga de imagen negativa en $\chi = \pi$. En este caso, la curvatura espacial positiva mejora el campo plano de Coulomb por un factor $Q/3$.

$${}^F E_{(\chi)} = \frac{1}{a(t)^2} \left(\frac{Q}{\chi^2} + \frac{Q}{3} + \dots \right) \quad (6.69)$$

El comportamiento de todos estos campos Coulombianos combinados se muestra en la Figura 1. Otro ejemplo similar ocurre si queremos resolver el campo eléctrico de un espacio-tiempo de de Sitter “eterno”, es decir, sin singularidad de Big Bang. En ese caso, el espacio-tiempo global es compacto con lo cual la carga total global también debe ser cero. Este caso fue discutido, por ejemplo, en [Higuchi y Cheong \(2008\)](#).

6.2. Efectos cosmológicos campos electromagnéticos locales

Los observadores que siguen el flujo de Hubble, como se caracterizó anteriormente, son inerciales en el universo FRLW. Las hipersuperficies espaciales de tiempo constante t_F en las coordenadas comóviles (6.36) de este marco, tienen distancias geodésicas dadas por $a(t_F)r_F$. Esto significa que la coordenada radial r_F no es una verdadera coordenada geodésica espacial, es decir, el espacio definido por esta foliación se está expandiendo. Si queremos realizar mediciones locales en este espacio-tiempo, necesitamos un marco geodésico cuya descripción local se reduzca a Minkowski cerca del origen y, por lo tanto, no se expanda para distancias cercanas. Este es el marco de referencia de Fermi, que ya hemos discutido extensamente en el Capítulo 3. En esta sección, calcularemos los valores del campo electromagnético en este marco y lo usaremos para obtener radiación local.

6.2.1. Coordenadas de Fermi en cosmología

Si el universo está acelerando, dos sistemas que siguen el flujo de Hubble tienen una desviación geodésica que se puede medir en el marco de referencia local. Si uno de estos sistemas está cargado, hay una aceleración relativa que inducirá, intuitivamente, un campo de radiación medido en el marco local del otro sistema. Para analizar esto, tenemos que evaluar los campos en el marco de referencia local. Como discutimos en el Capítulo 3, sobre la línea del observador, el marco de referencia local y el flujo de Hubble coinciden, con lo cual los campos EM son iguales. Para analizar la radiación local, necesitamos, sin embargo, un marco de referencia extendido en el cual podamos tomar integrales de superficie del vector de Poynting. Por otro lado, necesitamos especificar un sistema de coordenadas para mapear los valores de los campos a puntos físicos en el espacio-tiempo.

En esta sección analizaremos la radiación medida por un observador local utilizando las coordenadas de Fermi. Recordemos que en estas coordenadas (t_L, x_L^i) , la métrica de FLRW es, a segundo orden:

$$ds^2 = -\left[1 - \left(\dot{H} + H^2\right)r_L^2\right]dt_L^2 + \left[1 - \frac{1}{2}H^2r_L^2\right]d^3x_L + \dots \quad (6.70)$$

Contrariamente al flujo de Hubble, las trayectorias integrales de las coordenadas espaciales de Fermi, $\vec{x}_L = \text{constantes}$, **no** son geodésicas. En coordenadas de Fermi, a primer orden, la ecuación de desviación geodésica viene dada por:

$$\ddot{\vec{x}}_L - (\ddot{a}/a)\vec{x}_L = 0. \quad (6.71)$$

Al elegir estas coordenadas, en el límite de bajas velocidades, reemplazamos la expansión del espacio (como se ve en el marco comóvil) por una modificación de la estructura inercial: las coordenadas son fijas y los cuerpos en caída libre se aceleran si el Universo está en expansión acelerada. La tétrada asociada a este marco de referencia local es:

$${}^L e_{\hat{a}}^c = \delta_{\hat{a}}^c + \psi_{\hat{a}}^c r_L^2, \quad (6.72)$$

donde $\psi_{\hat{a}}^c = \text{diag}\left(-\frac{1}{2}(H^2 + \dot{H}^2), \frac{1}{4}H^2, \frac{1}{4}H^2, \frac{1}{4}H^2\right)$, en coordenadas de Fermi. La cinemática de este marco, en el orden más bajo, se caracteriza por una aceleración radial dada por

$${}^L \dot{u}^i = x_L^i \ddot{\Omega}(t_L)/\Omega(t_L), \quad (6.73)$$

que depende de la aceleración del universo y aumenta a medida que nos alejamos del observador inercial central. Esto significa que las partículas en reposo con respecto a este marco están aceleradas, arrastradas por la aceleración del universo. Contrario al flujo de Hubble, el marco local es un sistema de coordenadas rígido a primer orden ya que la expansión aparece solo al siguiente orden, $\Theta = -\frac{3}{2}H(t_L)\dot{H}(t_L)r_L^2$ (ver Capítulo 4). De esta expresión, vemos que si $\dot{H} \equiv 0$, el marco es rígido, como en el caso de un universo de de Sitter.

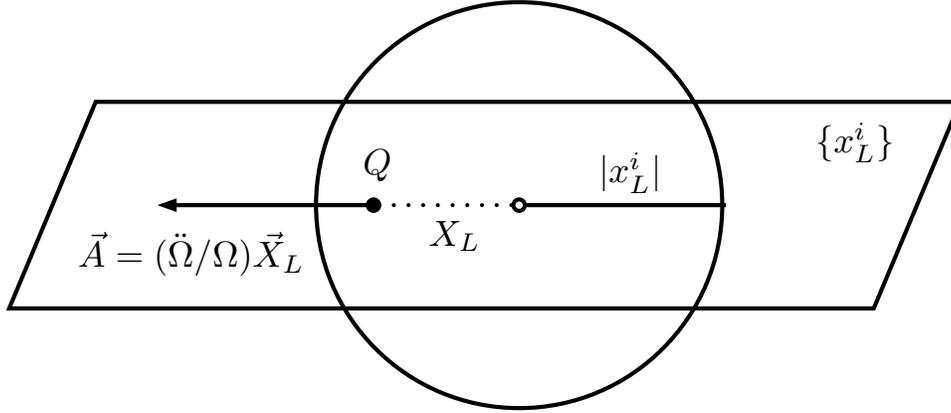


Figura 6.2: Representación de esfera rígida y carga comovil al fluido cósmico

Consideremos una carga siguiendo el flujo de Hubble en un espacio-tiempo de FLRW. Eligiendo coordenadas conformes, la partícula cargada está asociada a la corriente:

$$j^a = Q \int d\tau \frac{dz^a}{d\tau} : \frac{\delta^{(4)}(x^a - z^a)}{\sqrt{-g}} \equiv Q \delta^{(3)}(x^i) \delta_0^a \Omega^{-4}, \quad (6.74)$$

donde consideramos a la carga en el origen del sistema de coordenadas ($x^a = 0$) con tetravelocidad dada por $dz^a/d\tau = \delta_0^a/\Omega$ (ver también la discusión en [Akhmedov et al. \(2010\)](#)). Como hemos visto en las secciones anteriores, la solución es el campo de Coulomb:

$$F_{i0} = \frac{Q}{r^3} x^i. \quad (6.75)$$

El campo eléctrico medido por un observador cósmico viene dado por ${}^F E^{\hat{i}} = Q/(r_F^3 \Omega^2) x_F^i$, de acuerdo con (6.34). Ahora, obtenemos el campo electromagnético de una partícula cargada visto por un marco local. Para hacer esto, primero expresamos el campo de Coulomb (6.75) —en coordenadas conformes— a coordenadas FLRW:

$${}^F F_{i0} = \frac{Q}{\Omega(t_F) r_F^3} x_F^i. \quad (6.76)$$

Luego, la matriz de transformación entre las coordenadas FLRW y las coordenadas de Fermi se puede calcular a partir de las ecuaciones que presentamos en el Capítulo 3s. En las nuevas coordenadas, los componentes no nulas del tensor de Faraday son:

$$\begin{aligned} {}^L F_{0i} &= \frac{\partial x_F^a}{\partial x_L^0} \frac{\partial x_F^b}{\partial x_L^i} F_{ab} = \\ &= Q \frac{x_L^i}{r_L^3} - \frac{Q}{2} \frac{x_L^i}{r_L} \left(H(t_L)^2 - H(t_L) \frac{\ddot{a}}{a} \right) + \mathcal{O}(Hr)^4, \end{aligned} \quad (6.77)$$

Entonces, no hay campo magnético en este marco y el campo eléctrico medido por estos observadores viene dado por:

$$\begin{aligned} {}^L E^{\hat{i}} &= {}^L F_{ab} {}^L e_0^a {}^L e_i^b \\ &= Q \frac{x_L^i}{r_L^3} \left[1 + H(t_L)^2 r_L^2 (1 + 2q) + \mathcal{O}(Hr)^4 \right]. \end{aligned} \quad (6.78)$$

El primer término en (6.78) es el campo de Coulomb, como esperamos cerca del origen. La siguiente corrección del campo de Coulomb depende del cuadrado de la velocidad cósmica Hr y el estado de aceleración del universo. Por ejemplo, si tomamos un universo de de Sitter, $1 + 2q \equiv -1$, con lo cual la expansión acelerada del universo reduce la fuerza del campo y ${}^L E^{\hat{i}}$ se vuelve cero a medida que nos acercamos al horizonte $H^2 r^2 \rightarrow 1$. En el marco cosmológico, los observadores son inerciales pero se expanden a todas las escalas, lo que induce un decaimiento adiabático de los campos. En el marco de referencia local, la congruencia acelera alejándose del observador inercial ubicado en $x_L = 0$ y expandiéndose al siguiente orden.

Cuando la carga se encuentra en el centro del marco de referencia local, dado que el campo magnético es cero por simetría, no hay flujo de energía, $\mathcal{Q}^a = 0$, y por lo tanto no hay radiación. Consideremos una carga que se mueve inercialmente con el flujo de Hubble alejado del observador local con una posición, en coordenadas FLRW, dadas por: $x^a = X \delta_1^a$. En el marco de referencia local, la carga (inercial en coordenadas FLRW) tiene una aceleración no nula; en efecto, la posición de la carga a primer orden en el marco local es $x^{\alpha_L} = X_L \delta_1^{\alpha_L}$, con $X_L = \Omega(t_L)X$. Esto significa que la carga tiene una velocidad, en coordenadas locales, dada por

$$\vec{V} = d\vec{X}_L/dt_L = H(t_L)\vec{X}_L, \quad (6.79)$$

donde $\vec{X}_L := X_L \partial_{1L}$, y una aceleración dada por $\vec{A} = d\vec{V}/dt_L = (\ddot{\Omega}/\Omega)\vec{X}_L$. El campo eléctrico Coulombiano de una carga colocada fuera del origen en coordenadas conformes es

$$F_{i0} = \frac{Q}{\bar{r}^3} (x^i X \delta_1^i), \quad (6.80)$$

donde $\bar{r} = |x^i X \delta_1^i|$. Procediendo como hicimos anteriormente, obtenemos un campo magnético distinto de cero dado por:

$$\vec{B} = (\vec{V} \times \vec{E}) \left[1 - \frac{1}{2} q H(t_L)^2 r_L^2 + \mathcal{O}(Hr)^4 \right], \quad (6.81)$$

donde \vec{E} es el campo de Coulomb. Notemos que el campo magnético es cero si la posición de la carga es el origen o si el universo no se está expandiendo, es decir, si $\vec{V} = 0$; si el universo no está acelerado, $q = 0$, el campo magnético es análogo al medido por un marco de referencia *boosteado* en el espacio-tiempo plano.

Utilizando estas expresiones, obtenemos un flujo de Poynting distinto de cero dado por

$$\vec{Q} \sim \frac{Q^2 H(t_L) X_L \sin(\theta)}{4\pi} \left[\frac{1}{r_L^4} + \frac{qH(t_L)^2}{2r_L^2} \right] \check{\theta}, \quad (6.82)$$

con magnitud

$$Q \sim \frac{Q^2 H(t_L) X_L}{4\pi} |\sin(\theta)| \left| \frac{1}{r_L^4} + \frac{qH(t_L)^2}{2r_L^2} \right|, \quad (6.83)$$

donde hemos usado coordenadas esféricas alrededor del observador, con $\check{\theta}$ el vector unitario acimutal. A lo largo de la dirección radial de la carga en movimiento, no hay radiación como en la situación análoga en Minkowski. El término $\sim r^{-2}$ es análogo a un flujo de Poynting generado por un campo radiativo; en este caso, esta contribución está dada por la aceleración del universo. Si el universo no está acelerado, entonces el flujo de Poynting es r^{-4} , análogo a una carga en movimiento uniforme.

Para determinar la radiación en el marco local, consideremos una esfera rígida alrededor del observador. Esta membrana rígida se puede construir en un modelo de FLRW con coordenadas de Fermi fijando un radio $|x_L^i|$ (ver Figura 6.2). A través de esta esfera, podemos calcular la tasa de radiación utilizando las coordenadas locales, obteniendo una fórmula análoga a la de Larmor, dada por:

$$R = \frac{1}{2} Q^2 |\vec{A}| H(t_L). \quad (6.84)$$

Desde el marco de referencia local, si el universo se expande a un ritmo acelerado, la partícula cargada se acelera con el universo y, por lo tanto, hay una radiación no nula en este marco local. Al elegir una esfera rígida calculamos los flujos sin efectos de deformación; sin embargo, en un universo en expansión, esta esfera requiere energía para mantenerse rígida, es decir, una aceleración externa, que debe incluirse en el balance final de energía como energía gravitacional. Por otro lado, la radiación sería absorbida por el observador acelerado, con lo cual estaríamos convirtiendo la energía que necesitamos para mantener la membrana rígida en energía electromagnética. Una situación análoga ocurre para observadores acelerados en Minkowski (Rohrlich 2007). Sería interesante explorar estos balances de energía en más profundidad en el futuro.

Una situación similar relevante en este contexto sería analizar el campo EM de una carga inercial en un espacio-tiempo de Einstein-Strauss (ver Capítulo 2), donde existe una región estacionaria dentro de un Universo de FLRW. En ese caso, podríamos esperar una radiación no nula para observadores locales dentro de la vacuola, que tendrían condiciones similares en la Tierra, i.e. por debajo de la escala de virialización.

6.3. Conclusiones

Hemos analizado las propiedades de campos electromagnéticos generados por cargas en un Universo en expansión modelado por la métrica de FLRW. Aprovechamos que esta métrica es conformemente plana para encontrar fácilmente soluciones EM y remarcar los puntos no triviales. Podemos resumir los resultados más importantes de este capítulo como:

- Mostramos que una carga que se mueve *inercialmente* pero con una velocidad no nula con respecto al flujo de Hubble, es decir, con una velocidad peculiar, posee un campo radiativo. Esto surge porque que su trayectoria geodésica en el espacio-tiempo de FLRW transforma a una trayectoria acelerada en Minkowski. Mostramos la forma exacta del campo radiativo para esta carga cuando las velocidades son pequeñas. Al radiar, la carga sufre una fuerza de reacción inversa que la frena más rápido; mostramos cómo cambia la trayectoria de la partícula cargada ante la presencia de esta fuerza y concluimos que se une al flujo de Hubble más rápido que si no estuviera cargada.
- Mostramos cómo cambian las soluciones de los campos EM en FLRW cuando consideramos transformaciones conformes dependientes de la posición, que aparecen cuando consideramos modelos FLRW con curvatura espacial no nula. Mostramos que la curvatura espacial negativa tiende a suprimir los campos eléctricos mientras que para un universo cerrado, como la carga total debe ser cero, la solución representa dos cargas en las antípodas del universo.
- Finalmente, mostramos que una carga que se mueve inercialmente con el flujo de Hubble produce radiación vista de un marco de referencia local. Para ello utilizamos coordenadas de Fermi y calculamos una fórmula análoga a la fórmula de Larmor. El marco de referencia propio está acelerado en un Universo en expansión, con lo cual la energía de radiación electromagnética está en parte dada por la aceleración de este marco.

7

Conclusiones

En cosmología podemos distinguir entre problemas globales y problemas locales. Los problemas globales están relacionados a la evolución del Universo como un todo a partir de las propiedades e interacciones de sus componentes. La principal dificultad para investigar la dinámica global del Universo es que este es un sistema único —solo existe, por definición, un solo un Universo— y sólo tenemos acceso observacional a una pequeña parte de este a través de nuestro cono de luz pasado. Por esta razón necesitamos suplementar a nuestros modelos de hipótesis adicionales que están más allá del acceso observacional. En el Universo observable, bajo las suposiciones del Principio Copernicano, podemos analizar estadísticamente la distribución de materia y obtener correlaciones entre las propiedades observadas para conectarlas el modelo global cosmológico. Los problemas locales, por otro lado, son de carácter astrofísico, y se ocupan de las propiedades de sistemas individuales y su conexión con la evolución del Universo. La interacción gravitatoria, por otra parte, actúa a todas las escalas y se rige localmente por las ecuaciones de Einstein. La no-linealidad y el carácter geométrico del espacio-tiempo introduce numerosas dificultades conceptuales para entender cómo emerge la dinámica global y cómo esta se relaciona con la evolución local. Entender la relación entre escalas es un problema fundamental en cosmología y forma parte de la motivación del presente trabajo

En esta tesis, nos hemos dedicado a resolver una variedad de problemas relacionados a la dinámica de sistemas locales que están inmersos en el Universo en expansión. Hemos puesto especial énfasis en entender la dinámica del espacio-tiempo a diferentes escalas y su relación con la curvatura y el contenido de materia. Luego de presentar los conceptos fundamentales en el Capítulo 2, nos avocamos a problemas particulares específicos en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 3 investigamos la dinámica local de un observador en una métrica cosmológica. Por dinámica local nos referimos a los efectos que produce la curvatura espacio-temporal global en un región pequeña del espacio-tiempo alrededor del observador. Para analizar este problema construimos una foliación especial adaptada a la región local del observador, en la cual las coordenadas representan geodésicas. Esta es la foliación natural que adopta un observador para realizar mediciones de distancia y velocidad de otros sistemas. Para construir esta foliación utilizamos coordenadas de Fermi, en las cuales la métrica es plana con correcciones de curvatura a segundo orden. Esto nos permite aislar los efectos de curvatura local en el entorno del observador.

Comenzamos analizando el caso más simple de una métrica de FLRW homogénea e isotrópica. En este caso, los efectos de la expansión en el entorno local se traducen en una

“fuerza cosmológica” dependiente de la aceleración del Universo y no solo de su expansión. Mostramos cuidadosamente que esta fuerza está generada por el potencial Newtoniano de una esfera de densidad uniforme que se expande y no surge de ningún efecto relativista asociado a la expansión. Esto nos permitió discutir las diferentes nociones de escalas locales en el Universo homogéneo, distinguiendo entre escalas locales por debajo del radio de Hubble y escalas (ultra) locales por debajo de la escala de homogeneidad de la materia como, por ejemplo, en el sistema solar, donde el modelo de FLRW no es válido. Pasamos luego a discutir un modelo más complejo de FLRW perturbado por corrientes de materia para el cual nos interesó preguntarnos: ¿cómo influyen los efectos de rotación de la materia cosmológica en el entorno del observador?. Mostramos con las mismas técnicas que el momento angular de los sistemas locales se ve afectado por el momento angular de la materia cosmológica pero que la influencia decae exponencialmente fuera de una escala espacial comparada al horizonte de Hubble. Finalmente, nos ocupamos de analizar cómo es la dinámica local de un Universo inhomogéneo no lineal y su relación con el modelo estándar cosmológico. Tomamos para ello un espacio-tiempo de LTB, el cual puede modelar de manera global los efectos aparentes de la expansión acelerada sin constante cosmológica. A través de nuestra construcción mostramos que el espacio-tiempo local alrededor del centro de simetría de la métrica no tiene efectos análogos a los efectos repulsivos locales de la constante cosmológica en el modelo Λ CDM.

El análisis anterior de la dinámica local, donde los efectos de expansión espacial se interpretan como una fuerza dependiente de la aceleración, nos motivó a rever el concepto de expansión con más generalidad. Nos ocupamos de ello en el Capítulo 4, donde investigamos el significado físico de la expansión junto al concepto complementario de sistema rígido. En particular, nos preguntamos si es posible formar un sistema rígido cuando el Universo mismo está en expansión. Comenzamos revisando el concepto de cuerpo rígido introducido por Born hace más de 100 años y sus restricciones en Relatividad General. Un sistema rígido de Born mantiene las distancias y la forma en un volumen. En la primer parte del capítulo mostramos que los cuerpos rígidos en un Universo máximamente simétrico están fuertemente restringidos por la estructura causal del espacio-tiempo; en particular, mostramos dos teoremas, ya conocidos en espacio-tiempo plano, que establecen que todo movimiento rígido de rotación está asociado a un vector de Killing del espacio-tiempo. Investigamos luego un concepto más general de sistema rígido que se denomina rigidez cuasilocal, para el cual un sistema mantiene distancias constantes sobre su superficie y no sobre el volumen. Mostramos de manera directa que este sistema no puede existir en regiones (anti-)atrapadas del espacio-tiempo para el cual hasta los rayos de luz se contraen. Enfatizamos que esto depende de la superficie que se considere y no está totalmente determinado por la curvatura. Finalmente aplicamos estos conceptos en cosmología y mostramos que en general, para una métrica de FLRW no pueden existir sistemas rígidos en el sentido de Born, pero sí existen sistemas cuasilocales rígidos. En la segunda parte de este capítulo discutimos brevemente la relación entre energía de sistemas materiales en cosmología y la expansión. Mostramos con un ejemplo sencillo que no es posible extraer energía infinita de la expansión ante la presencia de un horizonte en expansión.

En el Universo en expansión cualquier noción de localidad refiere a escalas por debajo del radio de Hubble. Alrededor de este radio, los efectos de expansión son tan fuertes que la luz se detiene en su superficie; en un sentido, en este radio, la expansión es más rápida que la velocidad de la luz. En el Capítulo 4 nos dedicamos a analizar las propiedades de estos horizontes en el contexto cosmológico. Comenzamos describiendo las propiedades ópticas de

estos horizontes y mostramos que se pueden entenderse en general como membranas tipo tiempo que evolucionan en el espacio-tiempo. Utilizamos la formulación de Brown-York para analizar los flujos de energía en un Universo en expansión y mostramos que para FLRW en las superficies de radio fijo existe un flujo de energía gravitacional determinado por la derivada temporal del factor de Hubble. Luego nos centramos en espacio-tiempo esféricamente simétricos y a través de una formulación 1+1+2 establecimos condiciones generales para la signatura y el flujo de energía sobre los horizontes en términos de la curvatura y la materia presente. En la última parte del Capítulo, nos ocupamos de analizar la fusión de un horizonte cosmológico y un horizonte de agujero negro. Para ello, construimos una foliación especial de la métrica de Schwarzschild-de Sitter y encontramos las superficies atrapadas. Mostramos que estos horizontes interactúan de manera no trivial y analizamos alguna de las propiedades más destacadas de esta interacción.

En el último capítulo, nos centramos en los efectos de la expansión sobre campos electromagnéticos generados por cargas. La dinámica del campo EM en un universo homogéneo es interesante ya que por la invarianza conforme de las ecuaciones de Maxwell, tenemos un mapeo entre soluciones de Minkowski y soluciones en FLRW. El movimiento de cargas, sin embargo, implica un mapeo no trivial ya que las geodésicas no se transforman en geodésicas del espacio-tiempo conforme. Esto implica que el campo EM de cargas inerciales FLRW puede generar un campo radiativo si el movimiento de la carga se mapea a un movimiento acelerado en Minkowski. Mostramos explícitamente que esto ocurre si la carga tiene un movimiento peculiar. Luego analizamos cómo transforman los campos si el espacio-tiempo de FLRW tiene curvatura espacial no nula y factor conforme depende de la posición. Finalmente, mostramos que una carga moviéndose con el flujo de Hubble tiene un campo radiativo si se la analiza en un sistema propio cosmológico; calculamos para ello el flujo de radiación en este sistema y discutimos brevemente cómo ocurre el balance de energía en este escenario.

Los problemas discutidos en esta tesis pueden ser extendidos en muchas direcciones. En primer lugar, sería interesante caracterizar completamente la dinámica de interacción entre la fusión de horizontes que hemos propuesto en el Capítulo 5. Para ello, podemos utilizar los diagnósticos propuestos en los trabajos de [Pook-Kolb et al. \(2021\)](#), en los cuales se investiga la interacción de horizontes de dos agujeros negros en relatividad numérica. Un aspecto esencial a investigar en este escenario es el de la entropía asociada a los horizontes; sería interesante analizar en términos termodinámicos cómo evoluciona el sistema y ver si se reproducen los resultados clásicos para la entropía de los horizontes cosmológicos. También es interesante explorar la analogía entre este escenario y una fusión de agujeros negros con un cociente de masas extremo, e.g. la fusión de un agujero negro supermasivo con uno estelar. En segundo lugar, sería interesante investigar con más detalle y generalidad las condiciones para definir un subsistema gravitatorio aislado desde el punto de vista holográfico (cuasilocal) y su relación con la entropía ([Bousso 2002](#)). Esto tiene implicaciones no solo para el entendimiento de sistemas gravitatorios como sistemas holográficos en espacio-tiempos realistas, si no también para caracterizar rigurosamente la radiación gravitacional de manera cuasilocal. Otro camino interesante en ese sentido es utilizar el diccionario termodinámico de [Freidel y Yokokura \(2015\)](#) para estas membranas tipo tiempo relacionadas al horizonte atrapado cosmológico, lo cual sería inmediato de aplicar utilizando los desarrollos del Capítulo 4.

Apéndice A



La Relatividad General, propuesta hace poco más de 100 años por Einstein, sigue presentando desafíos conceptuales y una inacabable riqueza conceptual que debemos dilucidar para construir modelos precisos de la interacción gravitatoria. Esto es fundamental para entender los regímenes más extremos y dispares de la naturaleza, desde agujeros negros hasta el Universo entero. El espacio-tiempo, el objeto de estudio de nuestra tesis, es el conector de todos estos fenómenos que hemos analizado. O, mejor dicho, acaso todo sea espacio-tiempo.

“Arribo, ahora, al inefable centro de mi relato; empieza, aquí, mi desesperación de escritor. Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten; ¿cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca?”

EL ALEPH, J. L. BORGES

“Each simple substance is a perpetual, living mirror of the universe.”

MONADOLGY, G. W. LEIBNIZ

8

Apéndice A: Coordenadas de Fermi

Un observador inercial que evoluciona en un espacio-tiempo arbitrario no detecta localmente (es decir, en un punto) la curvatura del espacio-tiempo. Los efectos de curvatura son de segundo orden y afectan la desviación geodésicas de dos sistemas separados una distancia finita. Para realizar modelos de medición, el observador tiene que tener en cuenta cómo estos efectos de curvatura afectan las mediciones de distancias, velocidad, corrimiento al rojo, etc. En el entorno local del observador, i.e. “el sistema de laboratorio”, los efectos de curvatura aparecen como correcciones a la métrica de Minkowski local. Es posible entonces construir un sistema de coordenadas adaptado al entorno local del observador que es válido en una región finita del espacio pero es válido para todo tiempo. Estas coordenadas se denominan coordenadas de Fermi, término acuñado por Synge, y definen una foliación local para el observador, i.e. superficies de simultaneidad, que se construyen con geodésicas del espacio-tiempo.

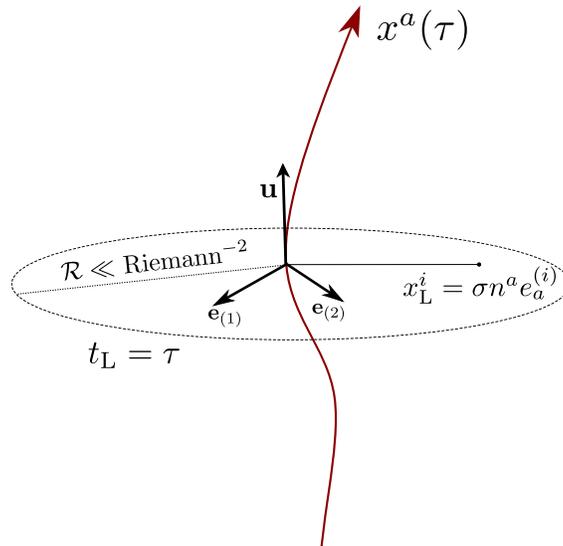


Figura 8.1: Representación de las coordenadas de Fermi construidas a partir de una curva tipo-tiempo $x^a(\tau)$.

Consideremos una curva γ tipo tiempo con tiempo propio τ . La curva $\gamma(\tau)$ transporta una tétrada $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_i\}$, donde la tetravelocidad \mathbf{u} representa el eje temporal y los tres vectores ortonormales \mathbf{e}_i forman el marco de referencia espacial en reposo. La evolución de la tétrada

Apéndice A

a lo largo de la curva se puede caracterizar por la derivada direccional:

$$u^a \nabla_a e_{\hat{a}}^b = -\Omega_c^b e_{\hat{a}}^c, \quad (8.1)$$

donde el tensor de aceleración

$$\Omega^{ab} = \dot{u}^a u^b - \dot{u}^b u^a + u_c \omega_d \epsilon^{cdab}, \quad (8.2)$$

cuantifica la velocidad angular ω^a y la aceleración del marco. Si $\Omega^{ij} = 0$, decimos que la tétrada sigue un transporte de Fermi-Walker (Mashhoon 2013). Para cada punto $Q(\tau)$ sobre la curva $\gamma(\tau)$, podemos formar una hipersuperficie a partir del conjunto de geodésicas espaciales ortogonales a \mathbf{u} . Utilizaremos estas geodésicas espaciales para construir las coordenadas de Fermi. Seguiremos el enfoque original de Manasse y Misner (1963) generalizado a curvas arbitrarias por Ni y Zimmermann (1978); ver también el enfoque más formal de Poisson et al. (2011) utilizando los métodos originales de Synge (1960).

Dado un punto P en un entorno normal convexo de $\gamma(\tau)$, existe una única geodesica espacial con vector unitario n^a que une P y algún punto $Q(\tau)$ sobre la curva. Las coordenadas de Fermi (t_L, x_L^i) para el punto P están dadas por

$$t_L = \tau, \quad x_L^i = \sigma n^a e_{\hat{a}}^i, \quad (8.3)$$

donde σ es la distancia propia de la geodésica que une P y Q . Para encontrar explícitamente el sistema de coordenadas debemos (a) encontrar la familia de geodésicas $P(\tau; n^a, \sigma)$ con vectores unitarios n^a y ortogonales a u^a , $n^a u_a = 0$, y luego transformar la métrica del espacio tiempo en estas coordenadas a segundo orden en el parámetro afín σ , que es lo mismo que realizar un desarrollo de Taylor en las coordenadas de Fermi:

$$g_{ab}(\tau, x_L^i) = g_{ab}(\tau, 0) + g_{ab,c} x_L^c + \frac{1}{2} g_{ab,cd} x_L^c x_L^d + \mathcal{O}(\sigma^3). \quad (8.4)$$

Por definición de nuestro sistema de coordenadas, tenemos que en el centro del sistema, la métrica es Minkowskiana ya que las coordenadas corresponden a tétradas en el centro:

$$g_{ab}(\tau, 0) = g_{a'b'} \left(\frac{\partial y^{a'}}{\partial x_L^a} \right)_0 \left(\frac{\partial y^{b'}}{\partial x_L^b} \right)_0 = e_a^{a'} e_{a'}^b = \eta_{ab}. \quad (8.5)$$

La definición misma del sistema también implica que los símbolos de Christoffel son cero sobre la curva. Esto se puede comprobar directamente de la ecuación geodésica, usando que por definición, la curva $x_L^0 = \tau$, $x_L^i = \sigma n^a e_a^i = \sigma \alpha^i$ es geodésica:

$$\frac{d^2 x_L^a}{d\sigma^2} + \frac{dx_L^b}{d\sigma} \frac{dx_L^c}{d\sigma} \Gamma_{bc}^a = \Gamma_{ij}^a(\tau, x^i) \alpha^i \alpha^j = 0 \quad (8.6)$$

lo cual vale en especial para $\sigma = 0$ (es decir $x_L^i = 0$) y como α^i es arbitrario, tenemos $\Gamma_{ij}^a(\tau, 0) = 0$, lo que implica que las derivadas primeras de la métrica son cero.

Ya tenemos el primer término del desarrollo y vemos que el segundo es cero. Debemos ahora encontrar las derivadas segundas de la métrica para luego hacer el desarrollo de Taylor en estas coordenadas. Para esto, usemos la ecuación de desviación geodésica a lo largo del

parámetro afín $U^a = \partial_\sigma$ con un vector conector dado por n^a ; desarrollando explícitamente la ecuación geodésica tenemos:

$$\frac{d^2 n^a}{d\sigma^2} + 2\frac{n^b}{d\sigma}\Gamma_{bc}^a \sigma^c + n^b \sigma^c \sigma^d R_{c bc}^a + n^b \sigma^c \sigma^d (\Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a - \Gamma_{be}^a \Gamma_{cd}^e). \quad (8.7)$$

Nos centramos en el último término ahora y lo expandimos a segundo orden en σ :

$$2\delta_i^{\hat{a}} \Gamma_{\hat{b}\hat{j}}^{\hat{a}} \alpha^{\hat{j}} = 2\sigma \Gamma_{\hat{i}\hat{j},\hat{k}}^{\hat{a}}(\tau, 0) \alpha^{\hat{i}} \alpha^{\hat{j}} + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad (8.8)$$

donde estas expresiones están proyectadas con tétradas. Las expresiones para la conexión proyectada $\Gamma_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}}$ vienen dadas por (8.1). Reemplazando estas ecuaciones en la ecuación de desviación geodésica, dividiendo por σ y evaluando en el centro de coordenadas obtenemos:

$$\left(3\Gamma_{\hat{i}\hat{j},\hat{k}}^{\hat{a}} + R_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{\hat{a}}\right)(\tau, 0) \alpha^{\hat{i}} \alpha^{\hat{j}} = 0. \quad (8.9)$$

Podemos entonces resolver para la derivada de la conexión sumando una permutación cíclica y restando la siguiente:

$$\Gamma_{\hat{i}\hat{j},\hat{k}}^{\hat{a}}(\tau, 0) = \frac{1}{3} \left(R_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{\hat{a}} + R_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}}^{\hat{a}} \right). \quad (8.10)$$

Con esto, podemos usar la identidad entre derivada de la métrica y la conexión que surge directamente de la definición de los Christoffels:

$$g_{ab,c} = g_{ad}\Gamma_{ba}^d + g_{db}\Gamma_{ac}^d, \quad (8.11)$$

y tomando una derivada adicional en esta expresión, proyectando sobre las tétradas, y evaluando en el origen de coordenadas, obtenemos:

$$g_{\hat{m}\hat{n},\hat{c}\hat{d}}(\tau, 0) = \left(\eta_{\hat{m}\hat{s}} \Gamma_{\hat{n}\hat{a},\hat{b}}^{\hat{s}} + \eta_{\hat{s}\hat{n}} \Gamma_{\hat{m}\hat{a},\hat{b}}^{\hat{s}} + g_{\hat{m}\hat{s},\hat{b}} \Gamma_{\hat{n}\hat{s}}^{\hat{s}} + g_{\hat{s}\hat{n},\hat{b}} \Gamma_{\hat{n}\hat{a}}^{\hat{s}} \right)(\tau, 0) \quad (8.12)$$

Usando las ecuaciones de transporte (8.1), podemos encontrar (ver Misner et al. (1973a) para un cálculo explícito de estos términos):

$$\Gamma_{\hat{0}\hat{0}}^{\hat{0}} = \Gamma_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{a}} = 0, \quad \Gamma_{\hat{j}\hat{0}}^{\hat{0}} = \dot{u}^{\hat{j}}, \quad \Gamma_{\hat{k}\hat{0}}^{\hat{j}} = -\omega_{\hat{i}} \epsilon^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}, \quad (8.13)$$

$$g_{\hat{a}\hat{b},\hat{0}} = g_{\hat{j}\hat{k},\hat{l}} = 0, \quad g_{\hat{0}\hat{0},\hat{0}} = -\dot{u}_{\hat{j}}, \quad g_{\hat{0}\hat{j},\hat{k}} = -\omega_{\hat{i}} \epsilon^{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}. \quad (8.14)$$

que valen sobre la curva γ , es decir, sobre el origen de coordenadas. Tenemos, combinando estas dos ecuaciones con (8.12), las expresiones explícitas para las derivadas segundas de la métrica. Realizando el desarrollo de Taylor hasta orden σ^2 , obtenemos:

$$g_{00} = -(1 + \dot{u}_i x_L^i)^2 + (\epsilon_{ijk} \omega^j x_L^k)^2 - R_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}\hat{j}}(t_L) x_L^i x_L^j + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (8.15)$$

$$g_{0i} = \epsilon_{ijk} \omega^j x_L^k - \frac{2}{3} R_{\hat{0}\hat{j}\hat{i}\hat{k}}(t_L) x_L^j x_L^k + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (8.16)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{l}}(t_L) x_L^k x_L^l + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad (8.17)$$

Apéndice A

donde definimos:

$$R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}(t_L) = R_{pqrs}e_{\hat{a}}^pe_{\hat{b}}^qe_{\hat{c}}^re_{\hat{d}}^s. \quad (8.18)$$

Recordemos que la curvatura está evaluada en el origen y solo depende del tiempo local. La ecuación geodésica en estas coordenadas está dada por:

$$\frac{d^2x_L^i}{dt^2} + R_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}\hat{j}}x_L^j + 2R_{\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{0}}v_L^kx_L^j + \mathcal{O}(v_L^2). \quad (8.19)$$

9

Apéndice B: Colapso gravitacional esférico Newtoniano.

A partir de las fluctuaciones en el Universo temprano, la densidad de materia evoluciona agrupándose de manera jerárquica. Este agrupamiento en el modelo Λ CDM está dominado por materia oscura fría, donde los bariones representan un 20 % de la materia total y son solo relevantes a escalas pequeñas cuando la presión que ejercen se vuelve importante, e.g. en formación de galaxias. Al colapsar, estas estructuras se agrupan en halos de materia oscura que después se fusionan con otros halos, creciendo en masa a medida que evoluciona el Universo. El problema es altamente no-lineal y complicado de resolver. Podemos, sin embargo, analizar cuantitativamente qué ocurre en este régimen si suponemos a) simetría esférica durante la formación del halo, b) la presión es despreciable, c) la sobredensidad es pequeña con respecto al radio de Hubble lo cual implica que estamos en el régimen de campo débil. En ese caso, podemos utilizar la aproximación Newtoniana de las ecuaciones de Einstein. Desarrollamos ahora cómo se comportan estas sobredensidades para establecer las diferentes escalas locales que aparecen naturalmente cuando se forma estructura.

Consideremos coordenadas comóviles \mathbf{x} de fondo y una perturbación de densidad $\rho = (1 + \delta)\hat{\rho}$, que induce una perturbación a la velocidad de expansión, $u^a = u_{\text{FLRW}}^a + v^a$, donde v^a es la velocidad peculiar generada por la sobredensidad. La expansión es entonces $\Theta \equiv \nabla_a u_{\text{FLRW}}^a + \nabla_a v^a$ y por lo tanto $\delta\Theta = \nabla_a v^a$, donde las derivadas se toman en la métrica de fondo. En la aproximación Newtoniana, esto se reduce a $\delta\Theta = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, en coordenadas comóviles. La ecuación de conservación en la aproximación Newtoniana es, despreciando la contribución c^2 de la presión:

$$\dot{\rho} + \rho\Theta = 0, \quad (9.1)$$

o en términos de la perturbación:

$$\dot{\delta} + (1 + \delta)\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (9.2)$$

El potencial Newtoniano, utilizando las ecuaciones de Einstein en coordenadas comóviles resulta:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{3}{2} a^2 \Omega_m H^2 \delta. \quad (9.3)$$

Por otra parte la ecuación de Raychaduri para la expansión se puede escribir en términos de la velocidad peculiar \vec{v} como

$$\dot{\vec{v}} + 2H\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}\Psi}{a^2} \quad (9.4)$$

Tomando la divergencia en la ecuación (9.4) podemos combinar esta ecuación con la Eq. (9.3). Suponiendo ahora simetría esférica, se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) &\equiv \partial_t(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \\ &= (\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{v}}) - \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2}{3}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

De esta manera, tomando la divergencia en (9.4) y utilizando la expresión en (9.5), combinamos esto con la ecuación anterior para obtener:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}}{1 + \delta} = \frac{3}{2} \Omega_m H^2 \delta(1 + \delta). \quad (9.6)$$

Se puede mostrar linealizando esta ecuación que existe una sobredensidad crítica $\delta_{\text{cr}} \approx 1,686$, tal que si la sobredensidad linealizada alcanza este valor, la solución no-lineal diverge, $\delta \rightarrow \infty$. Asimetrías en el colapso sin embargo evitarán que todo colapse a un agujero negro; en cambio, el sistema atravesará una etapa de relajamiento violento y se viralizará. En esta etapa, la energía de rotación equilibra el colapso y se puede mostrar que la sobredensidad en esta región colapsada es de $\Delta_{\text{vir}} \sim 180$. Esta aproximación esférica Newtoniana del colapso es útil para analizar halos de materia muy masivos que forman por ejemplo cúmulos de galaxias. Para contrastar observacionalmente estas predicciones se necesita, como es usual, realizar un análisis estadístico. Resolver la dinámica de la densidad ayuda a predecir la abundancia de los halos acorde a su masa para lo cual hay que identificarlos primero, a través de radiación térmica en rayos X o lensing, y luego medirles su masa.

La formación no-lineal de estructura obliga a abandonar la descripción de un fluido continuo a escalas pequeñas, ya que en el proceso de colapso, las líneas de fluido se cruzan y el sistema ya no se puede describir con un campo vectorial de velocidad único¹. Para resolver la dinámica general de la materia no-colisional se debe encontrar una solución a las ecuaciones de Vlasov-Poisson sin suponer la aproximación de fluido. La manera canónica de hacer esto es a través de simulaciones de N-cuerpos, donde a) se trabaja con una versión discretizada de las ecuaciones, b) se toma una aproximación Newtoniana, y b) se desprecia la presencia de bariones.

¹Esto se conoce en la literatura como *shell-crossing*. Recordemos que un fluido al colapsar tiende a aumentar su presión; como la materia oscura es no colisional, el colapso del fluido llevaría a la formación de una singularidad.

Bibliografía

- Abreu, G., y Visser, M. (2010). Kodama time: Geometrically preferred foliations of spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 82(4), 044027.
- Afshar, M. M. (2009). Quasilocal energy in frw cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 26(22), 225005.
- Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A., Barreiro, R., Bartolo, N., Basak, S., et al. (2020). Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6.
- Akcay, S., y Matzner, R. A. (2011). The kerr–de sitter universe. *Classical and Quantum Gravity*, 28(8), 085012.
- Akhmedov, E., Roura, A., y Sadofyev, A. (2010). Classical radiation by free-falling charges in de sitter spacetime. *Physical Review D*, 82(4), 044035.
- Alpher, R. A., Bethe, H., y Gamow, G. (1948). The origin of chemical elements. *Physical Review*, 73(7), 803.
- Amendola, L., Appleby, S., Avgoustidis, A., Bacon, D., Baker, T., Baldi, M., Bartolo, N., Blanchard, A., Bonvin, C., Borgani, S., et al. (2018). Cosmology and fundamental physics with the euclid satellite. *Living reviews in relativity*, 21(1), 1–345.
- Andersson, L., Mars, M., y Simon, W. (2005). Local existence of dynamical and trapping horizons. *Physical review letters*, 95(11), 111102.
- Armengol, F. G. L., y Combi et al, L. (2021). Circumbinary disk accretion into spinning black hole binaries. *The Astrophysical Journal*, 913(1), 16.
- Arnowitt, R., Deser, S., y Misner, C. W. (2008). Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9), 1997–2027.
- Ashtekar, A. (2014). Geometry and physics of null infinity. *arXiv preprint arXiv:1409.1800*.
- Ashtekar, A., y Bahrami, S. (2019). Asymptotics with a positive cosmological constant. iv. the no-incoming radiation condition. *Physical Review D*, 100(2), 024042.
- Ashtekar, A., Beetle, C., y Fairhurst, S. (1999). Isolated horizons: a generalization of black hole mechanics. *Classical and Quantum Gravity*, 16(2), L1.

- Ashtekar, A., Beetle, C., y Fairhurst, S. (2000). Mechanics of isolated horizons. *Classical and Quantum Gravity*, 17(2), 253.
- Ashtekar, A., Beetle, C., y Lewandowski, J. (2002). Geometry of generic isolated horizons. *Classical and Quantum Gravity*, 19(6), 1195.
- Ashtekar, A., Bonga, B., y Kesavan, A. (2015a). Asymptotics with a positive cosmological constant: I. Basic framework. *Class. Quant. Grav.*, 32(2), 025004.
- Ashtekar, A., Bonga, B., y Kesavan, A. (2015b). Asymptotics with a positive cosmological constant. ii. linear fields on de sitter spacetime. *Physical Review D*, 92(4), 044011.
- Ashtekar, A., Bonga, B., y Kesavan, A. (2015c). Asymptotics with a positive cosmological constant. II. Linear fields on de Sitter spacetime. *Phys. Rev.*, D92(4), 044011.
- Ashtekar, A., Bonga, B., y Kesavan, A. (2016). Gravitational waves from isolated systems: Surprising consequences of a positive cosmological constant. *Physical review letters*, 116(5), 051101.
- Ashtekar, A., Khera, N., Kolanowski, M., y Lewandowski, J. (2022a). Charges and fluxes on (perturbed) non-expanding horizons. *Journal of High Energy Physics*, 2022(2), 1–38.
- Ashtekar, A., Khera, N., Kolanowski, M., y Lewandowski, J. (2022b). Non-expanding horizons: multipoles and the symmetry group. *Journal of High Energy Physics*, 2022(1), 1–33.
- Ashtekar, A., y Krishnan, B. (2003). Dynamical horizons and their properties. *Physical Review D*, 68(10), 104030.
- Ashtekar, A., y Krishnan, B. (2004). Isolated and dynamical horizons and their applications. *Living Reviews in Relativity*, 7(1), 1–91.
- Baldauf, T., Seljak, U., Senatore, L., y Zaldarriaga, M. (2011). Galaxy bias and non-linear structure formation in general relativity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(10), 031.
- Bardeen, J. M. (1980). Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, 22(8), 1882.
- Bardeen, J. M., Carter, B., y Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2), 161–170.
- Barrow, J. D., y Tsagas, C. G. (2008). Slow decay of magnetic fields in open Friedmann universes. *Physical Review D*, 77(10), 107302.
- Baumann, D. (2009). Tasi lectures on inflation. *arXiv preprint arXiv:0907.5424*.
- Baumann, D., Nicolis, A., Senatore, L., y Zaldarriaga, M. (2012). Cosmological non-linearities as an effective fluid. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(07), 051.

- Baumgarte, T. W., y Shapiro, S. L. (2010). *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press.
- Ben-Dov, I. (2004). Penrose inequality and apparent horizons. *Physical Review D*, 70(12), 124031.
- Bianchi, E., y Rovelli, C. (2010). Why all these prejudices against a constant? *arXiv preprint arXiv:1002.3966*.
- Bičák, J., Katz, J., y Lynden-Bell, D. (2007). Cosmological perturbation theory, instantaneous gauges, and local inertial frames. *Physical Review D*, 76(6), 063501.
- Bičák, J., Lynden-Bell, D., y Katz, J. (2004). Do rotations beyond the cosmological horizon affect the local inertial frame? *Physical Review D*, 69(6), 064011.
- Bini, D., Crosta, M. T., y de Felice, F. (2003). Orbiting frames and satellite attitudes in relativistic astrometry. *Classical and Quantum Gravity*, 20(21), 4695.
- Biswas, T., y Notari, A. (2008). 'swiss-cheese'inhomogeneous cosmology and the dark energy problem. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(06), 021.
- Blanchet, L. (2014). Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. *Living reviews in relativity*, 17(1), 1–187.
- Bondi, H. (1960). *Cosmology*. Cambridge University Press, 2ed. ed.
URL libgen.li/file.php?md5=218ab49ccd1b36ce89e3ff130bbec7a4
- Bondi, H., y Gold, T. (1948). The steady-state theory of the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 108(3), 252–270.
- Bondi, H., Van der Burg, M. G. J., y Metzner, A. (1962). Gravitational waves in general relativity, vii. waves from axi-symmetric isolated system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 269(1336), 21–52.
- Bonga, B., y Prabhu, K. (2020). Bms-like symmetries in cosmology. *Physical Review D*, 102(10), 104043.
- Bonnor, W. (2000). A generalization of the einstein-strauss vacuole. *Classical and Quantum Gravity*, 17(14), 2739.
- Boonserm, P., Ngampitipan, T., Simpson, A., y Visser, M. (2020). Innermost and outermost stable circular orbits in the presence of a positive cosmological constant. *Physical Review D*, 101(2), 024050.
- Booth, I. (2005). Black-hole boundaries. *Canadian journal of physics*, 83(11), 1073–1099.
- Booth, I., y Fairhurst, S. (2007). Isolated, slowly evolving, and dynamical trapping horizons: geometry and mechanics from surface deformations. *Physical Review D*, 75(8), 084019.

- Born, M. (1909). Die theorie des starren elektrons in der kinematik des relativitätsprinzips. *Annalen der Physik*, 335(11), 1–56.
- Bousso, R. (2002). The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*, 74(3), 825.
- Bousso, R., y Engelhardt, N. (2015). New area law in general relativity. *Physical review letters*, 115(8), 081301.
- Brill, D. R., y Cohen, J. M. (1966). Rotating masses and their effect on inertial frames. *Physical Review*, 143(4), 1011.
- Brown, A. R. (2013). Tensile strength and the mining of black holes. *Physical Review Letters*, 111(21), 211301.
- Brown, J., Lau, S., y York, J. (2002). Action and energy of the gravitational field. *Annals of Physics*, 297(2), 175–218.
- Brown, J. D., y York Jr, J. W. (1993). Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4), 1407.
- Buchert, T. (2018). On backreaction in newtonian cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 473(1), L46–L49.
- Buchert, T., Carfora, M., Ellis, G. F., Kolb, E. W., MacCallum, M. A., Ostrowski, J. J., Räsänen, S., Roukema, B. F., Andersson, L., Coley, A. A., et al. (2015). Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology? *Classical and quantum gravity*, 32(21), 215021.
- Buchert, T., Larena, J., y Alimi, J.-M. (2006). Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies—the ‘morphon field’. *Classical and Quantum Gravity*, 23(22), 6379.
- Buchert, T., Mourier, P., y Roy, X. (2018). Cosmological backreaction and its dependence on spacetime foliation. *Classical and Quantum Gravity*, 35(24), 24LT02.
- Buchert, T., y Räsänen, S. (2012). Backreaction in late-time cosmology. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62, 57–79.
- Bunge, M. (1967). *Foundations of Physics*. vol. 10 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
URL <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-49287-7>
- Bunge, M. (1973). *Philosophy of physics*. Springer.
- Bunn, E. F., y Hogg, D. W. (2009). The kinematic origin of the cosmological redshift. *American Journal of Physics*, 77(8), 688–694.
- Carrera, M., y Giulini, D. (2010a). Generalization of McVittie’s model for an inhomogeneity in a cosmological spacetime. *Phys. Rev. D*, 81(4), 043521.

- Carrera, M., y Giulini, D. (2010b). Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics. *Rev. Mod. Phys.*, *82*, 169–208.
- Carrera, M., y Giulini, D. (2010). Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics. *Reviews of Modern Physics*, *82*(1), 169–208. ArXiv: 0810.2712.
- Carroll, S. M. (2001). The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, *4*(1), 1–56.
- Carter, B. (2009). Republication of: Black hole equilibrium states. *General Relativity and Gravitation*, *41*(12), 2873–2938.
- Chisari, N. E., y Zaldarriaga, M. (2011). Connection between newtonian simulations and general relativity. *Physical review D*, *83*(12), 123505.
- Chodorowski, M. J. (2011). The kinematic component of the cosmological redshift. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *413*(1), 585–594.
- Choquet-Bruhat, Y., y Geroch, R. (1969). Global aspects of the cauchy problem in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, *14*(4), 329–335.
- Clarkson, C. (2007). Covariant approach for perturbations of rotationally symmetric spacetimes. *Physical Review D*, *76*(10), 104034.
- Clarkson, C., Ellis, G., Larena, J., y Umeh, O. (2011). Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? the averaging, backreaction, and fitting problems in cosmology. *Reports on Progress in Physics*, *74*(11), 112901.
- Clifton, T., Ellis, G. F., y Tavakol, R. (2013). A gravitational entropy proposal. *Classical and Quantum Gravity*, *30*(12), 125009.
- Clowe, D., Bradač, M., Gonzalez, A. H., Markevitch, M., Randall, S. W., Jones, C., y Zaritsky, D. (2006). A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal*, *648*(2), L109.
- Coley, A. A., Pelavas, N., y Zalaletdinov, R. (2005). Cosmological solutions in macroscopic gravity. *Physical review letters*, *95*(15), 151102.
- Combi, L. (2022). Spacetime is material. In *Contemporary Materialism: Its Ontology and Epistemology*, (pp. 177–198). Springer.
- Combi, L., Armengol, F. G. L., Campanelli, M., Ireland, B., Noble, S. C., Nakano, H., y Bowen, D. (2021). Superposed metric for spinning black hole binaries approaching merger. *Physical Review D*, *104*(4), 044041.
- Combi, L., Armengol, F. G. L., Campanelli, M., Noble, S. C., Avara, M., Krolik, J. H., y Bowen, D. (2022). Minidisk accretion onto spinning black hole binaries: Quasi-periodicities and outflows. *The Astrophysical Journal*, *928*(2), 187.
- Combi, L., y Romero, G. E. (2017). Gravitational energy and radiation of a charged black hole. *Classical and Quantum Gravity*, *34*(19), 195008.

- Combi, L., y Romero, G. E. (2018). Is teleparallel gravity really equivalent to general relativity? *Annalen der Physik*, 530(1), 1700175.
- Combi, L., y Romero, G. E. (2020). Relativistic rigid systems and the cosmic expansion. *General Relativity and Gravitation*, 52(9), 1–20.
- Combi, L., y Siegel, D. (2022). Grmhd simulations of neutron-star mergers with weak interactions: r-process nucleosynthesis and electromagnetic signatures of dynamical ejecta. *arXiv preprint arXiv:2206.03618*.
- Cooperstock, F. I., Faraoni, V., y Vollick, D. N. (1998). The influence of the cosmological expansion on local systems. *The Astrophysical Journal*, 503(1), 61.
- Costa, L. F. O., y Natario, J. (2014). Gravito-electromagnetic analogies. *Gen. Rel. Grav.*, 46, 1792.
- Costa, L. F. O., y Natário, J. (2014). Gravito-electromagnetic analogies. *General Relativity and Gravitation*, 46(10), 1792.
- Costa, L. F. O., y Natário, J. (2015). Inertial forces in General Relativity. *J. Phys. Conf. Ser.*, 600(1), 012053.
- Côté, J., Faraoni, V., y Giusti, A. (2019). Revisiting the conformal invariance of maxwell's equations in curved spacetime. *General Relativity and Gravitation*, 51(9), 1–20.
- Creminelli, P., D'Amico, G., Norena, J., Senatore, L., y Vernizzi, F. (2010a). Spherical collapse in quintessence models with zero speed of sound. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(03), 027–027.
URL <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2010%2F03%2F027>
- Creminelli, P., D'Amico, G., Norena, J., Senatore, L., y Vernizzi, F. (2010b). Spherical collapse in quintessence models with zero speed of sound. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(03), 027.
- Crispino, L. C., Higuchi, A., y Matsas, G. E. (2008). The unruh effect and its applications. *Reviews of Modern Physics*, 80(3), 787.
- Dai, L., Pajer, E., y Schmidt, F. (2015). Conformal fermi coordinates. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(11), 043.
- Darmois, G. (1927). *Les équations de la gravitation einsteinienne*. vol. 25. Gauthier-Villars Paris.
- Davies, P. C. (1984). Mining the universe. *Physical Review D*, 30(4), 737.
- Davis, T. M., y Lineweaver, C. H. (2004). Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 21(1), 97–109.

- Davis, T. M., Lineweaver, C. H., y Webb, J. K. (2003). Solutions to the tethered galaxy problem in an expanding universe and the observation of receding blueshifted objects. *American Journal of Physics*, 71(4), 358–364.
- De Felice, F., y Bini, D. (2010). *Classical Measurements in Curved Space-Times*. Cambridge University Press.
 URL <http://www.cambridge.org/mw/academic/subjects/physics/cosmology-relativity-and-gravitation/classical-measurements-curved-space-times?format=HB>
- De Felice, F., y Clarke, C. J. S. (1992a). *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press.
- De Felice, F., y Clarke, C. J. S. (1992b). *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press.
- Debever, R. (2015). *Elie Cartan and Albert Einstein: Letters on Absolute Parallelism, 1929-1932*. vol. 1252. Princeton University Press.
- Del Popolo, A., Chan, M. H., y Mota, D. F. (2020). Turnaround radius in λ cdm and dark matter cosmologies with shear and vorticity. *Physical Review D*, 101(8), 083505.
- Di Valentino, E., Mena, O., Pan, S., Visinelli, L., Yang, W., Melchiorri, A., Mota, D. F., Riess, A. G., y Silk, J. (2021). In the realm of the hubble tension—a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, 38(15), 153001.
- Dodson, S., y Schmidt, F. (2020). *Modern cosmology*. Academic Press.
- Dreyer, O., Krishnan, B., Shoemaker, D., y Schnetter, E. (2003). Introduction to isolated horizons in numerical relativity. *Physical Review D*, 67(2), 024018.
- Earman, J., y Norton, J. (1987). What price spacetime substantivalism? the hole story. *The British journal for the philosophy of science*, 38(4), 515–525.
- Ehlers, J. (1961). Beiträge zur relativistischen mechanik kontinuierlicher medien. In *Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse*, (pp. 793–836).
- Ehlers, J. (1973). Survey of general relativity theory. In *Relativity, astrophysics and cosmology*, (pp. 1–125). Springer.
- Ehlers, J. (2019). Republication of: On the newtonian limit of einstein’s theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 51(12), 1–20.
- Ehlers, J., Geren, P., y Sachs, R. K. (1968). Isotropic solutions of the einstein-liouville equations. *Journal of Mathematical Physics*, 9(9), 1344–1349.
- Ehrenfest, P. (1909). Gleichformige rotation starrer korper und relativititstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 10, 918.
- Einstein, A. (1915). *Volume 6. The Berlin Years: Writings, 1914-1917: English Translation of Selected Texts*. University Press.

- Einstein, A., y Straus, E. G. (1945). The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. *Reviews of Modern Physics*, 17(2-3), 120.
- Einstein, A., y Straus, E. G. (1946). Corrections and additional remarks to our paper: The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. *Reviews of Modern Physics*, 18(1), 148.
- Ellis, G., y Stoeger, W. (2009). The evolution of our local cosmic domain: effective causal limits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 398(3), 1527–1536.
- Ellis, G. F. (1984). Relativistic cosmology: its nature, aims and problems. In *General relativity and gravitation*, (pp. 215–288). Springer.
- Ellis, G. F. (2002). Cosmology and local physics. *New Astronomy Reviews*, 46(11), 645–657.
- Ellis, G. F., y Elst, H. v. (1999). Deviation of geodesics in flrw spacetime geometries. In *On Einstein's Path*, (pp. 203–225). Springer.
- Ellis, G. F., y Gibbons, G. W. (2013). Discrete newtonian cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 31(2), 025003.
- Ellis, G. F., y Gibbons, G. W. (2015). Discrete newtonian cosmology: perturbations. *Classical and Quantum Gravity*, 32(5), 055001.
- Ellis, G. F., y Goswami, R. (2013). Variations on birkhoff's theorem. *General Relativity and Gravitation*, 45(11), 2123–2142.
- Ellis, G. F., Goswami, R., Hamid, A. I., y Maharaj, S. D. (2014). Astrophysical black hole horizons in a cosmological context: Nature and possible consequences on hawking radiation. *Physical Review D*, 90(8), 084013.
- Ellis, G. F., Maartens, R., y MacCallum, M. A. (2012). *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press.
- Ellis, G. F., y Sciama, D. W. (1972). Global and non-global problems in cosmology. *General Relativity*, (pp. 35–59).
- Ellis, G. F., y Stoeger, W. (1987). The 'fitting problem' in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 4(6), 1697.
- Ellis, G. F. R., y van Elst, H. (1999). Cosmological models: Cargese lectures 1998. *NATO Sci. Ser. C*, 541, 1–116.
- Epp, R. J., Mann, R. B., y McGrath, P. L. (2009a). Rigid motion revisited: rigid quasilocal frames. *Classical and Quantum Gravity*, 26(3), 035015.
- Epp, R. J., Mann, R. B., y McGrath, P. L. (2009b). Rigid motion revisited: rigid quasilocal frames. *Classical and Quantum Gravity*, 26(3), 035015.

- Epp, R. J., McGrath, P. L., y Mann, R. B. (2013). Momentum in general relativity: local versus quasilocal conservation laws. *Classical and Quantum Gravity*, *30*(19), 195019.
- Faraoni, V. (Ed.) (2015). *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*. vol. 907 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag.
- Faraoni, V. (2015). *Cosmological and black hole apparent horizons*. Springer.
- Faraoni, V., Ellis, G. F., Firouzjaee, J. T., Helou, A., y Musco, I. (2017). Foliation dependence of black hole apparent horizons in spherical symmetry. *Physical Review D*, *95*(2), 024008.
- Fields, B. D., Olive, K. A., Yeh, T.-H., y Young, C. (2020). Big-bang nucleosynthesis after planck. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, *2020*(03), 010.
- Fiscella, V. S., del Palacio, S., Combi, L., Lousto, C. O., Combi, J. A., Gancio, G., García, F., Gutiérrez, E., Hauscarriaga, F., Kornecki, P., et al. (2021). Psr j0437-4715: The argentine institute of radioastronomy 2019–2020 observational campaign. *The Astrophysical Journal*, *908*(2), 158.
- Foures-Bruhat, Y. (1952). Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta mathematica*, *88*, 141–225.
- Frauenhdiener, J. (2004). Conformal infinity. *Living Reviews in Relativity*, *7*(1), 1–82.
- Freidel, L., y Yokokura, Y. (2015). Non-equilibrium thermodynamics of gravitational screens. *Classical and Quantum Gravity*, *32*(21), 215002.
- Friedrich, H., y Nagy, G. (1999). The initial boundary value problem for einstein’s vacuum field equation. *Communications in Mathematical Physics*, *201*(3), 619–655.
- Friedrich, H., y Rendall, A. (1999). The cauchy problem for the einstein equations. In *Einstein’s field equations and their physical implications*, (pp. 127–223). Springer.
- Fulton, T., Rohrlich, F., y Witten, L. (1962). Conformal invariance in physics. *Reviews of Modern Physics*, *34*(3), 442–457.
- Gancio, G., Lousto, C. O., Combi, L., del Palacio, S., Armengol, F. L., Combi, J. A., García, F., Kornecki, P., Müller, A. L., Gutiérrez, E., et al. (2020). Upgraded antennas for pulsar observations in the argentine institute of radio astronomy. *Astronomy & Astrophysics*, *633*, A84.
- Garcia-Bellido, J., y Haugbølle, T. (2008). Confronting lemaître–tolman–bondi models with observational cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, *2008*(04), 003. URL <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2008%2F04%2F003>
- Gibbons, G. W., Lü, H., Page, D. N., y Pope, C. (2005). The general kerr–de sitter metrics in all dimensions. *Journal of Geometry and Physics*, *53*(1), 49–73.
- Giulini, D. (2006). Algebraic and geometric structures in special relativity. In *Special Relativity*, (pp. 45–111). Springer.

- Gödel, K. (1949). An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Reviews of modern physics*, 21(3), 447.
- Gourgoulhon, E. (2005). Generalized damour-navier-stokes equation applied to trapping horizons. *Physical Review D*, 72(10), 104007.
- Gourgoulhon, E., y Jaramillo, J. L. (2006). Area evolution, bulk viscosity, and entropy principles for dynamical horizons. *Physical Review D*, 74(8), 087502.
- Green, S. R., y Wald, R. M. (2013). Examples of backreaction of small-scale inhomogeneities in cosmology. *Physical Review D*, 87(12), 124037.
- Green, S. R., y Wald, R. M. (2014). How well is our universe described by an flrw model? *Classical and Quantum Gravity*, 31(23), 234003.
- Green, S. R., y Wald, R. M. (2015). Comments on backreaction. *arXiv preprint arXiv:1506.06452*.
- Green, S. R., y Wald, R. M. (2016). A simple, heuristic derivation of our 'no backreaction' results. *Classical and Quantum Gravity*, 33(12), 125027.
- Grøn, Ø., y Elgarøy, Ø. (2007). Is space expanding in the friedmann universe models? *American Journal of Physics*, 75(2), 151–157.
- Grøn, Ø., y Johannesen, S. (2011). FRW universe models in conformally flat-spacetime coordinates II: Universe models with negative and vanishing spatial curvature. *The European physical journal plus*, 126(3), 29.
- Guha Thakurta, S. (1981). Kerr metric in an expanding universe. *Indian Journal of Physics*, 55(4), 304–310.
- Gunn, J. E., y Gott III, J. R. (1972). On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution. *The Astrophysical Journal*, 176, 1.
- Guth, A. H. (1981). Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2), 347.
- Gutiérrez, E. M., y Combi et al, L. (2022). Electromagnetic signatures from supermassive binary black holes approaching merger. *The Astrophysical Journal*, 928(2), 137.
- Haas, R., y Poisson, E. (2005). Mass change and motion of a scalar charge in cosmological spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(15), 739–752. ArXiv: gr-qc/0411108.
- Hamilton, J.-C., Mousset, L., Battistelli, E., De Bernardis, P., Bigot-Sazy, M.-A., Chaniel, P., Charlassier, R., D'Alessandro, G., De Petris, M., Lerena, M. G., et al. (2022). Qubic i: Overview and science program. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(04), 034.
- Harrison, E. (2001). *Cosmology: the science of the universe*.

- Harrison, E. R. (1995). Mining energy in an expanding universe. *The Astrophysical Journal*, 446, 63.
- Hawking, S., y Ellis, G. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
URL https://books.google.it/books?id=QagG_KI7LI8C
- Hawking, S. W., y Penrose, R. (1970). The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519), 529–548.
- Hayward, S. A. (1994). General laws of black-hole dynamics. *Physical Review D*, 49(12), 6467.
- Hayward, S. A. (1996). Gravitational energy in spherical symmetry. *Phys. Rev.*, D53, 1938–1949.
- Heinesen, A., y Buchert, T. (2020). Solving the curvature and hubble parameter inconsistencies through structure formation-induced curvature. *Classical and Quantum Gravity*, 37(16), 164001.
- Hellaby, C., y Lake, K. (1985). Shell crossings and the tolmán model. *The Astrophysical Journal*, 290, 381–387.
- Herglotz, G. (1910). Über den vom reel. *Annalen der Physik*, 336(2), 393–415.
- Higuchi, A., y Cheong, L. Y. (2008). How to use retarded green's functions in de sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, 78, 084031.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.084031>
- Higuchi, A., Matsas, G. E. A., y Sudarsky, D. (1997). Do static sources outside a Schwarzschild black hole radiate? *Phys. Rev.*, D56, 6071–6075.
- Hindmarsh, M. . B., y Kibble, T. W. B. (1995). Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics*, 58(5), 477.
- Hossenfelder, S. (2013). Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 16(1), 1–90.
- Hoyle, F., y Vogeley, M. S. (2002). Voids in the point source catalogue survey and the updated zwicky catalog. *The Astrophysical Journal*, 566(2), 641–651.
URL <https://doi.org/10.1086/338340>
- Iftime, M., y Stachel, J. (2006). The hole argument for covariant theories. *General Relativity and Gravitation*, 38(8), 1241–1252.
- Infeld, L., y Schild, A. (1945). A new approach to kinematic cosmology. *Physical Review*, 68(11-12), 250–272.

- Infeld, L., y Schild, A. E. (1946). A new approach to kinematic cosmology—(b). *Physical Review*, 70(5-6), 410–425.
- Ip, H. Y., y Schmidt, F. (2017). Large-scale tides in general relativity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(02), 025.
- Ishibashi, A., y Wald, R. M. (2005). Can the acceleration of our universe be explained by the effects of inhomogeneities? *Classical and Quantum Gravity*, 23(1), 235.
- Israel, W. (1966). Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44(1), 1–14.
- Kaiser, N. (2014). Astronomical redshifts and the expansion of space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 438(3), 2456–2465.
- Kaloper, N., Kleban, M., y Martin, D. (2010). McVittie’s legacy: Black holes in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, 81(10), 104044.
- Kaloper, N., Kleban, M., y Martin, D. (2010). Mcvittie’s legacy: black holes in an expanding universe. *Physical Review D*, 81(10), 104044.
- Kim, J., Park, C., Rossi, G., Lee, S. M., y Gott III, J. R. (2011). The new horizon run cosmological n-body simulations. *arXiv preprint arXiv:1112.1754*.
- Klein, D., y Randles, E. (2011). Fermi coordinates, simultaneity, and expanding space in robertson–walker cosmologies. In *Annales Henri Poincaré*, vol. 12, (pp. 303–328). Springer.
- Kodama, H. (1980). Conserved energy flux for the spherically symmetric system and the backreaction problem in the black hole evaporation. *Progress of Theoretical Physics*, 63(4), 1217–1228.
- Kodama, H., y Sasaki, M. (1984). Cosmological perturbation theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78, 1–166.
- Kolanowski, M., y Lewandowski, J. (2020). Energy of gravitational radiation in the de sitter universe at i^+ and at a horizon. *Physical Review D*, 102(12), 124052.
- Korkidis, G., Pavlidou, V., Tassis, K., Ntormousi, E., Tomaras, T. N., y Kowlakas, K. (2020). Turnaround radius of galaxy clusters in n-body simulations. *Astronomy & Astrophysics*, 639, A122.
- Kosmann-Schwarzbach, Y. (2011). The noether theorems. In *The Noether Theorems*, (pp. 55–64). Springer.
- Kottler, F. (1918). The physical basis of einstein’s theory of gravitation. *Ann. Phys.(Leipzig)*, 56, 401.
- Kragh, H. (1999). *Cosmology and controversy: The historical development of two theories of the universe*. Princeton University Press.

- Kristian, J., y Sachs, R. K. (1966). Observations in cosmology. *The Astrophysical Journal*, *143*, 379.
- Kuchar, J., Poisson, E., y Vega, I. (2013). Electromagnetic self-force on a static charge in Schwarzschild–de Sitter spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, *30*, 235033.
- Lahav, O. (2020). Dark energy: is it ‘just’ einstein’s cosmological constant λ ? *Contemporary Physics*, *61*(2), 132–145.
- Lahav, O., Lilje, P. B., Primack, J. R., y Rees, M. J. (1991). Dynamical effects of the cosmological constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *251*(1), 128–136.
- Lehmkuhl, D. (2011). Mass–energy–momentum: Only there because of spacetime? *The British journal for the philosophy of science*, *62*(3), 453–488.
- Lense, J. (1918). Über relativitätseinflüsse in den mondsystemen. *Astronomische Nachrichten*, *206*, 117.
- Lense, J., y Thirring, H. (1918). Über den einfluss der eigenrotation der zentralkörper auf die bewegung der planeten und monde nach der einsteinschen gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, *19*, 156.
- Lindblom, L., y Brill, D. R. (1974). Inertial effects in the gravitational collapse of a rotating shell. *Physical Review D*, *10*(10), 3151.
- Lynden-Bell, D., Katz, J., y Bičák, J. (1995). Mach’s principle from the relativistic constraint equations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *272*(1), 150–160.
- Ma, C.-P., y Bertschinger, E. (1995). Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *arXiv preprint astro-ph/9506072*.
- Maciel, A., Guariento, D. C., y Molina, C. (2015). Cosmological black holes and white holes with time-dependent mass. *Phys. Rev. D*, *91*, 084043.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.084043>
- Macpherson, H. J., Lasky, P. D., y Price, D. J. (2017). Inhomogeneous cosmology with numerical relativity. *Physical Review D*, *95*(6), 064028.
- Macpherson, H. J., Lasky, P. D., y Price, D. J. (2018). The trouble with hubble: Local versus global expansion rates in inhomogeneous cosmological simulations with numerical relativity. *The Astrophysical Journal Letters*, *865*(1), L4.
- Manasse, F., y Misner, C. W. (1963). Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry. *Journal of mathematical physics*, *4*(6), 735–745.
- Mars, M., Mena, F. C., y Vera, R. (2013). Review on exact and perturbative deformations of the einstein–strauss model: uniqueness and rigidity results. *General Relativity and Gravitation*, *45*(11), 2143–2173.

- Marzlin, K.-P. (1994). Fermi coordinates for weak gravitational fields. *Physical Review D*, *50*(2), 888.
- Mashhoon, B. (2003). Gravitoelectromagnetism: a brief review. *arXiv preprint gr-qc/0311030*.
- Mashhoon, B. (2013). Observers in Spacetime and Nonlocality. *Annalen Phys.*, *525*, 235–243.
- McCrea, W. H. (1970). A philosophy for big-bang cosmology. *Nature*, *228*(5266), 21–24.
- McGrath, P. L. (2014a). Rigid quasilocal frames. *arXiv preprint arXiv:1402.1443*.
- McGrath, P. L. (2014b). Rigid quasilocal frames. *arXiv preprint arXiv:1402.1443*.
- McGrath, P. L., Epp, R. J., y Mann, R. B. (2012). Quasilocal conservation laws: why we need them. *Classical and Quantum Gravity*, *29*(21), 215012.
- McVittie, G. C. (1933). The mass-particle in an expanding universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, *93*, 325–339.
- Mello, M. M., Maciel, A., y Zanchin, V. T. (2017). Evolving black holes from conformal transformations of static solutions. *Physical Review D*, *95*(8), 084031.
- Mimoso, J. P., Le Delliou, M., y Mena, F. C. (2010). Separating expansion from contraction in spherically symmetric models with a perfect fluid: Generalization of the tolmankoppenheimer-volkoff condition and application to models with a cosmological constant. *Physical Review D*, *81*(12), 123514.
- Misner, C. W., y Sharp, D. H. (1964). Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Physical Review*, *136*(2B), B571.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., y Wheeler, J. A. (1973a). *Gravitation*. Macmillan.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., et al. (1973b). *Gravitation*. Macmillan.
- Mossa, V., Stöckel, K., Cavanna, F., Ferraro, F., Aliotta, M., Barile, F., Bemmerer, D., Best, A., Boeltzig, A., Brogini, C., et al. (2020). The baryon density of the universe from an improved rate of deuterium burning. *Nature*, *587*(7833), 210–213.
- Nandra, R., Lasenby, A. N., y Hobson, M. P. (2012). The effect of an expanding universe on massive objects. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, *422*, 2945–2959.
- Nariai, H. (1950). On some static solutions of einstein’s gravitational field equations in a spherically symmetric case. *Sci. Rep. Tohoku Univ. Eighth Ser.*, *34*, 160.
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., y White, S. D. (1997). A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, *490*(2), 493.
- Ni, W.-T., y Zimmermann, M. (1978). Inertial and gravitational effects in the proper reference frame of an accelerated, rotating observer. *Physical Review D*, *17*(6), 1473.

- Nichols, D. A., Owen, R., Zhang, F., Zimmerman, A., Brink, J., Chen, Y., Kaplan, J. D., Lovelace, G., Matthews, K. D., Scheel, M. A., et al. (2011). Visualizing spacetime curvature via frame-drag vortexes and tidal tendexes: General theory and weak-gravity applications. *Physical Review D*, 84(12), 124014.
- Nielsen, A. B., y Visser, M. (2006). Production and decay of evolving horizons. *Classical and Quantum Gravity*, 23(14), 4637.
- Noether, E. (1918). Invarianten beliebiger differentialausdrücke. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1918*, 37–44.
- Noether, F. (1910). Zur kinematik des starren korpers in der relativtheorie. *Annalen der Physik*, 336(5), 919–944.
- Nolan, B. C. (1998). A point mass in an isotropic universe: Existence, uniqueness, and basic properties. *Physical Review D*, 58(6), 064006.
- Oltean, M., Moghaddam, H. B., y Epp, R. J. (2020). Energy of cosmological spacetimes and perturbations: a quasilocal approach. *arXiv preprint arXiv:2006.10068*.
- Ortín, T. (2004). *Gravity and strings*. Cambridge University Press.
- Pajer, E., Schmidt, F., y Zaldarriaga, M. (2013). The observed squeezed limit of cosmological three-point functions. *Physical Review D*, 88(8), 083502.
- Pavlidou, V., y Tomaras, T. N. (2014). Where the world stands still: turnaround as a strong test of Λ cdm cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(09), 020.
- Peacock, J. A. (2002). An introduction to the physics of cosmology. *Electron-Positron Physics at the Z*, (p. 9).
- Peebles, P. (1993). *Principles of Physical Cosmology*. Princeton series in physics. Princeton University Press.
URL <https://books.google.com.ar/books?id=AmlEt6TJ6jAC>
- Peebles, P. J. E. (2015). *Physical cosmology*. vol. 67. Princeton University Press.
- Penrose, R. (1964). Conformal treatment of infinity. (pp. 565–586).
- Penrose, R. (1965a). Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14(3), 57.
- Penrose, R. (1965b). Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, 284(1397), 159–203.
- Penrose, R. (2005). *The road to reality: A complete guide to the laws of the universe*. Random house.

Bibliografía

- Penrose, R., y Mermin, N. D. (1990). *The emperor's new mind: Concerning computers, minds, and the laws of physics*. American Association of Physics Teachers.
- Penzias, A. A., y Wilson, R. W. (1965). A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, *142*, 419–421.
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., et al. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, *517*(2), 565.
- Pirani, F., y Williams, G. (1961). Rigid motion in a gravitational field. *Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste*, *5*, 1–16.
- Pitjeu, N., y Pitjeva, E. (2013). Constraints on dark matter in the solar system. *Astronomy Letters*, *39*(3), 141–149.
- Planck-Collaboration (2020). Planck 2018 results: Vii. isotropy and statistics of the cmb.
- Poisson, E. (2004a). *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.
- Poisson, E. (2004b). *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.
- Poisson, E., Pound, A., y Vega, I. (2011). The motion of point particles in curved spacetime. *Living Reviews in Relativity*, *14*(1), 7.
- Pook-Kolb, D., Hennigar, R. A., y Booth, I. (2021). What happens to apparent horizons in a binary black hole merger? *Physical Review Letters*, *127*(18), 181101.
- Press, W. H., y Schechter, P. (1974). Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *The Astrophysical Journal*, *187*, 425–438.
- Raychaudhuri, A. (1955). Relativistic cosmology. i. *Physical Review*, *98*(4), 1123.
- Rezzolla, L., y Zanotti, O. (2013). *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press.
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, *116*(3), 1009.
- Rindler, W. (1956). Visual horizons in world models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *116*(6), 662–677.
- Rindler, W. (1981). Public and private space curvature in robertson-walker universes. *General Relativity and Gravitation*, *13*(5), 457–461.
- Rindler, W. (2009). Gödel, einstein, mach, gamow, and lanczos: Gödel's remarkable excursion into cosmology. *American Journal of Physics*, *77*(6), 498–510.

- Rohrlich, F. (2007). *Classical charged particles*. World Scientific Publishing Company.
- Rubin, D., y Hayden, B. (2016). Is the expansion of the universe accelerating? all signs point to yes. *The Astrophysical Journal Letters*, 833(2), L30.
- Rubin, V. C., Ford Jr, W. K., y Thonnard, N. (1980). Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/r= 4kpc/to ugc 2885/r= 122 kpc. *The Astrophysical Journal*, 238, 471–487.
- Sachs, R. K. (1962). Gravitational waves in general relativity viii. waves in asymptotically flat space-time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 270(1340), 103–126.
- Saravi, R. E. G. (2004). On the energy–momentum tensor. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(40), 9573.
- Schleich, K., y Witt, D. M. (2010). A simple proof of birkhoff’s theorem for cosmological constant. *Journal of Mathematical Physics*, 51(11), 112502.
- Schmid, C. (2002). Cosmological vorticity perturbations, gravitomagnetism, and mach’s principle. *arXiv preprint gr-qc/0201095*.
- Schmid, C. (2006). Cosmological gravitomagnetism and mach’s principle. *Physical Review D*, 74(4), 044031.
- Schnetter, E., Krishnan, B., y Beyer, F. (2006). Introduction to dynamical horizons in numerical relativity. *Physical Review D*, 74(2), 024028.
- Scrimgeour, M. I., Davis, T., Blake, C., James, J. B., Poole, G. B., Staveley-Smith, L., Brough, S., Colless, M., Contreras, C., Couch, W., et al. (2012). The wigglez dark energy survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(1), 116–134.
- Senovilla, J. M. (2003). On the existence of horizons in spacetimes with vanishing curvature invariants. *Journal of High Energy Physics*, 2003(11), 046.
- Senovilla, J. M., y Garfinkle, D. (2015). The 1965 penrose singularity theorem. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12), 124008.
- Stachel, J. (1980). Einstein and the rigidly rotating disk. In *General Relativity and Gravitation. Vol. 1. One hundred years after the birth of Albert Einstein. Edited by A. Held. New York, NY: Plenum Press, p. 1, 1980*, vol. 1, (p. 1).
- Stachel, J. (2014). The hole argument and some physical and philosophical implications. *Living Reviews in Relativity*, 17(1), 1–66.
- Steigman, G. (2006). The cosmological evolution of the average mass per baryon. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2006(10), 016.

- Stoeger, W. R., Maartens, R., y Ellis, G. (1995). Proving almost-homogeneity of the universe: an almost ehlers-geren-sachs theorem. *The Astrophysical Journal*, 443, 1–5.
- Stuchlík, Z., y Hledík, S. (1999). Some properties of the schwarzschild–de sitter and schwarzschild–anti-de sitter spacetimes. *Physical Review D*, 60(4), 044006.
- Sultana, J., y Dyer, C. C. (2005). Cosmological black holes: A black hole in the einstein-de sitter universe. *General Relativity and Gravitation*, 37(8), 1347–1370.
- Synge, J. L. (1960). *Relativity: the general theory*.
- Szabados, L. B. (2004). Quasi-local energy-momentum and angular momentum in gr: a review article. *Living reviews in relativity*, 7(1), 1–140.
- Tanoglidis, D., Pavlidou, V., y Tomaras, T. (2015). Testing λ cdm cosmology at turnaround: where to look for violations of the bound? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(12), 060.
- Thorne, K. S., y Blandford, R. D. (2017). *Modern classical physics: optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity, and statistical physics*. Princeton University Press.
- Thorne, K. S., Thorne, K. S., Price, R. H., y MacDonald, D. A. (1986). *Black holes: the membrane paradigm*. Yale university press.
- Trzetrzelewski, M. (2017). On the Equivalence Principle and Electrodynamics of Moving Bodies. *EPL*, 120(4), 40003.
- Tsagas, C. G. (2005). Electromagnetic fields in curved spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(2), 393–407. ArXiv: gr-qc/0407080.
- Tsagas, C. G. (2016). On the magnetic evolution in Friedmann universes and the question of cosmic magnetogenesis. *Symmetry*, 8(11), 122.
- Tyson, J. A., Valdes, F., y Wenk, R. (1990). Detection of systematic gravitational lens galaxy image alignments-mapping dark matter in galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 349, L1–L4.
- Unruh, W. G., y Wald, R. M. (1983). How to mine energy from a black hole. *General Relativity and Gravitation*, 15(3), 195–199.
- Uzan, J.-P., Ellis, G. F., y Larena, J. (2011). A two-mass expanding exact space-time solution. *General Relativity and Gravitation*, 43(1), 191–205.
- Vigneron, Q. (2022). Is backreaction in cosmology a relativistic effect? on the need for an extension of newton’s theory to non-euclidean topologies. *Physical Review D*, 105(4), 043524.
- Volders, L. (1959). Neutral hydrogen in m 33 and m 101. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 14, 323.

- Wald, R. (2010). *General Relativity*. University of Chicago Press.
URL <https://books.google.com.ar/books?id=9S-hzg6-moYC>
- Wald, R. M., y Iyer, V. (1991). Trapped surfaces in the schwarzschild geometry and cosmic censorship. *Physical Review D*, 44(12), R3719.
- Wallace, D. (2020). Gravity, entropy, and cosmology: In search of clarity. *The British Journal for the Philosophy of Science*.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. OUP Oxford.
- Whiting, A. B. (2004). The expansion of space: Free particle motion and the cosmological redshift. *arXiv preprint astro-ph/0404095*.
- Wiltshire, D. L. (2007a). Cosmic clocks, cosmic variance and cosmic averages. *New Journal of Physics*, 9(10), 377.
- Wiltshire, D. L. (2007b). Exact solution to the averaging problem in cosmology. *Physical Review Letters*, 99(25), 251101.
- Wiltshire, D. L. (2011). What is dust?—physical foundations of the averaging problem in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16), 164006.
URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/16/164006>
- Zalaletdinov, R. M. (1992). Averaging out the einstein equations. *General Relativity and Gravitation*, 24(10), 1015–1031.
- Zlatev, I., Wang, L., y Steinhardt, P. J. (1999). Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, 82(5), 896.
- Zwicky, F. (1937). On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, 86, 217.